

斷裂現象中之統計物理

梁鈞泰

中央研究院物理研究所

email:leungkt@phys.sinica.edu.tw

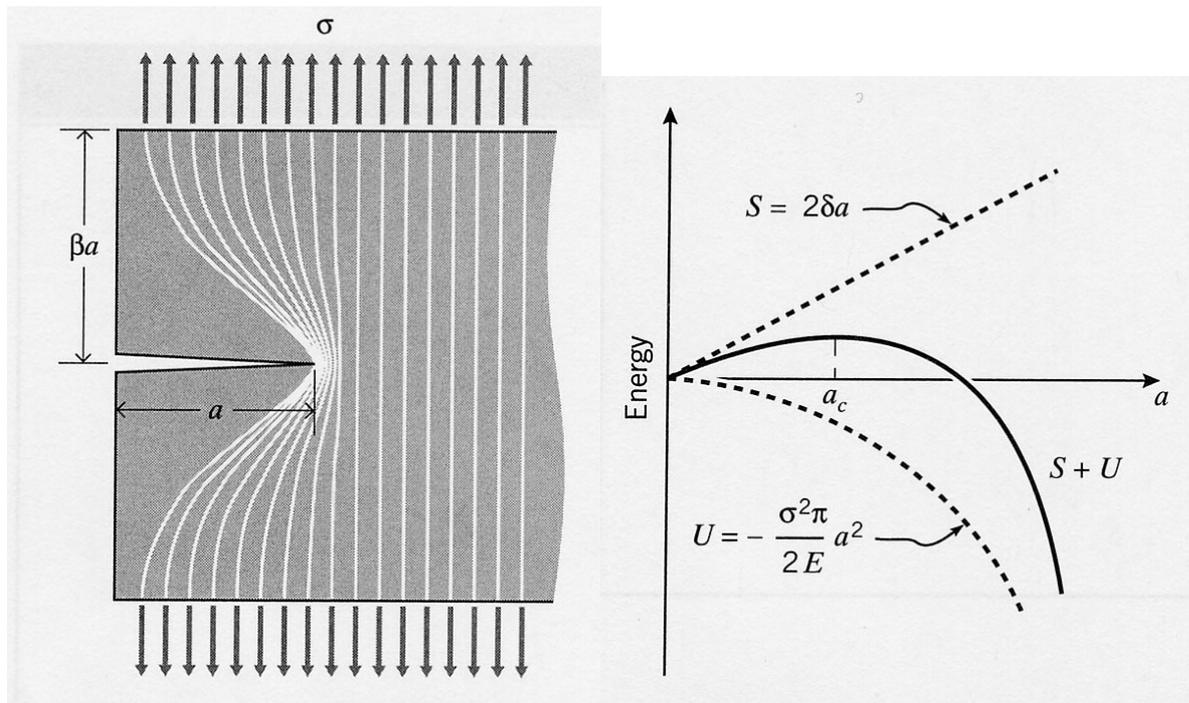
一、前言

在自然界中，材料的斷裂是一個十分普遍的現象。由於經常造成經濟上和生命的損失，故長久以來深受各界如材料工程、地質學家，以致建築師等的重視。另一方面，由於斷裂本身是一個複雜、非線性、非平衡的動態過程，有豐富的物理規律蘊藏其中，所以近幾年吸引了不少從事非線性及統計物理的研究工作者的關注^[1]。大家在日常生活中總有在周遭的環境中(如路面、牆壁、人造的器皿等)看見各式各樣的裂痕^[2]，也許曾對其形態、結構、大小的多樣化產生好奇。我們正是基於這種好奇心，始於幾年前以非線性物理的觀點，結合統計物理的方法，分別以解析法、數值模擬及簡單的實驗，針對材料的裂痕圖案之形成機制作了一系列的研究。本文將以其中的物理為焦點，簡略地介紹若干有關斷裂現象中的幾個問題。

二、裂隙的不隱定性

裂隙(crack)的延伸(propagation)促使物質斷裂(fracture)。裂隙的傳播受其鄰近的應力場(stress field)

