

1.1 米氏散射

氣溶膠(aerosol)和雲滴，粒子較大，其半徑接近於光的波長，它們引起的散射和空氣分子並不一樣。光的波長典型值若取為 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ ，那麼散射粒子的半徑和光波長的比值，對空氣分子來說大約為 5×10^{-4} 左右，可是對氣溶膠和雲滴來說大約為 0.1 ~ 100。關於這種粒子引起的散射，Mie 在本世紀初年曾進行理論方面的研究，故稱為米氏散射。米氏理論給出了平面電磁波入射於一個半徑 a 的均勻介電質圓球時 Maxwell 方程的解析解，所以這個理論其實已包含了粒子很小的雷氏散射和粒子很大的幾何光學。可是這個理論將散射光的角度分布以級數解的形式表達，當粒子較大時這個解收斂得很慢。因此，若要將這個理論應用於 a/λ 超過 100 的粒子，計算工作相當麻煩，即使借助現代的大型計算機也是一樣。

這裡簡略地敘述米氏理論的概要。平面電磁波入射於均勻球形粒子時，散射光的電場可用下面的式子表示 (Liou, 1980; van de Hulst, 1957):

$$E_t = S_2(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} E_{t0} \quad (1a)$$

$$E_r = S_1(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} E_{r0} \quad (1b)$$

其中 E_t , E_r 分別為平行於和垂直於散射平面 (即入射方向和散射方向所構成的平面) 的電場的振幅, E_{t0} 和 E_{r0} 為相應的入射光電場。 \mathbf{q} 為散射角, 即入射方向和散射方向間的夾角(圖 1)。 $k = 2\pi/\lambda$, r 是從粒子中心到散射光波面上一點的距離, z 為從粒子中心到入射光波面上一點的距離, 因此 $-ikr+ikz = 2\pi i(z-r)/\lambda$ 表示從入射光看到的散射光相位延遲(phase lag)。分母中的 r 表示散射光是球面波, 其振幅成反比於從中心到該點的距離。

分母中的 i 和 k 是為了方便才寫上去的，譬如說寫上 k 可使係數 S_1 和 S_2 變為無因次量。 S_1 和 S_2 稱為振幅函數(amplitude function)，根據米氏理論，可由下面的對稱級數給出：

$$S_1(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n(x, m)\mathbf{p}_n(\mathbf{q}) + b_n(x, m)\mathbf{t}_n(\mathbf{q})] \quad (2a)$$

$$S_2(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n(x, m)\mathbf{p}_n(\mathbf{q}) + b_n(x, m)\mathbf{t}_n(\mathbf{q})] \quad (2b)$$

其中 x 稱為尺寸參數(size parameter)，定義為 $x = 2pa/l$ ，它代表粒子周長和入射波長的比值。此外， m 為折射指數(index of refraction)， \mathbf{q} 為散射角。 $\mathbf{p}_n(\cos\mathbf{q})$ 和 $\mathbf{t}_n(\cos\mathbf{q})$ 稱為角度係數(angular coefficient)，由下式給出：

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sin\mathbf{q}} P_n^1(\cos\mathbf{q}) \quad (3a)$$

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{q}) = \frac{d}{d\mathbf{q}} P_n^1(\cos\mathbf{q}) \quad (3b)$$

其中 P_n^1 是連帶 Legendre 函數。係數 $a_n(x, m)$ 和 $b_n(x, m)$ 由下式給出：

$$a_n(x, m) = \frac{\mathbf{y}'_n(mx)\mathbf{y}_n(x) - m\mathbf{y}_n(mx)\mathbf{y}'_n(x)}{\mathbf{y}'_n(mx)\mathbf{x}_n(x) - m\mathbf{y}_n(mx)\mathbf{x}'_n(x)} \quad (4a)$$

$$b_n(x, m) = \frac{m\mathbf{y}'_n(mx)\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_n(mx)\mathbf{y}'_n(x)}{m\mathbf{y}'_n(mx)\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{y}_n(mx)\mathbf{x}'_n(x)} \quad (4b)$$

其中 $\mathbf{y}_n(x)$ 和 $\mathbf{x}_n(x)$ 是 Riccati-Bessel 函數，可分別用第一類 Bessel 球函數 $J_{n+1/2}$ 和半整數階第二類 Hankel 函數 $H_{n+1/2}^{(2)}$ 表示：

$$\mathbf{y}_n(x) = \sqrt{\mathbf{p}} x/2 J_{n+1/2}(x) \quad (5a)$$

$$\mathbf{x}_n(x) = \sqrt{\mathbf{p} x/2} H_{n+1/2}^{(2)}(x) \quad (5b)$$

另外 \mathbf{y}'_n 和 \mathbf{x}'_n 表示關於宗量(argument)的導數。

接著我們要估計由於圓球對光的吸收和散射所造成的入射能量減少。為此，我們考慮垂直偏振入射光，其電場如(1b)式所示。位於前方（即 $\mathbf{q} \cong 0$ ）且距圓球很遠的一點上（圖 1），有

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cong z + (x^2 + y^2)/2z \quad (6)$$

上式中 x 表示直角坐標之一，不要誤認為是尺寸參數。將前方的入射和散射電場疊加起來，得到

$$E_{r0} + E_r \cong E_{r0} \left[1 + \frac{S_1(0)}{ikz} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} \right] \quad (7)$$

上式中已設分母的 r 可用 z 來近似。因此，前向強度(intensity)或通量密度(flux density)就成正比於

$$|E_{r0} + E_r|^2 \cong |E_{r0}|^2 \left\{ 1 + \frac{2}{kz} \operatorname{Re} \left[\frac{S_1(0)}{i} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} \right] \right\} \quad (8)$$

在導出(8)式時已省略了含有 $(1/z^2)$ 的項，因為它和含有 $(1/z)$ 的項相比可以略去不計。另外， Re 表示實部。

將上述通量密度對半徑 a 的圓球截面進行積分，並除以入射值，有

$$\frac{1}{|E_{r0}|^2} \iint |E_{r0} + E_r|^2 dx dy = \mathbf{p} a^2 - \mathbf{s}_{er} \quad (9)$$

上式右邊第一項代表圓球的截面積。第二項 \mathbf{s}_{er} 的物理意義是，前方接收到的能量因圓球的存在而減少，衰減量就好像粒子的一部分截面積 \mathbf{s}_{er} 被遮住一樣。(9)式中定義 \mathbf{s}_{er} 的雙重積分包含了兩個 Fresnel 積分。假如將積分上下限延伸到無窮遠處，就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x^2+y^2)/2z} dx dy = 2\mathbf{p} z / ik \quad (10)$$

因此，削弱截面 (extinction cross section)，即(9)式中定義的 \mathbf{s}_{er} ，為

$$\mathbf{s}_{er} = (4\mathbf{p} / k^2) \text{Re}[S_1(0)] \quad (11)$$

其中

$$S_1(0) = S(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n + b_n) \quad (12)$$

若考慮平行偏振入射光，我們得到相應的削弱截面 \mathbf{s}_{el} 為

$$\mathbf{s}_{el} = (4\mathbf{p} / k^2) \text{Re}[S_2(0)] \quad (13)$$

其中 $S_2(0) = S(0)$ 。這個結果表明， $S_1(0)$ 和 $S_2(0)$ 是相等的。這是由於在前向散射的情況下，任何通過 z 軸（也就是電磁波傳播方向）的平面都可視為散射面，因而前向散射和入射光的偏振狀態無關，也就是散射具有對稱性。必須指出，只有當圓球為均勻且各向同性時(12)式才成立。我們進一步定義削弱效率因子 (extinction efficiency factor) Q_e 為削弱截面 \mathbf{s}_e 和幾何截面 $\mathbf{p}a^2$ 的比值：

$$Q_e(x, m) = \mathbf{s}_e / \mathbf{p}a^2 \quad (14)$$

在(14)式中已省略了 \mathbf{s}_e 的下標 r 或 l 。將(12)式代入(11)式後，再代入(14)式，得到

$$Q_e(x, m) = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}[a_n + b_n] \quad (15)$$

削弱效率因子 Q_e 表示入射於粒子幾何截面的能量中受到削弱的比率。

其次我們要導出散射截面 (scattering cross section) 的表達式。假設

電場向量沿 x 方向振動，則 E_{r0} 和 E_{l0} 分別為 (圖 1)

$$E_{r0} = E_0 e^{-ikz} \sin \mathbf{f}, \quad E_{l0} = E_0 e^{-ikz} \cos \mathbf{f} \quad (16)$$

上式中 \mathbf{f} 為方位角， E_0 是入射電場的複數振幅。由(16)式可得到入射輻射強度(radiant intensity)為

$$I_{r0} = |E_{r0}|^2 = I_0 \sin^2 \mathbf{f} \quad (17a)$$

$$I_{l0} = |E_{l0}|^2 = I_0 \cos^2 \mathbf{f} \quad (17b)$$

其中 $I_0 = |E_0|^2$ 。由(1)和(17)式我們得到散射光強度如下：

$$I = |E_r|^2 + |E_l|^2 = \frac{I_0}{r^2} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \quad (18)$$

(17)和(18)式中事實上省略了一個常數因子。(18)式中散射分布函數(scattering distribution function) $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ 表示粒子對入射光的散射能力和方向分布：

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \frac{1}{k^2} [i_2(\mathbf{q}) \cos^2 \mathbf{f} + i_1(\mathbf{q}) \sin^2 \mathbf{f}] \quad (19)$$

在這裡 $i_1(\mathbf{q})$ 和 $i_2(\mathbf{q})$ 稱為強度函數(intensity function)：

$$i_1(\mathbf{q}) = |S_1(\mathbf{q})|^2, \quad i_2(\mathbf{q}) = |S_2(\mathbf{q})|^2 \quad (20)$$

對單位立體角來說，通量密度 F 等於強度 I ，故總通量就是

$$f = \int F(\mathbf{q}, \mathbf{f}) dA = \int_0^{2P} \int_0^P I(\mathbf{q}, \mathbf{f}) r^2 \sin q dq d\mathbf{f} \quad (21)$$

其中 $\sin q dq d\mathbf{f}$ 是立體角元 dW ，而 $r^2 dW$ 就是半徑 r 的球面上的面積元 dA 。因此，散射截面(scattering cross section)可定義為

$$\mathbf{s}_s = \frac{f}{F_0} = \frac{\mathbf{p}}{k^2} \int_0^P [i_1(\mathbf{q}) + i_2(\mathbf{q})] \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (22)$$

為了要繼續計算(22)式，我們需用到下面連帶 Legendre 函數的特性：

$$\int_0^P \left[\frac{dP_n^1}{d\mathbf{q}} \frac{dP_m^1}{d\mathbf{q}} + \frac{P_n^1 P_m^1}{\sin^2 \mathbf{q}} \right] \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \mathbf{d}_{mn} \quad (23)$$

$$\int_0^P \left[\frac{P_n^1}{\sin \mathbf{q}} \frac{dP_m^1}{d\mathbf{q}} + \frac{P_m^1}{\sin \mathbf{q}} \frac{dP_n^1}{d\mathbf{q}} \right] \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} = 0 \quad (24)$$

其中 \mathbf{d}_{mn} 為 Kronecker 符號。當 $m = n$ 時， $\mathbf{d}_{mn} = 1$ ；當 $m \neq n$ 時， $\mathbf{d}_{mn} = 0$ 。利用(23)和(24)式可將(22)式積出來，得到散射截面 \mathbf{s}_s 的表達式，這就是將下面(25)式右邊乘以 $\mathbf{p} a^2$ 而得到的結果。

散射效率因子 (scattering efficiency factor) 是散射截面 \mathbf{s}_s 和幾何截面的比值，由下式給出：

$$Q_s(x, m) = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (25)$$

吸收效率因子(absorption efficiency factor)則定義為

$$Q_a(x, m) = Q_e(x, m) - Q_s(x, m) \quad (26)$$

必須指出，散射粒子也具有吸收作用。當電磁波入射於粒子上時，在粒子內產生的交變(alternating)電荷和電流分布會再向外輻射出電磁波，這就是散射波。同時，電磁波也在粒子內傳播，使得電流在內部流動，因而有一部分會被吸收或轉變為焦耳熱而耗散掉，這就是粒子對入射波的吸收作用。粒子是否具有吸收作用可由折射指數決定。假如折射指數是實數的話，粒子只會散射不會吸收，此時 $Q_e = Q_s$ 。假如折射指數是複數，則粒子還會吸收輻射，因而折射指數的虛部代表吸收的大小。在這情況下 $Q_e > Q_s$ ，

故 Q_a 是存在的.

