注 釋

11.1 節 前言

P. 702 衛星軌道

本節中將簡單說明人造衛星軌道的特性。爲方便起見，假設衛星軌道是圓形的，這樣也可得到許多有用的資訊。

以地心爲中心可畫出一個半徑無窮大的圓球，這個球面稱爲天球（celestial sphere）。天空中的太陽、月亮以及星星和地心的連線會和天球相交於一點，因此天體的運動可用它們在天球上的軌跡來表示（圖1）。地球赤道面和天球的交線稱爲天球赤道。地球實際上是繞日運行的，但以固定在地球上的坐標系來看，太陽會繞地球運行，這就是太陽的視運動（apparent motion）。太陽在天球上的軌跡稱爲黃道，黃道面和赤道面的交線稱爲二分線，二分線和天球的交點稱爲二分點，即

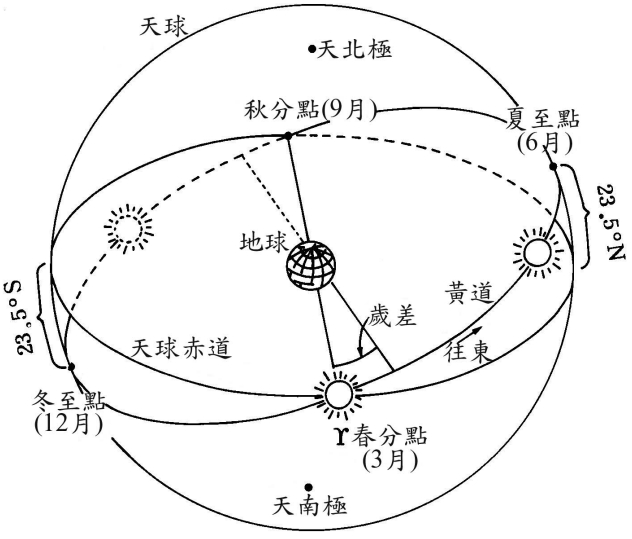

圖 1 天球及太陽的視運動。

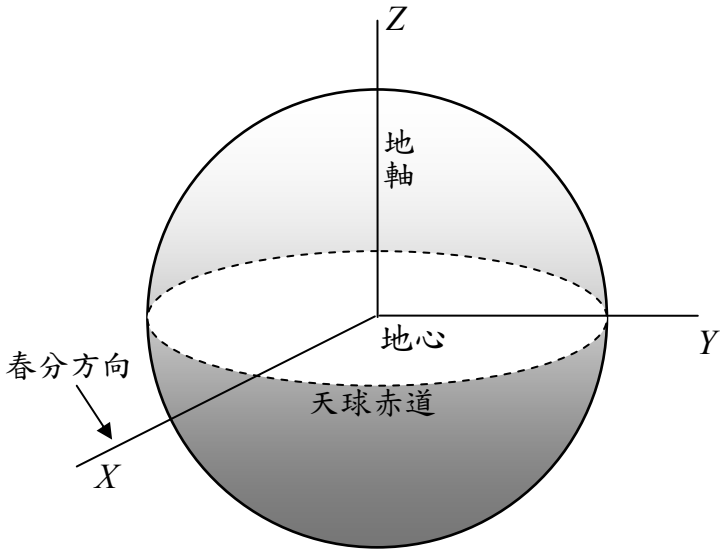

圖 2 地心赤道面座標系。

春分點和秋分點。黃道面和赤道面的夾角約爲23°27′。黃道面上有兩點距赤道面最遠，位於北半球的稱爲夏至點，位於南半球的稱爲冬至點。當太陽在夏至點時，它直射北回歸線；當太陽在冬至點時，它直射南回歸線。

地心赤道面坐標系

以地心爲原點可以建立一個坐標系，X 和 Y 軸在赤道面上，X 軸指向春分點，Z 軸爲地球自轉軸，指向北極。這個坐標系不隨地球自轉而轉動，稱爲地心赤道面坐標系，如圖 2 所示。由於歲差（precession）的緣故，春分點會往西移動，故地心赤道面坐標也不是慣性坐標系。不過由於衛星繞地運動的週期遠小於歲差的週期，因此討論衛星軌道時，可將地心赤道面坐標系當做慣性坐標，在實用上可令 X 軸指向某一年（如 1950 年）的春分方向。