支配，但應力場同時又被裂隙的存在所影響，因此兩者總是維持著某種互為因果的關係。我們考慮一塊中間被挖了一個橢圓形空洞，由均勻材料組成的薄板。若在板塊的上下沿外加拉伸應力(tensile stress) σ ，則可以證明應力的最大值將出現在橢圓長軸方向的邊沿，其值為 $\sigma_{\max} = \sigma(1 + 2\sqrt{a/\rho})$ ^[3]，其中 a 是長軸的長度， ρ 是該邊沿的曲率半徑。因此假使空洞的形狀變得細長，正如一般裂隙的形狀時(見圖一)， a/ρ 變得很大， σ_{\max} 即遠大於遠方的 σ 。倘若 σ_{\max} 超越材料的強度(strength)，該裂隙將延伸而最終造成板塊的斷裂。由此可見，既長且細的裂隙最「危險」。Griffith 遠在 1920 年代就發現並推論當裂隙超過一特徵長度時即變得不隱定^[4]。這是因為裂隙的延伸一方面以正比於 a 的方式損耗能量(S)，另一方面以正比於 a^2 的方式獲取材料中的彈性勢能(U)，所以 a 小時，能量損耗較重要，使得裂隙隱定而不增長；但當 a 超過臨界長度 a_c 時則獲取的能量大於損耗，裂隙變得不隱定(見圖二)。其中 $a_c \sim E\delta/\sigma^2$ (δ 是單位裂隙面積的能量損耗，即所謂「斷裂能」(fracture energy)； E 是楊氏模量)。



圖一、裂隙對受拉力 σ 作用的薄板上應力分佈的影響。

圖二、與裂隙延伸相關的能量平衡: S 為裂隙表面能, U 為彈性势能, a 是裂隙長度, a_c 是 a 的臨界值。

由於這種不穩定性, 在沒有其他損耗下, 勢能轉為動能, 使裂隙加速達到速度 v 。但裂隙不可能無限制地加速, 因為波動傳播的速度 u 是 v 的上限。人們經過很多年的努力, 在一般相信裂隙的延伸應遵守連續介質力學的前題下, 對最簡單的情況, 即對均勻、易脆(brittle)的材料獲得 v 的理論預測值, 大致上可簡化成 $v/u=1-a_c/a$ 。這結果看似簡單, 但實驗上要驗證卻十分困難。困難在於當裂隙加速到一定程度時, 線性延伸本身也變得不隱, 新的延伸模式相繼取而代之(如振蕩式的、分枝式的), 使得 v 難以定義和測量。十多年來的實驗工作總是測得小於 u 的 v 值(如 30~60%不等), 而這兩者持續的差異會令人懷疑連續介質力學應用在裂隙動態過程中的正確性^[5]。這個困境直到近年才有較明確的實驗