上面討論的是 x 方向線偏振(linearly polarized)入射光被粒子散射的結果. 若電場在 y 方向振動, 只需將上面各式中 \mathbf{f} 改為 $\mathbf{f} - 90^\circ$ (或 $\mathbf{f} + 270^\circ$), 於是我們得到

$$\mathbf{g}_y(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \frac{1}{k^2} [i_2(\mathbf{q}) \sin^2 \mathbf{f} + i_1(\mathbf{q}) \cos^2 \mathbf{f}] \quad (27)$$

$$Q_{sy} = Q_{sx} \quad (28)$$

假如入射輻射是自然光 (強度 I_0), 則散射的特徵量可視為兩個振動方向互相正交的入射電場得到的結果 (強度都是 $I_0/2$). 因此, 球形粒子對自然光的散射分布函數和效率因子分別為

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \frac{\mathbf{g}_x + \mathbf{g}_y}{2} = \frac{1}{2k^2} [i_1(\mathbf{q}) + i_2(\mathbf{q})] \quad (29)$$

$$Q_s = (Q_{sx} + Q_{sy})/2 = Q_{sx} \quad (30)$$

其中 \mathbf{g}_x 和 Q_{sx} 分別由(19)和(25)式給出.

由上面所說的可知, 對均勻且各向同性的介電質圓球來說, 散射效率因子和散射截面並不依賴於入射輻射的偏振狀態, 但散射分布函數卻和入射輻射的偏振狀態關係密切. 對於線偏振入射光來說, 散射分布函數不但和散射角有關, 而且也隨方位角而不同. 只有在入射光為非偏振光 (unpolarized light)的情況下, 散射分布函數才只是散射角的函數.

米氏理論的大要已在上面敘述了, 接著要以具體的例子說明若干特性. 圖 2 表示折射指數 $m = 1.5$ 時削弱效率因子 Q_e 的計算結果隨尺寸參數 x 的變化. 在 $x = 4$ 處, 即波長為粒子半徑的 $3/2$ 時, 可以看出強烈的散射發生. 此外, 這個效率因子隨著 x 的增加一面振動一面減小, 最後趨近於 2.

也就是說，對大粒子來說，入射於其截面的能量的兩倍被削弱了（在這情況下只有散射，因為 m 是實數）。這種現象是幾何光學作用（即反射，折射）和繞射作用所引起的，可用理論方法推導出來。折射指數若不同，則 Q_e 的振動波長和振幅也會不同。氣溶膠和雲滴的折射指數值大約從 1.33 到 1.55，故在這範圍內，若改用標準化尺寸參數 $r = 2x(m-1)$ 表示，則 Q_e 的值隨 r 的變動就和其他變數無關了。圖 3 表示這樣的圖形，中央的實線是折射指數在 1.33 到 1.50 範圍內 Q_e 的平均值。上下兩條包絡線表示由這範圍內所有的值計算出來的 Q_e 值。當折射指數是複數時，削弱效率因子 Q_e 是散射效率因子 Q_s 和吸收效率因子 Q_a 的和，如 (26) 式所示。圖 4 表示 $m = 1.33 - 0.098i$ 時 Q_e ， Q_s 和 Q_a 隨 x 的變化。在這情況下，當 $x \rightarrow \infty$ 時， Q_s 和 Q_a 都趨近於 1。

在這裡我們再說明一下雷氏(Rayleigh)散射理論的適用範圍。雷氏理論的散射效率因子為

$$\frac{s_s}{Npa^2} = \frac{8}{3N} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 x^4 \quad (33)$$

其中 N 表示單位體積內的分子數。(33)式表明，雷氏散射的效率因子成正比於尺寸參數的四次方。圖 5 顯示折射指數 $m = 1.33$ 時米氏理論和雷氏理論兩者的散射效率因子隨 x 變化的情形。由圖中可知， $x > 1$ 時兩者之間有顯著的差異。此外，我們也可了解，對 $x < 0.6$ ，即 $a/\lambda < 0.1$ 的粒子來說，雷氏的理論是適用的。

1.2 散射相矩陣

本節中將討論散射相矩陣 (phase matrix)。入射波遇到介質時可能引起散射，反射和折射，因而導致散射波偏振狀態的改變。假設散射過程沒

有非線性效應，則散射波的平行和垂直分量可表示為(van de Hulst, 1957)

$$E_l = A_2 E_{l0} + A_3 E_{r0} \quad (1a)$$

$$E_r = A_4 E_{l0} + A_1 E_{r0} \quad (1b)$$

其中 $A_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 在一般情況下都是複數，它們取決於散射粒子的介電特性，形狀和大小等物理特性，以及入射波長和觀測點的位置。

在球形粒子或分子的情況下， $A_3 = A_4 = 0$ ，因此(1)式變為

$$E_l = A_2 E_{l0} \quad (2a)$$

$$E_r = A_1 E_{r0} \quad (2b)$$

表徵電磁波偏振狀態的 Stokes 參數的定義為 (Chandrasekhar, 1950; Kyle, 1991; Liou, 1980; Lenoble, 1993; van de Hulst, 1957)

$$I = E_l E_l^* + E_r E_r^* \quad (3a)$$

$$Q = E_l E_l^* - E_r E_r^* \quad (3b)$$

$$U = E_l E_r^* + E_r E_l^* \quad (3c)$$

$$V = i(E_l E_r^* - E_r E_l^*) \quad (3d)$$

將(2)式代入(3)式，得到散射波和入射波 Stokes 參數之間的關係如下：

$$\begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} I_0 \\ Q_0 \\ U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中變換矩陣 (transformation matrix) \mathbf{F} 由下式給出 (van de Hulst, 1957) :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 \\ F_{12} & F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} & -F_{34} \\ 0 & 0 & F_{34} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

在這裡

$$F_{11} = (1/2)(A_2 A_2^* + A_1 A_1^*) \quad (6a)$$

$$F_{12} = (1/2)(A_2 A_2^* - A_1 A_1^*) \quad (6b)$$

$$F_{33} = (1/2)(A_2 A_1^* + A_1 A_2^*) = \text{Re}[A_2 A_1^*] \quad (6c)$$

$$F_{34} = (i/2)(A_2 A_1^* - A_1 A_2^*) = -\text{Im}[A_2 A_1^*] \quad (6d)$$

仍然假設入射光的電場在 x 方向振動，則其平行和垂直分量 E_{l0} 和 E_{r0} 可用下式表示：

$$E_{l0} = E_0 e^{-ikz} \cos \mathbf{f}, \quad E_{r0} = E_0 e^{-ikz} \sin \mathbf{f} \quad (7)$$

上式就是 1.1 節(16)式。必須記得， $k = 2\mathbf{p} / \mathbf{l}$ ， \mathbf{l} 為波長。相應的 Stokes 參數為

$$I_0 = E_{l0} E_{l0}^* + E_{r0} E_{r0}^* = |E_0|^2 \quad (8a)$$

$$Q_0 = E_{l0} E_{l0}^* - E_{r0} E_{r0}^* = I_0 (\cos^2 \mathbf{f} - \sin^2 \mathbf{f}) \quad (8b)$$

$$U_0 = E_{l0} E_{r0}^* + E_{r0} E_{l0}^* = I_0 \sin 2\mathbf{f} \quad (8c)$$

$$V_0 = i(E_{l0} E_{r0}^* - E_{r0} E_{l0}^*) = 0 \quad (8d)$$

由此可見，入射光並不是自然光，而是線偏振光 (linearly polarized light)，這是因為 $V_0 = 0$ ，而且 $I_0^2 = Q_0^2 + U_0^2 + V_0^2$ (Chandrasekhar, 1950; Liou, 1980)。

假設入射光是自然光。由於自然光（強度 I_0 ）可以分解為兩個互相獨立，電場振動方向彼此正交的線偏振光（強度都是 $I_0/2$ ），因此有兩個方法可以處理這個問題：

(1) 考慮方位角 f 和 $f - 90^\circ$ 這個情況，前者電場在 x 方向振盪，後者電場在 y 方向振盪。在(8)式中將 f 改為 $f - 90^\circ$ (或 $f + 270^\circ$)，有

$$I_0 = |E_0|^2 \quad (9a)$$

$$Q_0 = I_0(\sin^2 f - \cos^2 f) \quad (9b)$$

$$U_0 = -I_0 \sin 2f \quad (9c)$$

$$V_0 = 0 \quad (9d)$$

然後將(8)和(9)式兩兩相加，並將 I_0 改為 $I_0/2$ ，得到

$$I_0 = |E_0|^2, \quad Q_0 = 0, \quad U_0 = 0, \quad V_0 = 0 \quad (10)$$

因此，這的確是自然光。

(2) 考慮 $f = 0^\circ$ 和 90° 這兩種情況。前者電場在 l 方向振盪，即平行偏振光；後者電場在 r 方向振盪，即垂直偏振光。在(8)式中分別令 $f = 0^\circ$ 和 $f = 90^\circ$ ，有

$$I_{l0} = |E_{l0}|^2, \quad I_{r0} = |E_{r0}|^2 \quad (11a)$$

$$Q_{l0} = I_{l0}, \quad Q_{r0} = -I_{r0} \quad (11b)$$

$$U_{l0} = 0, \quad U_{r0} = 0 \quad (11c)$$

$$V_{l0} = 0, \quad V_{r0} = 0 \quad (11d)$$

將(11)式中各個式子兩兩相加，並令 $I_{l0} = I_{r0} = I_0/2$ ，也得到(10)式。因此，用這兩個方法得到的確實是自然光。

做為例子，首先考慮線偏振光的雷氏散射。散射光的平行和垂直電場 E_l 和 E_r 可用入射電場 E_{l0} 和 E_{r0} 來表示 (Liou, 1980):

$$E_r = -E_{r0} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \mathbf{a} \quad (12a)$$

$$E_l = -E_{l0} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \mathbf{a} \cos \mathbf{q} \quad (12b)$$

其中 \mathbf{a} 為極化率 (polarizability), c 為光速。將(12)式和(2)式互相比較, 得到 A_1 和 A_2 的表達式為

$$A_1 = -\frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \mathbf{a} \quad (13a)$$

$$A_2 = -\frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \mathbf{a} \cos \mathbf{q} \quad (13b)$$