近地點坐標系

描述衛星在軌道面上運動最方便的坐標系是近地點坐標系 x_ω，y_ω，z_ω，如圖 3 所示。這個坐標系原點在地心（即焦點）上，x_ω 和 y_ω 軸在軌道面上，x_ω 軸指向近地點，將 x_ω 軸沿衛星運動方向轉動 90° 就得到

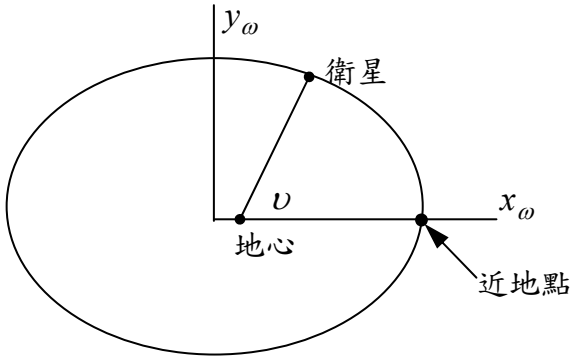

圖 3 衛星的橢圓軌道，υ 為真近點角。

y_ω軸，z_ω軸則和x_ω，y_ω軸形成右手坐標係。因爲衛星在軌道面上運動，故其z_ω坐標等於零。

經典軌道要素

要完全描述衛星在軌道上的運動，除了初始時間外，需要 6 個參數，這些稱爲經典軌道要素（classical orbital elements）。這些是橢圓軌道的半長軸a，偏心率（eccentricity）e，真近點角（true anomaly）υ，昇交點赤經（right ascension of ascending node）Ω，軌道傾角（orbital inclination）i以及近地點輻角（argument of perigee）ω。最後三個角度稱爲經典定向角。半長軸a和偏心率e可以完全決定橢圓形的大小；真近點角υ可決定衛星在橢圓軌道上的位置，一般說來通常都用平近點角（mean anomaly）代替真近點角。至於經典定位角Ω，i，ω則決定軌道面的走向（orientation）。

我們把地心赤道面坐標當做慣性坐標系。如圖 4 所示，衛星北上通過赤道面的點稱爲昇交點（ascending node）。昇交點和春分方向的地心角稱爲昇交點赤經Ω。換句話說，軌道面和赤道面有一交線，這條交線和 X 軸的夾角就是Ω角。衛星南下通過赤道的點稱爲降交點（descending node）。軌道面和赤道面的夾角就是軌道傾角i，當然這兩個平面的法線之間的夾角也等於i。i角一般由赤道往北上軌道以反時針方向計算，其範圍由 0° 到 180°（有的文獻中以順時針方向計