證據顯視理論是正確的^[6]。

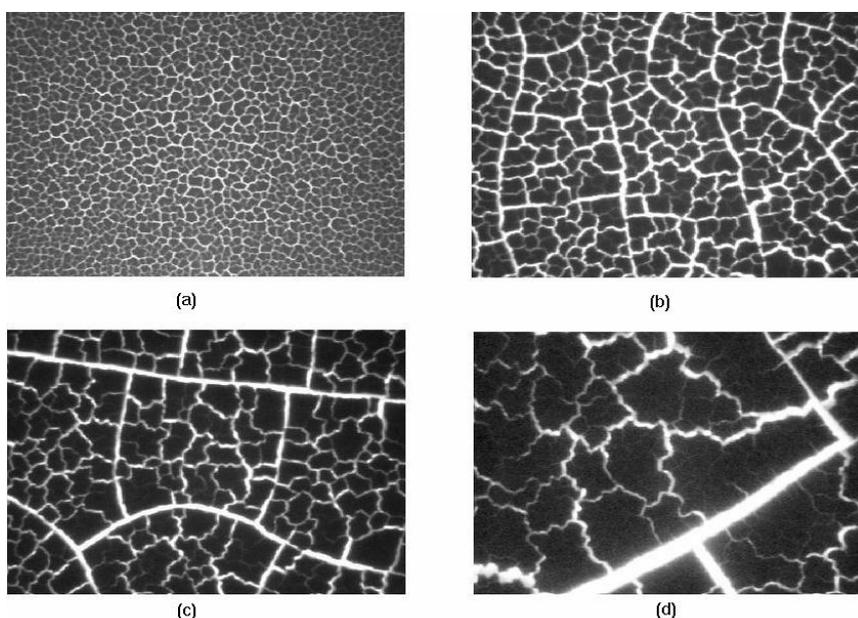
三、龜裂的圖型形成問題

以上談的是當裂隙在沒有外力妨礙下的動態行為, 適用於懸空(suspended)的樣品。但在自然界中, 產生裂隙的材料常與其他部份相連, 例如具多層的複合結構, 或與襯底(substrate)有摩擦力的耦合, 而大部份的龜裂現象即屬於此(見圖三)。因外力(如摩擦)在裂隙前進時會損耗能量, 以致裂隙的延伸速度 v 常遠小於 u ; 這時斷裂模式被稱為「靜準斷裂」(quasistatic fracture)。因為龜裂現象牽涉眾多裂隙間錯綜複雜的相互作用, 不像上述單一裂隙的動態過程單純, 所以難以嚴謹的理論來描述。雖然有一些材料科學家研究這類題目, 其焦點、動機和方法都

較偏向實用與現象的描述(phenomenological)^[7]。但近年開始也有一些物理學家以非線性動力學的觀點，結合統計物理的方法，從事靜準斷裂現象的研究^[1,8]。因為問題本質的相似，這類研究可歸類為「圖型形成」(pattern formation)研究的一種。廣義來說，圖型形成研究的目的是在於尋求在那些外在條件下呈現甚麼樣的型態與結構，並瞭解這些不同型態與結構間的相對隱定性及相變性質。對靜準斷裂問題(如

龜裂現象)而言，研究對象包括：

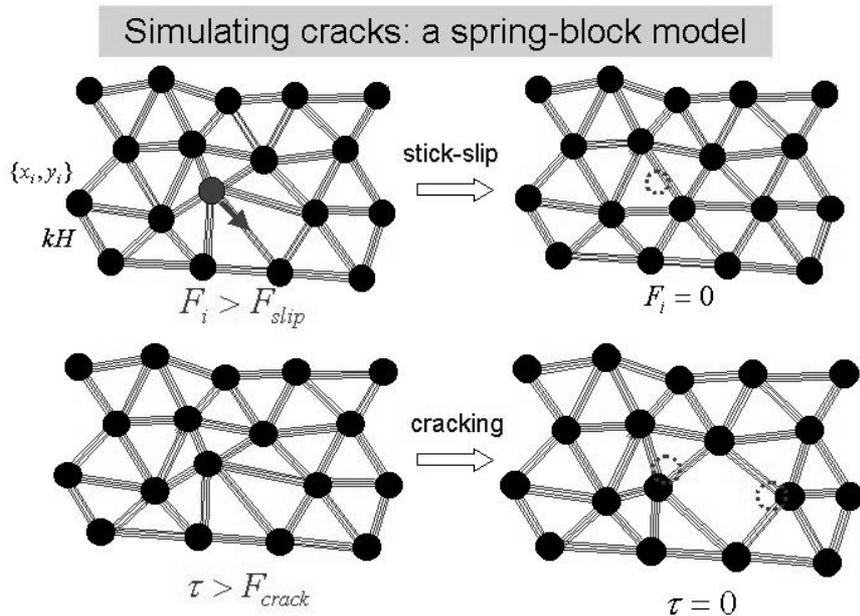
- (a) 裂痕網絡的形成機制，例如究竟是成核集結的(nucleation)或是延伸擴張的；
- (b) 裂隙及碎片的型態、大小及其分佈函數；
- (c) 外在條件和參數(諸如應力的強度、雜質、摩擦力、樣品大小和厚度、以致邊界條件等)對這些性質的影響。



圖三、不同厚度的太白粉沈澱物因乾涸產生的龜裂圖型。(a) 0.5mm, (b) 1.3mm, (c) 2.6mm, (d) 8.0mm。

面對理論的困難，我們在幾年前為了模擬薄層材料因乾涸而產生的龜裂現象，提出了一個以數值模擬為基礎的模型^[9]。在這個介觀(mesosopic)模型中，互相連結的質點組成的網絡代表薄層的樣品。質點間的短程作用力在相對位移不大的條件下可以通過遵守 Hooke's law 的彈簧來表示(見圖四)。置於襯底上的材料因逐漸乾涸、變硬而收縮，但襯底的摩擦力阻止收縮，應力隨之慢速地相對提高，其效