代入(6)式可得到變換矩陣的 4 個非零元素 (Kyle, 1991):

$$F_{11} = g(1 + \cos^2 \mathbf{q}) \quad (14a)$$

$$F_{12} = g(-1 + \cos^2 \mathbf{q}) \quad (14b)$$

$$F_{33} = 2g \cos \mathbf{q} \quad (14c)$$

$$F_{34} = 0 \quad (14d)$$

其中 $g = k^4 \mathbf{a}^2 / 2r^2$ 。於是由(4), (5)和(8)式得到散射光的 Stokes 參數表達式如下:

$$I = 2gI_0(\sin^2 \mathbf{f} + \cos^2 \mathbf{f} \cos^2 \mathbf{q}) \quad (15a)$$

$$Q = 2gI_0(-\sin^2 \mathbf{f} + \cos^2 \mathbf{f} \cos^2 \mathbf{q}) \quad (15b)$$

$$U = 2gI_0 \sin 2f \cos q \quad (15c)$$

$$V = 0 \quad (15d)$$

由上式可知，對於線偏振入射光來說，散射光也是線偏振的。

接著我們考慮自然光的雷氏散射。由於自然光(強度 I)可以分解為兩個互相獨立，電場振動方向彼此正交的線偏振光 (強度都是 $I/2$)，因此只要在(7)式以後的式子中將 f 改為 $f - 90^\circ$ 就得到電場在 y 方向振動的線偏振光受到散射的結果：

$$I = 2gI_0(\cos^2 f + \sin^2 f \cos^2 q) \quad (16a)$$

$$Q = 2gI_0(-\cos^2 f + \sin^2 f \cos^2 q) \quad (16b)$$

$$U = -2gI_0 \sin 2f \cos q \quad (16c)$$

$$V = 0 \quad (16d)$$

將(15)和(16)式兩兩相加，並將 I_0 改用 $I_0/2$ 取代，我們得到散射光的 Stokes 參數如下：

$$I = 2gI_0(1 + \cos^2 q) \quad (17a)$$

$$Q = 2gI_0(-1 + \cos^2 q) \quad (17b)$$

$$U = 0 \quad (17c)$$

$$V = 0 \quad (17d)$$

必須特別指出，(15)，(16)和(17)式中的 I_0 意義並不一樣，在(15)式和(16)式中 I_0 分別是電場在 x 和 y 方向振動的線偏振入射光的強度，而(17)式中 I_0 表示入射自然光的強度。由(17)式可以看出，入射自然光被散射後會變為偏振光，其偏振度 (degree of polarization) 為

$$P = \frac{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}}{I} = \frac{1 - \cos^2 \mathbf{q}}{1 + \cos^2 \mathbf{q}} \quad (18)$$

(18)式也表明，在正前方 ($\mathbf{q} = 0^\circ$) 和正後方 ($\mathbf{q} = 180^\circ$), 散射光仍為自然光，即非偏振光 (unpolarized light); 在散射角 90° 處，散射光變為完全偏振光 (completely polarized); 在其他方向則變為部分偏振光 (partially polarized).

其次我們考慮米氏散射. 根據 1.1 節(1)式, 有

$$E_l = S_2(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} E_{l0} \quad (19a)$$

$$E_r = S_1(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} E_{r0} \quad (19b)$$

比較(19)式和(2)式, 我們發現在這情況下

$$A_1 = S_1(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \quad (20a)$$

$$A_2 = S_2(\mathbf{q}) \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \quad (20b)$$

於是變換矩陣的 4 個非零元素為

$$F_{11} = h(i_1 + i_2) \quad (21a)$$

$$F_{12} = h(i_2 - i_1) \quad (21b)$$

$$F_{33} = h(i_3 + i_4) \quad (21c)$$

$$F_{34} = ih(i_3 - i_4) \quad (21d)$$

其中 $h = 1/2k^2r^2$, i_1 和 i_2 仍然是 1.1 節(20)式中定義的強度函數 (intensity

function), 而 i_3 和 i_4 為

$$i_3 = S_2 S_1^*, \quad i_4 = S_1 S_2^* \quad (22)$$

對於沿 x 方向的振動的線偏振入射光來說, Stokes 參數仍為(8)式. 於是散射波的 Stokes 參數可寫為

$$I = 2hI_0(i_1 \sin^2 \mathbf{f} + i_2 \cos^2 \mathbf{f}) \quad (23a)$$

$$Q = 2hI_0(i_2 \cos^2 \mathbf{f} - i_1 \sin^2 \mathbf{f}) \quad (23b)$$

$$U = hI_0(i_3 + i_4) \sin 2\mathbf{f} \quad (23c)$$

$$V = ihI_0(i_3 - i_4) \sin 2\mathbf{f} \quad (23d)$$

由此可見, 對於線偏振入射光來說, 散射光變為部分偏振光.

最後我們討論自然光的米氏散射. (23)式中分別令 $\mathbf{f} = 0^\circ$ 和 90° , 有

$$I_l = 2hI_0 i_2, \quad I_r = 2hI_{r0} i_1 \quad (24a)$$

$$Q_l = 2hI_0 i_2, \quad Q_r = -2hI_{r0} i_1 \quad (24b)$$

$$U_l = 0, \quad U_r = 0 \quad (24c)$$

$$V_l = 0, \quad V_r = 0 \quad (24d)$$

因此, 對於入射自然光來說, 散射光的 Stokes 參數為

$$I = hI_0(i_1 + i_2) \quad (25a)$$

$$Q = hI_0(i_2 - i_1) \quad (25b)$$

$$U = 0 \quad (25c)$$

$$V = 0 \quad (25d)$$

由上式可知, 當入射光為自然光時, 散射光變為部分偏振光, 但前向散射

光仍為非偏振光，這是因為 $S_1(0) = S_2(0)$ ，從而 $i_1(0) = i_2(0)$ 。

(25)式所示的結果，也可用另一個方法得到。在(23)式中將 \mathbf{f} 改為 $\mathbf{f} - 90^\circ$ ，有

$$I = 2hI_0(i_1 \cos^2 \mathbf{f} + i_2 \sin^2 \mathbf{f}) \quad (26a)$$

$$Q = 2hI_0(i_2 \sin^2 \mathbf{f} - i_1 \cos^2 \mathbf{f}) \quad (26b)$$

$$U = -hI_0(i_3 + i_4) \sin 2\mathbf{f} \quad (26c)$$

$$V = -ihI_0(i_3 - i_4) \sin 2\mathbf{f} \quad (26d)$$

將(23)和(26)式兩兩相加，並將 I_0 用 $I_0 / 2$ 取代，我們也得到(25)式。

我們可以定義另一個矩陣 $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ ，稱為相矩陣 (phase matrix)，如下式所示：

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = C\mathbf{P}(\mathbf{q}) \quad (27)$$

其中 \mathbf{P} 的第 (1, 1) 個元素 $P_{11}(\mathbf{q})$ 必須滿足下面的標準化條件：

$$\frac{1}{4p} \int_0^{2p} \int_0^p P_{11}(\mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} d\mathbf{f} = 1 \quad (28)$$

由(27)和(28)式有

$$C = \frac{1}{2} \int_0^p F_{11}(\mathbf{q}) \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (29)$$

不論對雷氏散射和米氏散射來說，

$$C = \frac{\mathbf{s}_s}{4p r^2} \quad (30)$$

其中 \mathbf{s}_s 是散射截面。將(14a)式和(21a)式所示的 F_{11} 代入(29)式，我們分別得到雷氏和米氏散射的散射截面為

$$\mathbf{s}_s = \frac{8\mathbf{p}}{3} k^4 \mathbf{a}^2 \quad (31a)$$

$$\mathbf{s}_s = \frac{\mathbf{p}}{k^2} \int_0^P [i_1(\mathbf{q}) + i_2(\mathbf{q})] \sin \mathbf{q} d\mathbf{q} \quad (31b)$$

(31b)式就是 1.1 節(22)式.

因此, 對自然光的雷氏散射來說, 有 (Lenoble, 1993)

$$\frac{P_{11}}{4\mathbf{p}} = \frac{3}{16\mathbf{p}} (1 + \cos^2 \mathbf{q}) \quad (32a)$$

$$\frac{P_{12}}{4\mathbf{p}} = \frac{3}{16\mathbf{p}} (-1 + \cos^2 \mathbf{q}) \quad (32b)$$

$$\frac{P_{33}}{4\mathbf{p}} = \frac{3}{8\mathbf{p}} \cos \mathbf{q} \quad (32c)$$

$$\frac{P_{34}}{4\mathbf{p}} = 0 \quad (32d)$$

對自然光的米氏散射來說, 我們發現 (Liou, 1980; Lenoble, 1993)

$$\frac{P_{11}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \mathbf{s}_s} (i_1 + i_2) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{P_1}{4\mathbf{p}} + \frac{P_2}{4\mathbf{p}} \right) \quad (33a)$$

$$\frac{P_{12}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \mathbf{s}_s} (i_2 - i_1) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{4\mathbf{p}} - \frac{P_1}{4\mathbf{p}} \right) \quad (33b)$$

$$\frac{P_{33}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \mathbf{s}_s} (i_3 + i_4) \quad (33c)$$

$$\frac{P_{34}}{4\mathbf{p}} = \frac{i}{2k^2 \mathbf{s}_s} (i_3 - i_4) \quad (33d)$$

因此, 對一個均勻且各向同性的圓球來說, 散射矩陣為

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & -P_{34} \\ 0 & 0 & P_{34} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

一般說來，假如沒對散射粒子的形狀和位置做若干假設，則相矩陣共有 16 個獨立的元素。對於一個均勻且各向同性的圓球來說，顯然的只有 4 個獨立的元素。至於隨機取向的 (randomly oriented) 冰晶質點，它的相矩陣有 6 個元素是互相獨立的。相矩陣的元素一般稱為相函數(phase function)。

假如入射光是自然光，則由上面的討論可知，相函數只依賴於散射角 q 。假如入射光是線偏振光，則相函數可能又是方位角 f 的函數，其表達式不難導出來。

當折射指數的實部為 1.5，尺寸參數為 60 時 P_1 和 P_2 的圖形如圖 6(a) 所示。米氏粒子的相函數具有強烈的前向散射，而且後向散射也是很明顯的。散射圖形中含有由干涉效應產生的快速振盪，隨尺寸參數而不同。顯然的，米氏散射和雷氏散射的行為有極大的差異。圖 6(b) 表示 P_{33} 和 P_{34} 的圖形隨散射角的變化。 P_{33} 具有相似於 P_1 和 P_2 的行為，但 P_{34} 有負值，這是由 S_1 和 S_2 的交叉分量的差所引起的。由於振幅函數在前向散射的情況下兩個相等，即 $S_1(0) = S_2(0)$ ，因此 $P_1(0) = P_2(0)$ 。當入射光為自然光時，前向散射光也是非偏振的，最大偏振度大約出現在 90° 到 120° 之間。

對於非球形粒子來說，(1) 式的 A_j 中有的不一定等於零。使用 Stokes 參數的定義(3)式，可以決定出相應的變換矩陣如下 (van de Hulst, 1957):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & S_{23} + S_{41} & -D_{23} - D_{41} \\ N_3 & N_4 & S_{23} - S_{41} & -D_{23} + D_{41} \\ S_{24} + S_{31} & S_{24} - S_{31} & S_{21} + S_{34} & -D_{21} + D_{34} \\ D_{24} + D_{31} & D_{24} - D_{31} & D_{21} + D_{34} & S_{21} - S_{34} \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中

$$N_1 = (1/2)(M_2 + M_3 + M_4 + M_1) \quad (36a)$$

$$N_2 = (1/2)(M_2 - M_3 + M_4 - M_1) \quad (36b)$$

$$N_3 = (1/2)(M_2 + M_3 - M_4 - M_1) \quad (36c)$$

$$N_4 = (1/2)(M_2 - M_3 - M_4 + M_1) \quad (36d)$$

$$M_j = A_j A_j^* = |A_j|^2 \quad (37a)$$

$$S_{kj} = S_{jk} = (1/2)(A_j A_k^* + A_k A_j^*) \quad (37b)$$

$$-D_{kj} = D_{jk} = (i/2)(A_j A_k^* - A_k A_j^*) \quad (37c)$$

假如使用下面的變換:

$$\begin{bmatrix} I_l \\ I_r \\ U \\ V \end{bmatrix} = \mathbf{F}' \begin{bmatrix} I_{l0} \\ I_{r0} \\ U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

則變換矩陣 \mathbf{F}' 有較簡單的形式:

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} M_2 & M_3 & S_{23} & -D_{23} \\ M_4 & M_1 & S_{41} & -D_{41} \\ 2S_{24} & 2S_{31} & S_{21} + S_{34} & -D_{21} + D_{34} \\ 2D_{24} & 2D_{31} & D_{21} + D_{34} & S_{21} - S_{34} \end{bmatrix} \quad (39)$$

(39)式中 \mathbf{F}' 的元素仍由(37)式給出.