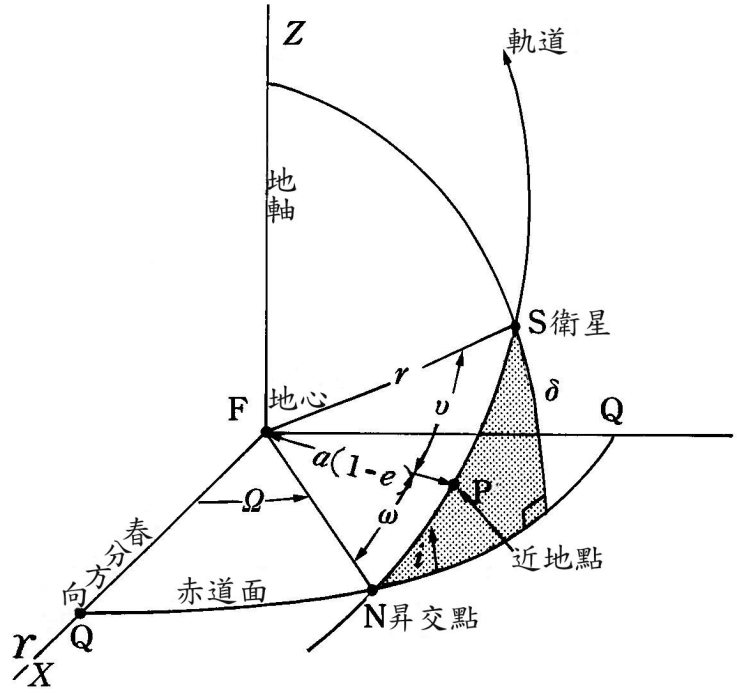

圖 4 經典定向角 Ω, i, ω 的定義。

算)。在軌道面上，昇交點和近地點間的地心角稱爲近地點輻角 ω 。必須指出， Ω ， i 和 ω 的範圍如下：

$$0 \le \Omega < 2\pi , \qquad 0 \le i < \pi , \qquad 0 \le \omega < 2\pi$$

對太陽視運動的軌道來說，其昇交點和降交點分別在春分點和秋分點，其軌道傾角 $23^\circ 27'$ ，爲昇交點赤經是 0° 。

對理想的雙體運動來說，例如小物體繞大物體運行，軌道面在空間中是不會隨時間改變其走向的。若雙體運動受到其他外力影響，則軌道面是會變動的，也就是說 Ω ， i 和 ω 會隨時間變動。由圖 4 可以定義西退軌道或東進軌道。當 $d\Omega / dt > 0$ ，稱爲東進軌道。當 $d\Omega / dt < 0$ ，稱爲西退軌道。

衛星的角速度和週期

衛星的週期可按牛頓萬有引力定律決定出來。假設衛星的軌道是圓形的，則衛星受到的離心力會和引力互相平衡，即

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2} \tag{1}$$

上式中r是衛星的地心距離，ω是衛星的角速度，G和M分別是萬有引力常數和地球質量。(1)式右邊表示單位衛星質量受到引力，這個引力，根據牛頓萬有引力定律，和兩物體質量的乘積成正比，和兩者距離的平方成反比。(1)式也可改寫爲

$$\omega^2 = \frac{g_0}{a_e} \frac{1}{(1+H/a_e)^3} \tag{2}$$

其中a_e爲地球平均半徑（在這裡使用圓球形地球模式），H爲衛星高度，$g_0 = GM/a_e^2$爲海平面上的重力加速度。使用下面的值：

$$g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-1}, \qquad a_e = 6371.22 \text{ km}$$

則(2)式可改寫爲

$$\omega = 1.24025 \times (1+H/a_e)^{-3/2} \text{ rad s}^{-1} \tag{3}$$

衛星週期爲

$$P_S = \frac{2\pi}{\omega}$$

將(3)式代入上式，有

$$P = 84.4(1+H/a_e)^{3/2} \text{ min} \tag{4}$$

使用下面的 GPS 和 LEO 衛星高度值：

$$H_g = 20{,}200 \text{ km}, \qquad H_l = 750 \text{ km}$$

代入(3)式和(4)式，分別得到 GPS 和 LEO 衛星的週期和角速度如下：

$$\omega_g = 1.456 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \qquad P_g = 720.4094634 \text{ min} \tag{5}$$

$$\omega_l = 1.049 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}, \qquad P_l = 95.06273156 \text{ min} \tag{6}$$

地球同步軌道

在赤道面上繞地球運行的衛星，其角速度有可能和地球自轉角速度一樣。從地球上看來它是靜止的，因此它可連續不斷的觀測到地球的某一部分，這種衛星稱爲地球同步衛星（geosynchronous satellites）或地球靜止衛星（geostationary satellites）。現在令(4)式所示的週期等於地球自轉週期，即 P=1440 min，有

$$H=35{,}853 \text{ km}$$

因此所有的地球同步衛星都在赤道上空約 36000 公里處。因爲地球同步衛星必須隨地球以同樣的角速度向東自轉，所以它一定要在赤道上空，只有在這情況下離心力和地心引力才會平衡。地球同步衛星，嚴格的說軌道傾角等於零，昇交點赤經則無法定義。