應可以利用隨著時間增強的耦合系數來模擬。系統基本上有兩種「鬆弛」(relaxation)的方式來釋放能量：一、當應力超越摩擦力時，某些質點在襯底表面上「滑動」(slipping)以降低彈簧的勢能；二、當應力超越彈簧所能承受的張力時，某些彈簧隨即斷裂。兩者相互競爭，引起連鎖反應，最終演化出交錯式的裂痕網絡，並將薄塊分割為若干數目、大小不一的碎片。



圖四、由質點與彈簧連接而成的介觀斷裂模型。上圖表示滑動的事件，下圖表示彈簧斷裂的事件。

由於動態過程是靜準的，應力增加的速率遠比系統鬆弛的速率低，我們在演化系統的狀態時，可以使用類似「蒙地卡羅模擬」(Monte Carlo simulation)的方法，而不需要像「分子動力法」(molecular dynamics)般求解運動方程組。詳細的做法請參閱有關論文^[9]，在這裡我們僅介紹主要的結果。我們從理論的論證和數值模擬中獲得幾項結論：

- (a)系統演化的初期總是滑動佔優的。此時質點集體滑動所涵蓋的範圍定出一個關聯長度 ξ 。 ξ 隨時間增長，並決定了最終碎片的平均面積 A 。
- (b) A 與薄層的厚度平方成正比，並隨摩擦力的增加而減小，其間還存在某種標度性質 (scaling)，亦即若我們同時適當地調整厚度與摩擦力，所產生的裂痕圖型具有相同的統計性質。

- (c)樣品尺度 L 若太小，或者摩擦耦合過弱，則斷裂不會發生，亦即存在一個下限臨界尺度 L_c ； L_c 與系統的參數有關。

這些結果不但與實驗結果吻合，而且從中我們可以認定樣品的厚度和襯底的耦合強度為最重要的控制參數。通過兩者不同數值的組合，我們可以輕易地解釋為何在自然界中有如此多形態相似但尺度差異極大，從微觀 μm 大小到宏觀 km 尺度的裂痕圖型的出現。

此外，值得一提的是這個模型在不容許彈簧斷裂的情況下，與某些地震及沙堆模型是等價的(即具有相同的統計特性，如臨界指數等)。

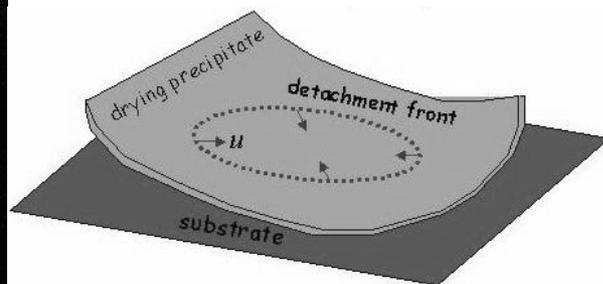
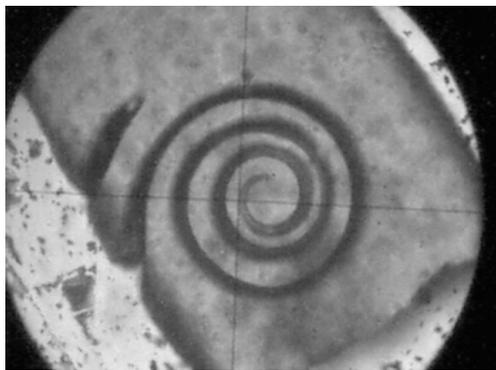
四、會轉向的裂痕

雖然常見的裂痕是網狀和交錯式的，我們最近

卻在偶然的機會下發現在一些特定的條件下，裂痕可以持續其線性延伸，並伴隨應力場的改變而逐漸轉向，最終形成很有規律的螺旋狀結構^[10]。雖然目前我們還沒有完全釐清產生這類「高階」結構的充、要條件，但樣品起碼要很薄(厚度小於 mm)，顆粒很細(如數十 nm)，且在乾涸過程中有不小的收縮率。