對圓球形粒子或分子散射來說, $A_3 = A_4 = 0$, 因而變換矩陣只有 4 個獨立的元素, 關於這一點已在前面說明過了. 至於隨機取向的冰晶粒子,

則只有 6 個獨立的元素。當然，變換矩陣和相矩陣中獨立元素的個數是相同的。

1.3 粒子群的散射

上面所說的只是對一個粒子來說的散射特性。在實際大氣中，氣溶膠和雲滴並不是只含有一種尺寸的粒子，而是各種尺寸粒子的集合。因此，若要推定氣溶膠和雲滴的散射特性，必須把考察體積內所含有的各種不同尺寸粒子的貢獻加起來。現在令單位體積內半徑在 a 到 $a + da$ 間的粒子數目為 $n(a)da$ ，其中 $n(a)$ 稱為尺寸分布函數(size distribution)或粒徑分布。在這情況下，體積削弱係數(volume extinction coefficient) \mathbf{K}_I ，若用效率因子表示，可寫為

$$\mathbf{K}_I = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{p} a^2 Q_e(2\mathbf{p}a/I, m) n(a) da \quad (1)$$

也就是說，削弱係數是各粒子的削弱截面的總和。積分下限 a_1 和上限 a_2 是所有粒子的最小和最大半徑。一般說來，為方便起見可令 $a_1 = 0$ ， $a_2 = \infty$ 。同理，體積散射係數(volume scattering coefficient) \mathbf{h}_I 和體積吸收係數(volume absorption coefficient) \tilde{k}_I 可由下式給出：

$$\mathbf{h}_I = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{p} a^2 Q_s(2\mathbf{p}a/I, m) n(a) da \quad (2)$$

$$\tilde{k}_I = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{p} a^2 Q_a(2\mathbf{p}a/I, m) n(a) da \quad (3)$$

氣溶膠含量和尺寸分布不是常數，因天氣形勢或人為的污染源而在空間上時間上有很大的變動。雲滴的情形也一樣，隨雲的種類有很大的不

同。這些粒子的典型尺寸分布如圖7所示。圖中的C和M是氣溶膠的尺寸分布，而標註雲的曲線是雲滴的尺寸分布。氣溶膠在半徑 $0.1\mu\text{m}$ 附近數量最多，而雲滴在半徑 $4 \sim 5\mu\text{m}$ 處最多。平均說來，雲滴的尺寸大約大了一個數量級。模式C是大陸性氣團中觀測到的氣溶膠典型尺寸分布。這個分布的特徵是，在光學上相當重要的 $0.1\mu\text{m} < a < 10\mu\text{m}$ 的範圍內，尺寸分布函數成反比於半徑 a 的四次方，即

$$n(a) = Ca^{-4} \quad (4)$$

模式M是海洋上和海岸附近經常觀測到的氣溶膠尺寸分布。模式M中半徑大的粒子比模式C多。一般說來，模式C和模式M相重疊的分布最常被觀測到，但前者的粒子濃度較高，故較佔優勢。

將(4)式代入(1)式，令 $a_1 = 0$ ， $a_2 = \infty$ ，並改用尺寸參數 x 為積分變數，我們得到氣溶膠的體積削弱係數為

$$\tilde{K}_I = 2p^2 CI^{-1} \int_0^{\infty} Q_e(x, m)x^{-2} dx \quad (5)$$

這就是經常用到的 I^{-1} 定律。一般說來，

$$n(a) \propto a^{-(x+3)} \quad (6)$$

其中 x 為一常數，故

$$\tilde{K}_I \propto I^{-x} \quad (7)$$

(4)式是單位體積的量，整個氣柱也可用同樣的分布，即

$$n(z, a) = C(z)a^{-4} \quad (8)$$

因此整個垂直氣柱中的氣溶膠光程(aerosol optical thickness)為

$$t_1 = \int_0^{\infty} \tilde{K}_I dz = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} pa^2 Q_e(2pa/I, m)n(z, a) dz da$$

$$= 2\mathbf{p}^2 \mathbf{I}^{-1} \int_0^\infty C(z) dz \int_0^\infty Q_e(x, m) x^{-2} dx = \mathbf{b} \mathbf{I}^{-1} \quad (9)$$

上式中， \mathbf{I}^{-1} 的係數 \mathbf{b} 是單位波長的氣溶膠光程，其值成正比於整個氣柱內的氣溶膠含量，它是大氣混濁度的一種度量。從這個意義上說， \mathbf{b} 可稱為混濁係數(turbidity coefficient)。

相應於圖 7 中尺寸分布的體積削弱係數 \mathbf{K}_I 和單次散射反照率 $w = \tilde{h}_I / \mathbf{K}_I$ 兩者的計算值如表 1 所示，假定氣溶膠是和雲滴一樣小的水滴，並用水的折射指數。 m_r 和 m_i 分別為水折射指數的實部和虛部。由這表可知，模式 C 的削弱係數接近於上述 \mathbf{I}^{-1} 定律，可是模式 M 對波長的依賴性較小，至於雲就幾乎不依賴於波長了。

在 1.2 節中討論過的相矩陣 $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ 本身和粒子的半徑無關，故將該節(33)式整理一下，再進行粒徑積分，得到

$$\frac{P_{11}}{4\mathbf{p}} \int_0^\infty \mathbf{s}_s n(a) da = \frac{1}{2k^2} \int_0^\infty [i_1(a) + i_2(a)] n(a) da \quad (10)$$

由上式我們得到

$$\frac{P_{11}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \tilde{h}_I} \int_0^\infty [i_1(a) + i_2(a)] n(a) da \quad (11a)$$

同理，我們有

$$\frac{P_{12}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \tilde{h}_I} \int_0^\infty [i_2(a) - i_1(a)] n(a) da \quad (11b)$$

$$\frac{P_{33}}{4\mathbf{p}} = \frac{1}{2k^2 \tilde{h}_I} \int_0^\infty [i_3(a) + i_4(a)] n(a) da \quad (11c)$$

$$\frac{P_{34}}{4p} = \frac{i}{2k^2 \bar{h}_I} \int_0^\infty [i_3(a) - i_4(a)] n(a) da \quad (11d)$$

接著我們看粒子群的散射光角度分布. 對圖 7 所示的三個模式來說, 它們的相函數 $P_{11}/4p$ 如圖 8 所示. 這三張圖都是波長 $I = 0.45 \mu\text{m}$, $m = 1.34$ 的情況. 圖中的橫座標 q 是散射角, 實線是相函數 P_1 , 虛線是相函數 P_2 (見 1.2 節(33)式). 圖中箭頭表示散射光的線性偏振度 (degree of linear polarization) p 最大的位置, 而數值表示最大偏振度, 其中

$$p = \frac{Q}{I} = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \quad (12)$$

整體看來, 最主要的特徵是前方散射較強 ($q = 0^\circ$ 附近), 大粒子含量越多, 這種情形越顯著. 尤其是對雲滴來說 (圖 8(c)), 可以看出在前方很小的角度範圍內散射相當強, 這是由於大型粒子引起的繞射效應的表徵. 此外, 在圖 8(c) 中以 $q = 143^\circ$ 和 $q = 122^\circ$ 為中心也可以看到散射強度的極大值, 這些是虹的一種. 可是雲滴的尺寸還太小, 不會產生美麗的彩虹, 只出現白色的光環, 這稱為白虹 (white rainbow) 或霧虹 (fogbow). 雖然這樣, 不論繞射或是白虹, 當尺寸變大時可以看出幾何光學的特性慢慢出現.

1.4 米氏散射計算

米氏散射計算主要是指削弱效率因子 Q_e , 散射效率因子 Q_s , 以及散射矩陣 $\mathbf{P}(q)$ 等的計算, 當然效率因子也可用相應的截面取代. 若已知粒子的尺寸分布, 就可接著計算 (體積) 削弱係數 \bar{k}_I , 散射係數 \bar{h}_I , 以及相應的相矩陣 $\mathbf{P}(q)$.

上面提到的幾個函數的計算取決於米氏係數 a_n , b_n 和角度係數 p_n , t_n 的準確計算. a_n , b_n 是折射指數 m 和尺寸參數 x 的函數, p_n , t_n 只是

$m = \cos q$ 的函數。 p_n 和 t_n 的計算不會帶來困難，因為它們是由連帶 Legendre 函數和它們的導數定義的：

$$p_n(q) = \frac{1}{\sin q} P_n^1(\cos q) \quad (1a)$$

$$t_n(q) = \frac{d}{dq} P_n^1(\cos q) \quad (1b)$$

其中連帶 Legendre 函數 $P_n^m(\cos q)$ 和 Legendre 多項式 $P_n(\cos q)$ 有下面的關係：

$$P_n^m(m) = (1 - m^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(m)}{dm^m}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

(2)式中令 $m = 1$ ，我們得到

$$P_n^1(\cos q) = \sin q P_n'(m) \quad (3)$$

利用(3)式，(1)式可改寫為

$$p_n(m) = P_n'(m) \quad (4a)$$

$$t_n(m) = m p_n(m) - (1 - m^2) p_n'(m) \quad (4b)$$

其中斜撇表示關於宗量 (argument) 的導數。

Legendre 多項式的其中兩個遞推關係式 (recurrence relation) 為

$$(n + 1)P_{n+1}(m) - (2n + 1)mP_n(m) + nP_{n-1}(m) = 0, \quad n > 0 \quad (5a)$$

$$mP_n'(m) - P_{n-1}'(m) - nP_n(m) = 0, \quad n > 0 \quad (5b)$$

將(5a)式兩邊對 m 微分，並利用(4a)式，有

$$(n + 1)p_{n+1} - (2n + 1)mp_n + np_{n-1} - (2n + 1)P_n = 0 \quad (6)$$

另外，利用(4a)式，則(5b)式可改寫為

$$m p_n - p_{n-1} - n P_n = 0 \quad (7)$$

然後由(6)和(7)式消去 $P_n(m)$ ，我們就得到 $p_n(q)$ 的一個遞推關係式如下：

$$p_{n+1}(q) = \cos q \frac{2n+1}{n} p_n(q) - \frac{n+1}{n} p_{n-1}(q) \quad (8)$$

Legendre 多項式的另一個遞推關係式為

$$P'_{n+1}(m) - (2n+1)P_n(m) - P'_{n-1}(m) = 0 \quad (9)$$

將(9)式兩邊對 m 微分，再以(4)式代入，有

$$p'_{n+1} - (2n+1)p_n - p'_{n-1} = 0 \quad (10)$$

接著由(4b)式解出 $p'_n(m)$ ，再代入(10)式，我們得到了 $t_n(q)$ 的一個遞推關係式：

$$t_{n+1}(q) = \cos q [p_{n+1}(q) - p_{n-1}(q)] - (2n+1) \sin^2 q p_n(q) + t_{n-1}(q) \quad (11)$$

(8)和(11)式分別是 p_n 和 t_n 的遞推關係式。前面三個 p_n 和 t_n 值為

$$p_0(q) = 0, \quad p_1(q) = 1, \quad p_2(q) = 3 \cos q \quad (12a)$$

$$t_0(q) = 0, \quad t_1(q) = \cos q, \quad t_2(q) = 3 \cos 2q \quad (12b)$$

由(8)和(11)式連同初始值(12)式可很快地計算出角度係數 $p_n(q)$ 和 $t_n(q)$ 。

在這裏附帶一提，對前向 ($q = 0$) 和後向 ($q = p$) 散射來說，這些角度係數的值為

$$p_n(0) = t_n(0) = n(n+1)/2 \quad (13a)$$

$$-p_n(p) = t_n(p) = (-1)^n n(n+1)/2 \quad (13b)$$

另外還有一組計算角度係數的遞推關係式。由(6)式和(9)式消去 P_n ，

有

$$n\mathbf{p}_{n+1}(\mathbf{m}) = (2n+1)\mathbf{m}\mathbf{p}_n(\mathbf{m}) - (n+1)\mathbf{p}_{n-1}(\mathbf{m}) \quad (14)$$