太陽同步軌道

上面已說過，以固定在地心的坐標系來看，太陽是繞地心運行的。太陽繞地心運動的周期爲一年，故陽光在赤道面上的投影線繞地心的角速度爲

$$\frac{360^\circ}{365.24219879} = 0.985647336^\circ \text{ day}^{-1} \tag{7}$$

假設地球是圓球形的，而且它的密度是球對稱的，那麼在討論衛星繞地心運動時，可假設這是兩個質點的連心力運動。在這情況下，衛星的軌道在空間中就是固定的。事實上地球並不是全球形的，它的赤道半徑 r_E 比兩極半徑 r_P 稍大

$$r_E = 6378.1363 \text{ km}, \qquad r_P = 6356.7516 \text{ km}$$

換句話說，地球的緯度圈是圓形的，但經度圈是橢圓形的（見附錄 A5.1）。

由於地球赤道隆起會造成引力的變動，因此衛星的軌道面會隨時間變動。根據 Escobal 1965，昇交點赤經時間變化率爲

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{J_2 \bar{n}}{a^2(1-e^2)^2}\cos i \tag{8}$$

其中J_2和地球赤道隆起有關，其值爲$J_2 = 1082.28 \times 10^{-6}$，$\bar{n}$的表達式爲

$$\bar{n} = n\left[1 + \frac{3}{2}\frac{J_2\sqrt{1-e^2}}{a^2(1-e^2)}(1-1.5\sin^2 i)\right] \tag{9}$$

而 n 的定義爲

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}K$$

標準化質量和μ是衛星和地球的質量和除以地球的質量。因爲衛星質量遠小於地球質量，故$\mu \cong 1$。K^2是萬有引力常數成以地球質量，其值爲

$$K = 0.07436574(\text{e. r.})^{3/2}\ \text{min}^{-1}$$

e. r. 即赤道半徑，換句話說(8)和(9)式中的所有長度都是以赤道半徑爲單位。因爲衛星軌道幾乎都是圓形的，故可令$e = 0$。於是對圓形軌道來說，(8)和(9)式可簡化爲

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3KJ_2}{2a^{7/2}}\cos i\left[1 + \frac{3J_2}{2a^2}(1-1.5\sin^2 i)\right] \tag{10}$$

上式中 a 爲赤道半徑。由(10)式可知，昇交點赤經的時間變化率是衛星高度 H 和軌道傾角 i 的函數。

假如(10)式所示的昇交點赤經時間變化率等於(7)式所示的值，則這種衛星軌道稱爲太陽同步軌道，即

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3KJ_2}{2a^{7/2}}\cos i\left[1 + \frac{3J_2}{2a^2}(1-1.5\sin^2 i)\right] = 0.985647336^\circ\ \text{day}^{-1} \tag{11}$$

由上式可知，太陽同步衛星的高度和軌道傾角有一定的關係。大部分太陽同步衛星高度約七八百公里，故軌道傾角大約 98 度。

因爲陽光在赤道面的投影線移動速度和衛星昇交點的移動速度一樣，所以投影線和衛星昇交點間的地心角保持固定。雖然地球是自轉

的，但太陽直射點處的子午線和衛星昇交點處的子午線之間，經度差值永遠固定。換句話說，太陽同步衛星北上或南下時，永遠在同樣的當地太陽時通過赤道。

大致而言，在短時間內衛星軌道面在太空中變化很小，一天只隨太陽轉動 0.986 度，而在它下方的地球卻以較快的角速度自轉不停，以衛星在某圈時飛越赤道的經度爲準，可算出下一圈向西退回的經度數，這稱爲西退經距（longitudinal distance）。例如 NOAA 衛星的周期爲 101 分鐘，在這段時間內地球向東轉過的經度數爲

$$101 \times \frac{15}{60} = 25.25^{\circ}$$

太陽同步衛星的觀測藉由這個原理才能涵蓋全球。