在實驗中看到這樣的過程：沈澱物(如磷化鎳)因水份散失而收縮和硬化。經過若干時間，樣品裂開為多片各自分離、但仍與襯底耦合的碎片。這是

第一階的斷裂，即普通的龜裂。再經過若干時間，第二階裂痕出現在各碎片中，形成微小(約 mm 尺度)的結構。這些結構大部份呈現螺旋狀(見圖五)，但也有各種不規則的形狀。螺旋痕缺乏特徵長度且自我相似(self-similar)，其軌跡符合「對數螺旋」(logarithmic spiral)的數學描述。由於左旋、右旋在每塊碎片中只能擇一出現，所以手徵對稱性是破缺的。



圖五、磷化鎳 $[\text{Ni}_3(\text{PO}_4)_2]$ 沈澱物龜裂後，在其中一塊碎片中所見、約 1mm 大小的螺旋裂痕。

圖六、螺旋裂痕形成機制的示意圖：因龜裂產生的碎片逐漸捲曲並脫離襯底，餘下圓形交界鋒內部仍然黏著襯底。裂痕沿鋒產生，交界鋒持續收斂，使裂痕轉向，最後形成內斂的螺旋裂痕。

經過仔細的分析，我們歸納出以下可能的形成機制：碎片因自邊沿散失水份而慢慢從邊沿自襯底脫離並捲曲，在脫離與耦合的交界處造成應力峰(見圖六)。應力的方向因垂直交界的切線，故產生的裂痕平行交界鋒面。因交界鋒近似圓形，其半徑因乾涸而隨時間收斂，故裂痕跟著應力峰的內移而轉向往中心生長，最終形成螺旋的結構。至於手徵性的選擇則完全是隨機的，僅由碎片的形狀、材料強度的不均性及雜質決定。另外，為了檢驗這個機制的

正確性，我們把它引入前述的質點-彈簧模型的演化規律中，獲得與實驗相附的對數螺旋，並確定螺旋的唯一參量(即緊密度)純粹決定於裂隙延伸速度與交界鋒前進速度之比值。最後，因為這種裂痕模式不會造成樣品整體的斷裂，對樣品的機械性質破壞性低，所以如果我們能夠掌控其發生的地點與機率，以之代替破壞性的裂隙，則這項發現也許對提高工業產品的穩定性具啟發作用。

五、結語

雖然篇幅有限，不容許我們更深入地介紹，或討論其他與斷裂現象(例如地理結構、地震等)相關的問題，但我們希望這篇短文足以喚起讀者對非線性和統計物理的基礎與應用研究的重視，並且能達到拋磚引玉的目的，引起大家對斷裂問題，以致更一般的圖型形成問題的興趣。

參考文獻

1. *Statistical Physics of Fracture and Breakdown in Disordered Systems*, B.K. Chakrabarti and L.G. Benguigui (Clarendon Press, Oxford, 1997).
2. J. Walker, *Scientific American* **255**, 178 (1986).
3. G.R. Irwin, *J. Appl. Mech.* **24**, 361 (1957).
4. A.A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **221**, 163 (1920).
5. M. Marder and J. Fineberg, *How things break*, *Physics Today*, 24 (9/96); *Physics Report* **313**, 1-108 (1999).
6. E. Sharon and J. Fineberg, *Nature* **397**, 333 (1999).
7. S. Kamiya et al, *J. Appl. Phys.* **82**, 6056 (1997).
8. A. Yuse and M. Sano, *Nature* **362**, 329 (1993); C. Allain and L. Limat, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2981 (1995); O. Ronsin, F. Heslot, and B. Perrin, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2352 (1995); O. Ronsin and B. Perrin, *Europhys. Lett.* **38**, 435 (1997).
9. K.-t. Leung and J.V. Andersen, *Europhys. Lett.* **38**, 589 (1997); K.-t. Leung and Z. Nédá, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 662 (2000).
10. K.-t. Leung, L. Józsa, M. Ravasz and Z. Nédá, *Nature* **410**, 166 (2001); Z. Nédá, K.-t. Leung, L. Józsa and M. Ravasz, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 095502 (2002).