這個式子可寫為下面的形式 (Wiscombe, 1979):

$$s = \mathbf{m}\mathbf{p}_n(\mathbf{m}) \quad (15a)$$

$$t = s - \mathbf{p}_{n-1}(\mathbf{m}) \quad (15b)$$

$$\mathbf{p}_{n+1}(\mathbf{m}) = s + [(n+1)/n]t \quad (15c)$$

這個形式只需要 2 次乘法和 2 次加法，因為數值因子 $(n+1)/n$ 可事先計算出來備用。

為了計算 \mathbf{t}_n ，先將下面 Legendre 多項式的另一個遞推關係式

$$(1-m^2)P'_n(m) = n[P_{n-1}(m) - mP_n(m)] \quad (16)$$

微分，並用(5b)式消去 $P_n(m)$ ，得到

$$(1-m^2)\mathbf{p}'_n - 2\mathbf{m}\mathbf{p}_n = (n+1)(\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{m}\mathbf{p}_n) \quad (17)$$

再由上式和(4b)式消去 \mathbf{p}'_n ，我們發現

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{m}) = (n+1)t - s = nt - \mathbf{p}_{n-1}(\mathbf{m}) \quad (18)$$

其中 t 和 s 已在(15)式中定義。(18)式只需 1 次乘法和 1 次加法。因此，總共只需 3 次乘法和 3 次加法就可計算出 \mathbf{p}_{n+1} 和 \mathbf{t}_n 。對這個方法來說，初始值仍然如(12a)式所示。

米氏係數 a_n 和 b_n 的表達式如下：

$$a_n = \frac{\mathbf{y}'_n(z)\mathbf{y}_n(x) - m\mathbf{y}_n(z)\mathbf{y}'_n(x)}{\mathbf{y}'_n(z)\mathbf{x}_n(x) - m\mathbf{y}_n(z)\mathbf{x}'_n(x)} \quad (19a)$$

$$b_n = \frac{m\mathbf{y}'_n(z)\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_n(z)\mathbf{y}'_n(x)}{m\mathbf{y}'_n(z)\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{y}_n(z)\mathbf{x}'_n(x)} \quad (19b)$$

其中 $z = mx$ 可能是複數，因為折射指數 m 的虛部可能不等於零，尺寸參數 x 則一定是實數。為了計算方便起見，我們先將(19)式改寫為

$$a_n = \frac{A_n(z)\mathbf{y}_n(x) - m\mathbf{y}'_n(x)}{A_n(z)\mathbf{x}_n(x) - m\mathbf{x}'_n(x)} \quad (20a)$$

$$b_n = \frac{mA_n(z)\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}'_n(x)}{mA_n(z)\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{x}'_n(x)} \quad (20b)$$

上式中為方便起見已令

$$A_n(z) \equiv \mathbf{y}'_n(z) / \mathbf{y}_n(z) \quad (21)$$

(20)式中的 Riccati-Bessel 函數 $\mathbf{y}_n(x)$ 和 $\mathbf{x}_n(x)$ 可用半整數階第一類 Bessel 函數表示：

$$\mathbf{y}_n(x) = \sqrt{\mathbf{p}x/2} J_{n+1/2}(x) \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(x) &= \sqrt{\mathbf{p}x/2} [J_{n+1/2}(x) - iN_{n+1/2}(x)] \\ &= \sqrt{\mathbf{p}x/2} [J_{n+1/2}(x) + (-1)^n iJ_{-n-1/2}(x)] \end{aligned} \quad (22b)$$

Bessel 函數具有下面的遞推關係式：

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad (23a)$$

$$(2n/x)J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad (23b)$$

(23)式對任何階數的 Bessel 函數都適用。將(22)式微分，並用(23)式，得到

$$\mathbf{y}'_n(x) = \sqrt{\mathbf{p}x/2} [J_{n-1/2}(x) - (n/x)J_{n+1/2}(x)] \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_n(x) &= \sqrt{\mathbf{p}x/2} [J_{n-1/2}(x) - (n/x)J_{n+1/2}(x)] \\ &\quad - (-1)^n i [J_{-n+1/2}(x) + (n/x)J_{-n-1/2}(x)] \end{aligned} \quad (24b)$$

然後再利用(22)式把半整數階 Bessel 函數用 $\mathbf{y}_n(x)$ 和 $\mathbf{x}_n(x)$ 代回去，我們有

$$\mathbf{y}'_n(x) = \mathbf{y}_{n-1}(x) - (n/x)\mathbf{y}_n(x) \quad (25a)$$

$$\mathbf{x}'_n(x) = \mathbf{x}_{n-1}(x) - (n/x)\mathbf{x}_n(x) \quad (25b)$$

最後將(25)式代回(20)式, 我們發現 (Dave, 1969; Deirmendjian, 1969)

$$a_n = \frac{[A_n(z)/m+n/x]\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x)}{[A_n(z)/m+n/x]\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{x}_{n-1}(x)} \quad (26a)$$

$$b_n = \frac{[mA_n(z) + n/x]\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x)}{[mA_n(z) + n/x]\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{x}_{n-1}(x)} \quad (26b)$$

我們還需要 $\mathbf{y}_n(x)$ 和 $\mathbf{x}_n(x)$ 的遞推關係式. 剛才已經說過, (23)式適用於任何階數的 Bessel 函數. 將(23b)式中 n 用 $(n+1/2)$ 取代, 然後兩邊乘以 $\sqrt{p x/2}$, 並用(22a)式, 我們有

$$\mathbf{y}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}\mathbf{y}_n(x) - \mathbf{y}_{n-1}(x) \quad (27a)$$

用類似的方法也可得到

$$\mathbf{x}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}\mathbf{x}_n(x) - \mathbf{x}_{n-1}(x) \quad (27b)$$

因此, Riccati-Bessel 函數 $\mathbf{y}_n(x)$ 和 $\mathbf{x}_n(x)$ 具有相同的遞推關係式, 它們的初始值為

$$\mathbf{y}_{-1}(x) = \cos x, \quad \mathbf{y}_0(x) = \sin x \quad (28a)$$

$$\mathbf{x}_{-1}(x) = e^{-ix}, \quad \mathbf{x}_0 = -ie^{ix} \quad (28b)$$

必須指出, 對實數 x 來說, $\mathbf{y}_n(x) = \text{Re}[\mathbf{x}_n(x)]$. (27)式連同(28)式是適合機器計算的形式.

現在只剩下計算 $A_n(z)$ 的表達式. 將(25a)式代入(21)式, 有

$$A_n = -\frac{n}{z} + \frac{y_{n-1}}{y_n} \quad (29)$$

這個式子可以變換成一個遞推關係式. 將(29)式中的 n 用 $(n-1)$ 取代, 然後使用(27a)式, 有

$$A_{n-1} = \frac{n}{z} - \frac{y_n}{y_{n-1}} \quad (30)$$

將上式代入(29)式, 我們得到了函數 $A_n(z)$ 的遞推關係式 (Deirmendjian, 1969; Dave, 1969):

$$A_n(z) = -\frac{n}{z} + \frac{1}{\frac{n}{z} - A_{n-1}(z)} \quad (31)$$

由(29)式我們注意到

$$A_0(z) = y_{-1}(z)/y_0(z) = \cot z \quad (32)$$

實際上我們並不需要用到 $A_0(z)$, 故可從 $A_1(z)$ 開始. 將(32)式代入(31)式, 得到 $A_1(z)$ 的表達式如下:

$$A_1(z) = -\frac{1}{z} + \frac{\tan z}{(1/z)\tan z - 1} \quad (33)$$

Dave (1969) 曾擔心兩個問題. 第一, 當 $z = kp$ (k 為非零整數) 時, 則 $A_0 = \cot z \rightarrow \infty$, 但實際上不需用到 A_0 , 而(33)式列出的 A_1 在 $z = kp$ 處不是病態的 (ill-conditioned). 第二, 假如 $\tan z$ 簡單地寫為 $\sin z/\cos z$, 則在分子和分母都有 e^y 這一項, 其中 y 為 z 的虛部. 這一項在 y 很大時會有溢位 (overflow) 的問題. 我們可將 $\tan z$ 寫為

$$\tan z = \tan(x + iy) = \frac{2e^{-2y} \sin 2x + i(1 - e^{-4y})}{2e^{-2y} \cos 2x + 1 + e^{-4y}} \quad (34)$$

來解決這個問題. 現在還存在一個問題就是, 當 z 是 $p/2$ 的奇數倍時, $\tan z$ 將會變得很大. 但由於在計算分母時有捨入(round-off)現象, 故這情況事實上不會發生. 由(31)式可以看出, 若 m 是實數 (無吸收的圓球), 則 $A_1(z)$ 和所有的 $A_n(z)$ 都是實數.

Kattawar and Plass (1967) 指出, 當 $\text{Im}(z)$ 很大時, (31)式所示的 A_n 的向上遞推(up-recurrence) 會帶來不穩定. 他們建議使用下面的向下遞推(down-recurrence) 關係式:

$$A_{n-1}(z) = \frac{n}{z} - \frac{1}{\frac{n}{z} + A_n(z)}, \quad n = N', \dots, N, \dots, 2 \quad (35)$$

(35)式可直接由(31)式推導出來. 上式中 N 表示米氏級數的項數. Kattawar and Plass (1967), Dave (1969) 以及後來其他人都用下面的初始值:

$$A_{N'}(z) = 0 \quad (36)$$

其中 N' 必須選為遠大於 $|z|$. Dave (1969) 發現, 令

$$N' = 1.1|z| + 1 \quad (37)$$

是充分的, 但這樣會算出遠比實際所需要的更多的項數, 即 N' 可能會遠大於 N , 從而進行了不少不必要的計算.

Wiscombe (1979) 指出, 最好把向下遞推的初始值 A_N 計算得夠準確, 大約要有五六位有效數字. 為此可以使用 Lentz (1976) 發展出來的方法. $A_N(z)$ 可用連分數 (continued fraction) 表示, 由(35)式不難證明,

$$A_N(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} [c_1, c_2, \dots, c_j] \quad (38)$$

(38)式右邊的中括弧項表示連分數:

$$[c_1, c_2, \dots, c_j] = c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{c_j + \dots}}} \quad (39)$$

其中

$$c_1 = (N+1)/z \quad (40a)$$

$$c_k = (-1)^{k+1} (2N+2k-1)/z, \quad k = 2, 3, \dots \quad (40b)$$

只要在(35)式中先令 $n = N+1$ ，然後一再使用(35)式，並用(40)式所示的定義，就可證明出(38)式。Lentz (1976) 發現了(38)式的乘積表示法，因而 $A_N(z)$ 可用遞推方式計算出來。這個乘積表示法是

$$[c_1, c_2, \dots, c_j] = \prod_{k=1}^j T_k \quad (41)$$

其中

$$T_k = N_k / D_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

$$N_1 = c_1; \quad N_k = [c_k, \dots, c_1], \quad k = 2, 3, \dots \quad (43a)$$

$$D_1 = 1; \quad D_k = [c_k, \dots, c_2], \quad k = 2, 3, \dots \quad (43b)$$

(41)式也很容易證明，只要令 $j = 2, 3, \dots$ ，然後看兩邊是否相等。(41)式相當適合於機器計算，因為它可改寫為遞推的形式：

$$[c_1, \dots, c_j] = [c_1, \dots, c_{j-1}] T_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (44)$$

還有， T_j 的分子和分母也可由 T_{j-1} 的分子和分母直接以遞推方式決定出來：

$$N_1 = c_1; \quad N_j = c_j + 1/N_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (45a)$$

$$D_1 = 1; \quad D_j = c_j + 1/D_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (45b)$$

(45a)和(45b)式可直接分別由 N_k 和 D_k 的定義(43a)和(43b)證明出來。

因為現在用(44)式計算(38)式左邊的連分數，故當 T_j 以某個準確度趨近於 1 時，這個連分數就可認為是收斂了。也就是說，當

$$|\operatorname{Re}[T_j] - 1| < e_2 \quad \text{且} \quad |\operatorname{Im}[T_j]| < e_2 \quad (46)$$

時，這個疊代就收斂了。 e_2 通常可選為 10^{-8} ，這樣就可得到具有五六位有效數字的 A_N 。

因此，在最順利的情況下， A_N 可按下面的步驟出來：

- (a) 已知 $z = mx$ ，選擇適當的級數項數 N ，此時 $j = 1$ 。
- (b) 按(40)式決定 c_j ，按(45)式決定 N_j ， D_j ，按(42)式決定 T_j 。
- (c) 若 T_j 滿足(46)式，這代表已經收斂了，可以不再繼續做下去。
- (d) 按(44)式決定 $[c_1, \dots, c_j]$ (當 $j = 1$ 時，這個連分數等於 c_1)。
- (e) 令 j 用 $j + 1$ 取代，回到步驟(b)。

按上述方法得到的連分數就是我們所要的初始值 A_N ，再按(35)式所示的向下遞推關係式，就可依次決定出 $A_{N-1}, A_{N-2}, \dots, A_1$ 。

最後我們說明一下米氏級數項數 N 的決定。Dave (1969) 建議，當 n 由 1 增加時，使米氏係數滿足下面條件

$$|a_n|^2 + |b_n|^2 < 10^{-14} \quad (47)$$

的第一個 n 值可當做米氏級數的項數 N 。Wiscombe (1979) 認為這個方法不理想，改用事先估計的方法決定 N 。他使用(47)式所示的判據決定了各種不同尺寸參數 ($0.1 < x < 20,000$) 和折射指數 ($1.05 < m_r < 2.50$; $0 < m_i < 1$) 下的 N 值，但在(47)式中以 5×10^{-14} 代替 10^{-14} 。表 2 表示測試得到的 N 的範圍隨 x 的變化。

不少人根據理論提出了下面 N 值的函數形式：

$$N = x + ax^{1/3} \quad (48)$$

下面的公式大致可以擬合表 2 的結果:

$$N_{\max} = \begin{cases} x + 4x^{1/2} + 1, & 0.02 \leq x \leq 8 \\ x + 4.05x^{1/3} + 2, & 8 \leq x \leq 4,200 \\ x + 4x^{1/2} + 2, & 4,200 \leq x \leq 20,000 \end{cases} \quad (49)$$

但(49)式使用的函數形式和(48)式並不一樣.

除了上面所說的以外, 米氏散射計算還有其他問題, 可參考 Wiscombe, 1979. 本節中引用的 Legendre 多項式和 Bessel 函數的遞推關係式, 可參考工程數學的書籍, 例如 Irving and Mullineux, 1959 或 Johnson and Johnson, 1965, 也可查閱數學函數表, 例如 Abramowitz and Stegun, 1965.

參考文獻

- 岸保勘三郎, 田中正之, 時岡達志, 1982: 大氣の大循環(日文). 大氣科學講座 4, 東京大學出版會, 東京, 256 頁.
- Abramowitz, M., and I. A. Stegun (eds.), 1965: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1046pp.
- Chandrasekhar, S., 1950: *Radiative Transfer*. Oxford University Press, Oxford, England, 393pp. Reprinted by Dover, New York, 1960.
- Dave, J. V., 1969: Scattering of electromagnetic radiation by a large, absorbing sphere. *IBM J. Res. Dev.*, **13**, No. 3, 302-313.
- Deirmendjian, D., 1964: Scattering and polarization properties of water clouds and hazes in the visible and near infrared. *Appl. Opt.*, **3**, 187-196
- Deirmendjian, D., 1969: *Electromagnetic Scattering on Spherical Poly-dispersions*. Elsevier, New York, 290pp.
- Irving, J., and N. Mullineux, 1959: *Mathematics in Physics and Engineering*. Academic Press, New York, 883pp.
- Johnson, D. E., and J. R. Johnson, 1965: *Mathematical Methods in Engineering and Physics: Special Functions and Boundary-Value Problem*. Ronald Press, New York, 273pp.
- Kattawar, G. W. and G. N. Plass, 1967: Electromagnetic scattering from absorbing spheres. *Appl. Opt.*, **6**, 1377-1382.
- Kerker, M., 1969: *The Scattering of Light and Other Electromagnetic Radiation*. Academic Press, New York, 666pp.
- Kyle, T. G., 1991: *Atmospheric Transmission, Emission and Scattering*. Pergamon, Oxford, England, 288pp.
- Lenoble, J., 1993: *Atmospheric Radiative Transfer*. A. Deepak Publishing, Hampton, Virginia, North America, 532pp.
- Lentz, W. J., 1976: Generating Bessel functions in Mie scattering calculation using continued fractions. *Appl. Opt.*, **15**, 668-671.
- Liou, K.-N., 1980: *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Academic Press,

New York, 392pp.

van de Hulst, H. C., 1957: *Light Scattering by Small Particles*. Wiley, New York, 470pp. Reprinted by Dover, New York, 1981.

Wiscombe, W. J., 1979: *Mie Scattering Calculations: Advances in Technique and Fast, Vector-Speed Computer Codes*. NCAR/TN-140+STR, NCAR Technical Note, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, North America, 62+29pp.

表 1 氣溶膠和雲滴的體積削弱係數 K_I 和單次散射反照率 $w = \bar{h}_I / K_I$
(岸保等人, 1982).

$I(\mu\text{m})$	m_r	m_i	模式 C		模式 M		雲 滴	
			$\bar{K}_I(\text{km}^{-1})$	w	$\bar{K}_I(\text{km}^{-1})$	w	$\bar{K}_I(\text{km}^{-1})$	w
0.45	1.34	0	0.1206	1.0	0.1056	1.0	16.33	1.0
0.70	1.33	0	0.0759	1.0	0.1055	1.0	16.72	1.0
1.61	1.315	0	0.0312	1.0	0.0691	1.0	17.58	1.0
2.25	1.29	0	0.0194	1.0	0.0424	1.0	18.21	1.0
3.07	1.525	0.0682	0.0289	0.620	0.0602	0.721	18.58	0.529
3.90	1.353	0.0059	0.0128	0.930	0.0236	0.948	20.65	0.914
5.30	1.315	0.0143	0.0075	0.800	0.0112	0.826	24.01	0.884
6.05	1.315	0.1370	0.0129	0.260	0.0189	0.297	19.86	0.543
8.15	1.29	0.0472	0.0050	0.385	0.0062	0.410	18.75	0.746
10.0	1.212	0.0601	0.0032	0.202	0.0045	0.178	11.18	0.601
11.5	1.111	0.1831	0.0064	0.051	0.0097	0.044	10.10	0.289
16.6	1.44	0.4000	0.0082	0.104	0.0134	0.075	16.97	0.395

表 2 米氏級數中項數的範圍 $[N_{\min}, N_{\max}]$ 隨尺寸參數的變化. 這個範圍是令 $m_r = 1.05 \sim 2.50, m_i = 0 \sim 1$ 而決定出來的 (Wiscombe, 1979).

x	$N_{\min} \sim N_{\max}$	x	$N_{\min} \sim N_{\max}$
0.1	2 3	3,000	3,052 3,058
0.3	3 3	6,000	6,068 6,074
1	5 5	8,000	8,076 8,080
3	8 9	10,000	10,081 10,087
10	18 20	12,000	12,086 12,092
33	44 47	14,000	14,090 14,097
100	117 120	16,000	16,087 16,101
333	357 362	18,000	18,094 18,105
1000	1,038 1,041	20,000	20,102 20,108

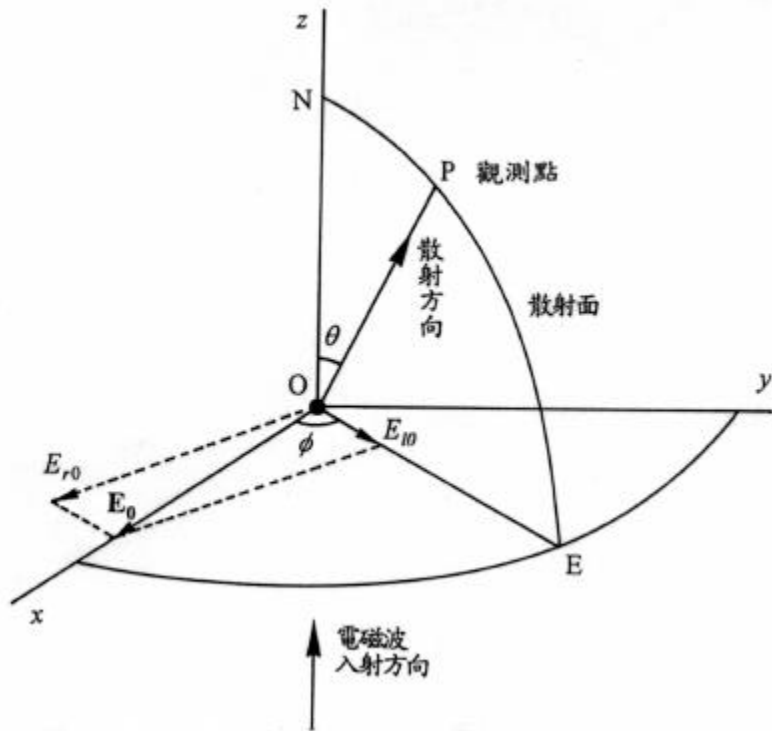


圖 1 散射的幾何圖形. 粒子位於原點 O , 入射光沿著 z 軸傳播, 電場在 x 方向振動. OP 為散射方向, q 為散射角, f 為方位角, $NPEO$ 所構成的平面為散射面, 這是一種參考平面. E_{r0} 和 E_{t0} 分別為垂直於和平行於參考平面的入射電場分量.

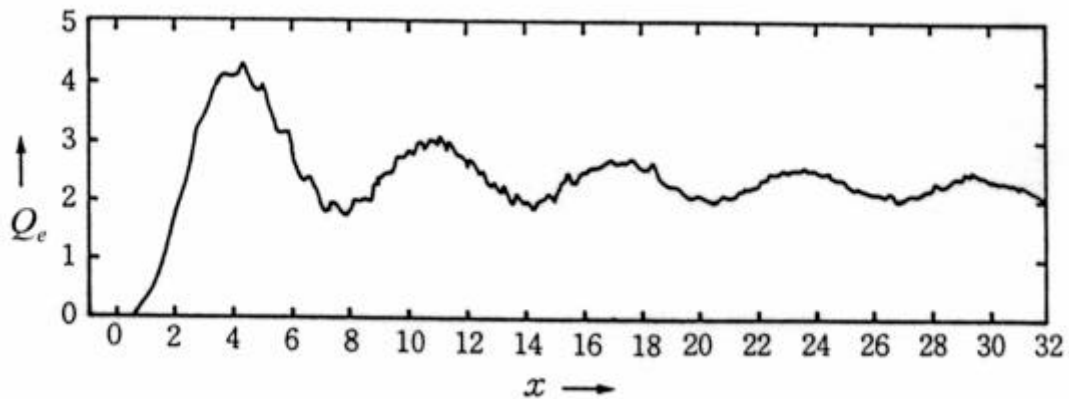


圖 2 米氏散射的削弱效率因子 Q_e ($m = 1.50$ 時) 隨尺寸參數 x 的變化.

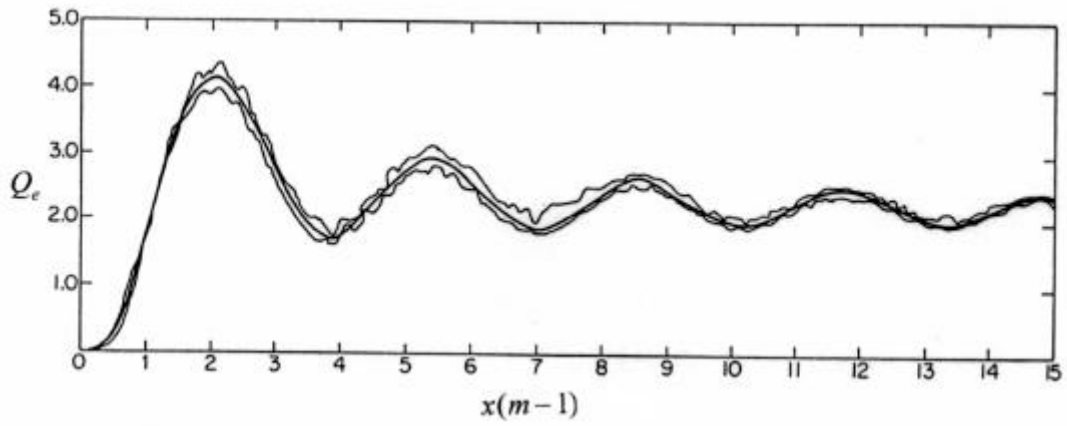


圖 3 米氏散射的削弱效率因子 Q_e 隨標準化尺寸參數 $r = 2x(m-1)$ 的變化。

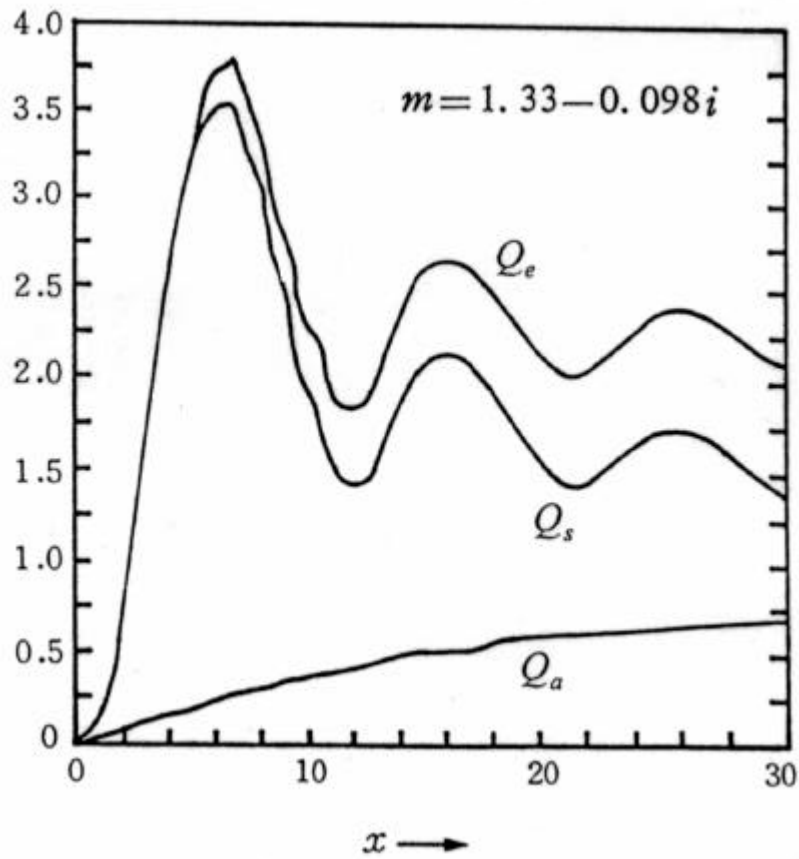


圖 4 折射指數 m 為複數時的米氏散射效率因子， Q_e 、 Q_a 和 Q_s 分別為削弱，吸收和散射效率因子， $Q_e = Q_a + Q_s$ 。

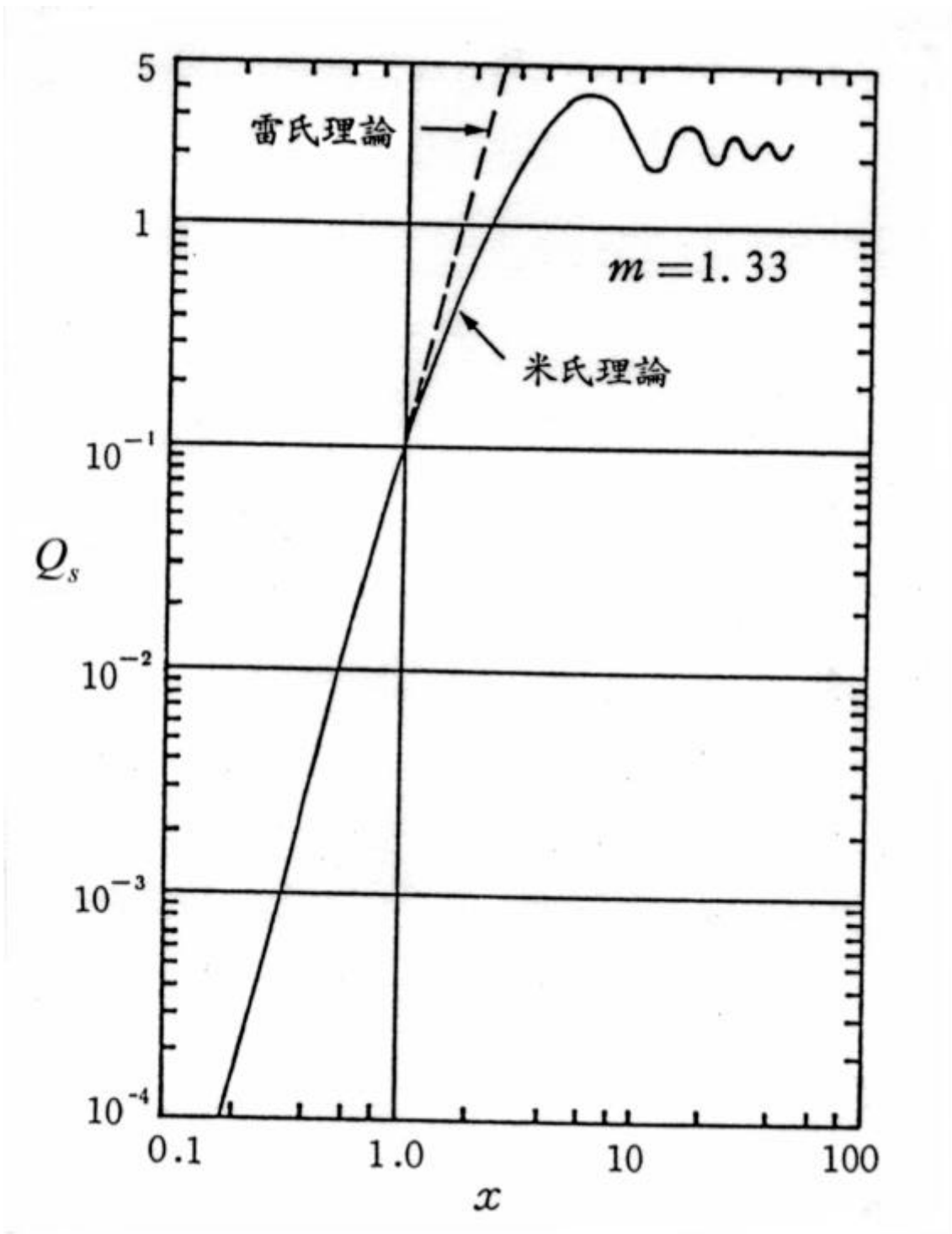


圖 5 折射指數 $m = 1.33$ 時米氏理論和雷氏理論的散射效率因子隨尺寸參數 x 的變化。

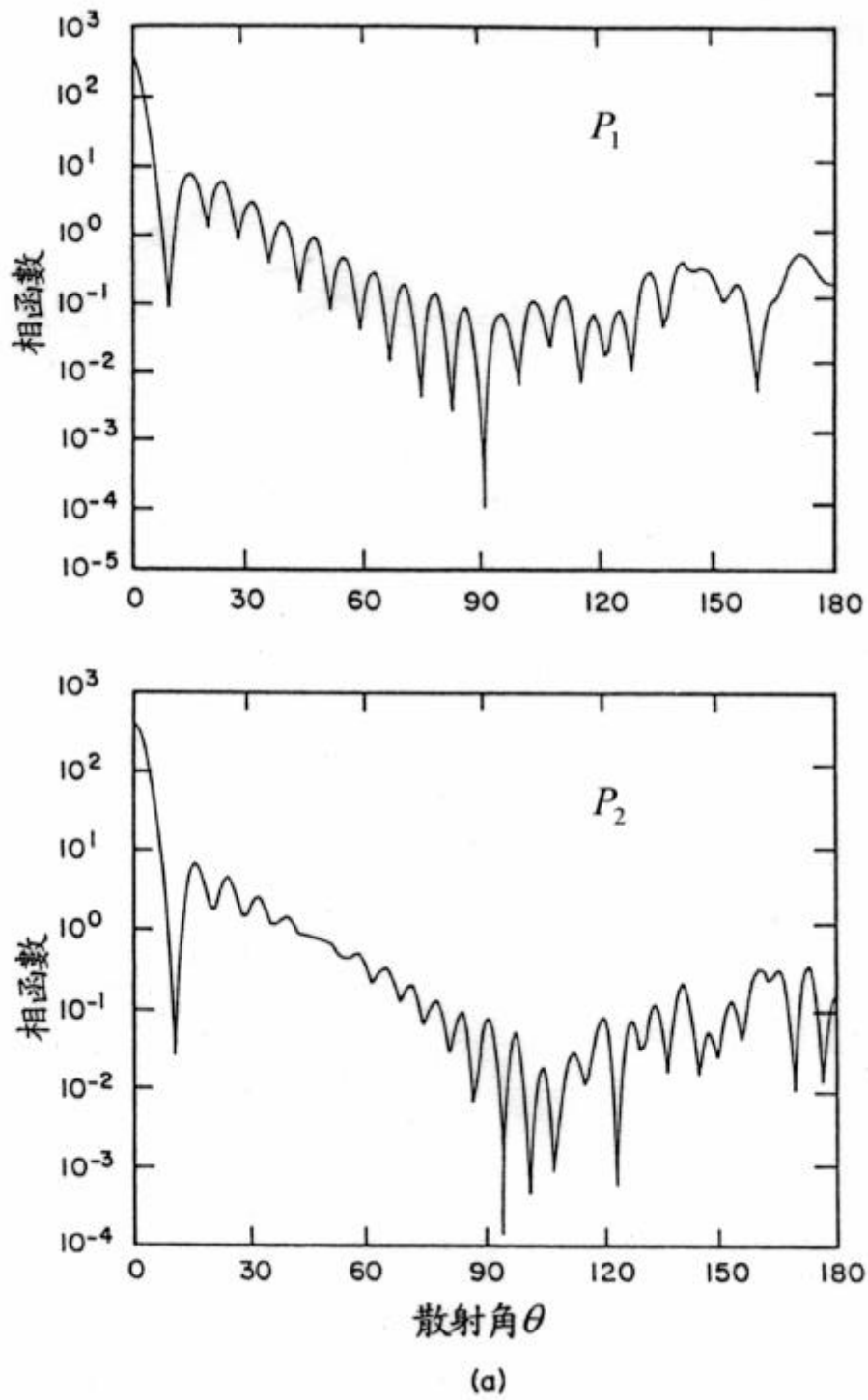


圖 6 當折射指數 $m = 1.5$ ，尺寸參數 $x = 60$ 時 4 個相函數隨散射角 q 的分布 (Liou, 1980).

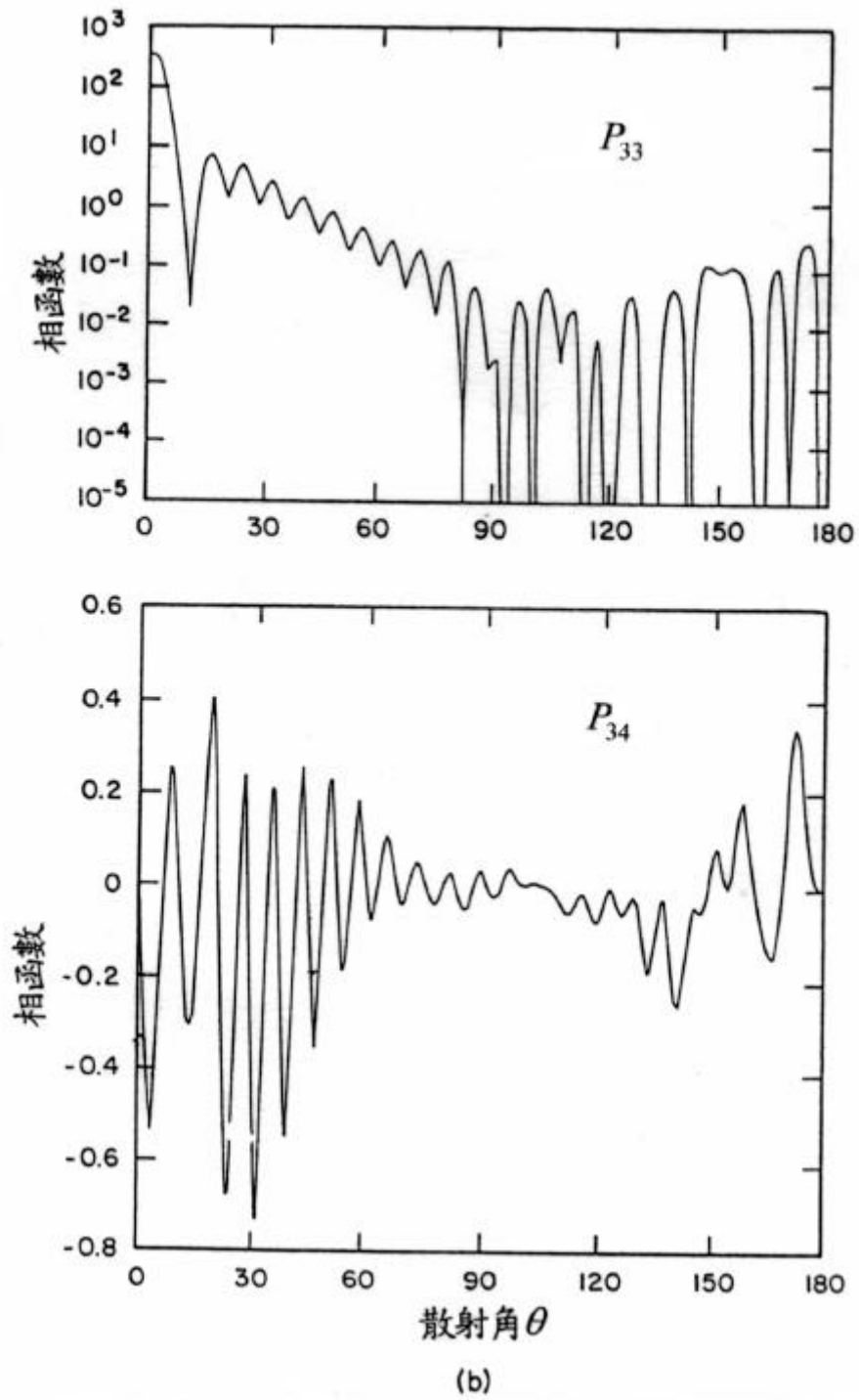


圖 6 續前.

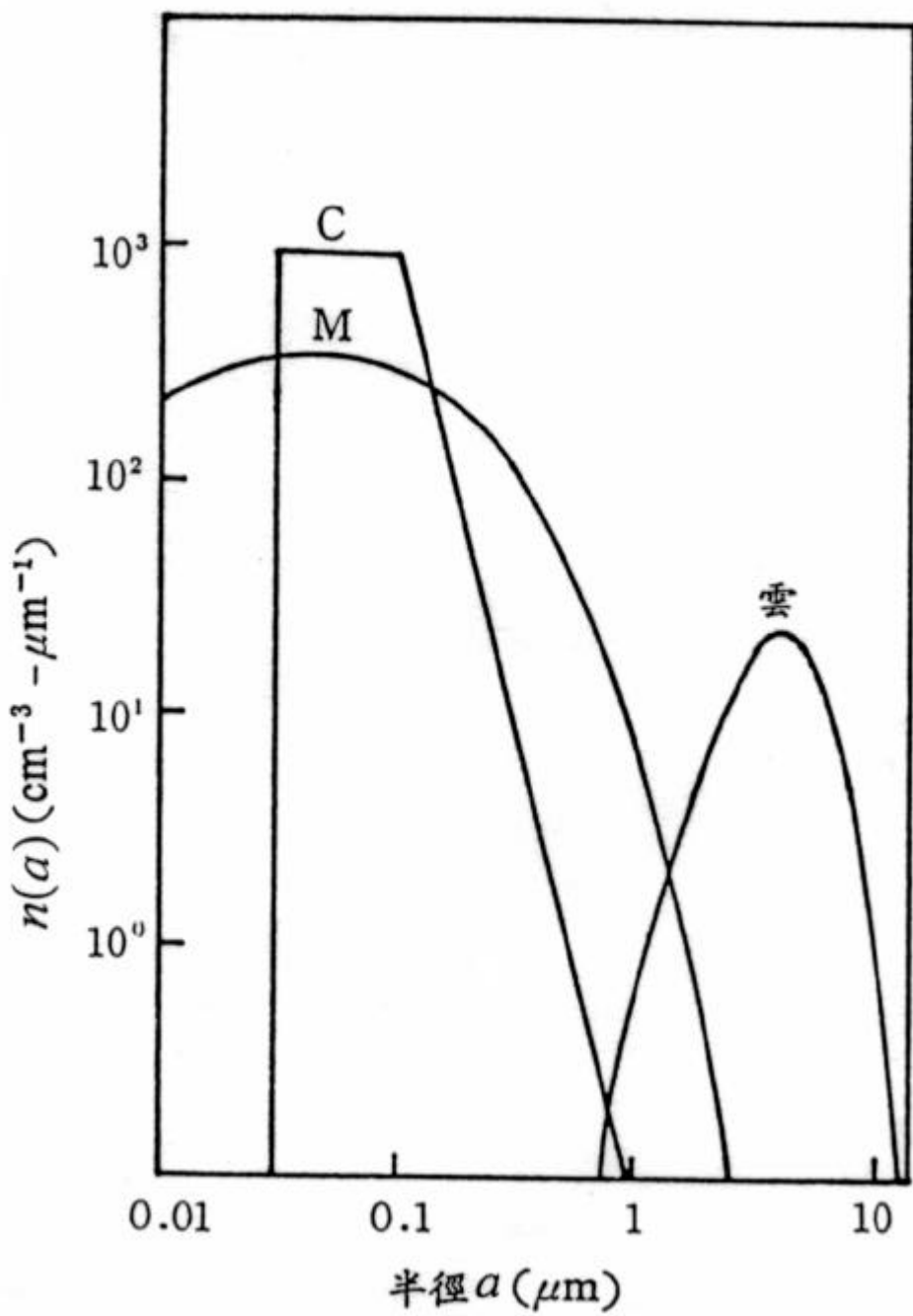


圖 7 氣溶膠和雲的典型尺寸分布，已標準化為 1cm^3 中有 100 個粒子 (Deirmendjian, 1964).

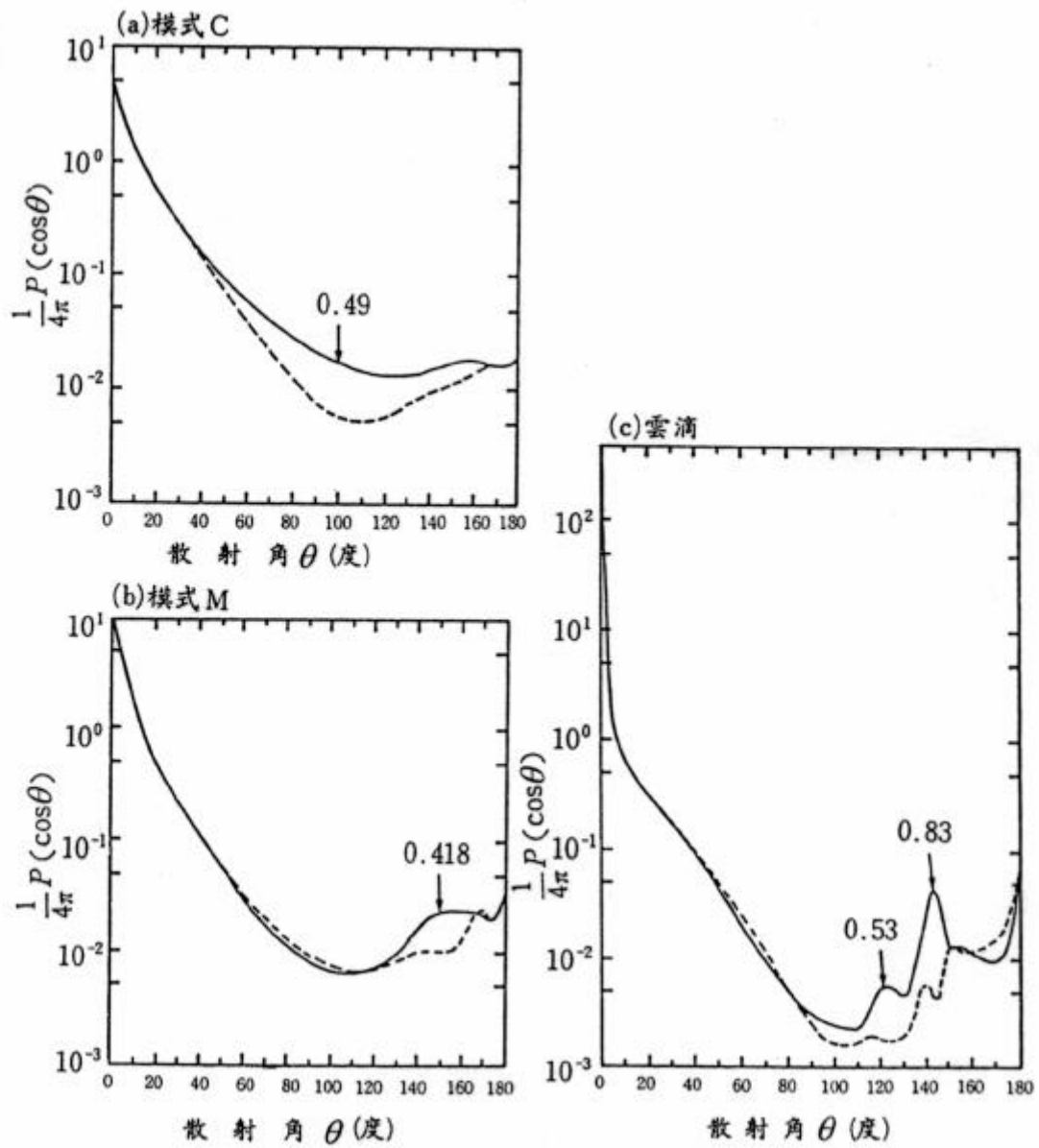


圖 8 氣溶膠和雲滴的散射相函數，見內文解釋。