今山載古道：談行星橢圓軌道運動

四百年前，克卜勒發表了他的《新天文學》一書，提出了行星以橢圓形軌道繞行太陽的開創性想法。為什麼不是圓形軌道？為什麼太陽不在正中心而是在偏心的焦點上？橢圓的另外一個焦點又有什麼意義？且聽本文慢慢道來。

四百年前克卜勒(Johannes Kepler, 1571–1630)出版《新天文學》(Astronomia Nova)一書，提出了他關於行星運動的第一定律和第二定律。不少初學者包括筆者在高中第一次接觸到橢圓的概念時心中難免充滿了問號。圓形不好嗎？橢圓形要怎麼計算？有什麼證明？橢圓的焦點又有什麼特別之處？等到上了大學學習微積分的基本技巧和牛頓力學的基礎知識，才比較能欣賞橢圓軌道的奧妙，回過頭來讚嘆克卜勒這劃時代的發現。但是，橢圓軌道難道真的是克卜勒天外飛來的一筆，使得人類的宇宙觀由哥白尼的圓形軌道進化成橢圓形這麼簡單？先前有不少從科學史、物理或是數學的角度來探討克卜勒橢圓軌道定律的文章；本文則嘗試透過近代天文學知識並摻雜一些天文學史和天體力學的觀點，從稍微不同的角度來體會行星的橢圓軌道運動。關於克卜勒的生平可參閱林文隆教授在本刊二月號的文章。

地球公轉軌道運動的不均勻

克卜勒在《新天文學》的標題頁說明了他的這項工作是基於第谷（Tycho Brahe, 1546-1601）的觀測資料，長年研究火星運行軌道的結果。火星的軌道離心率約 0.09，在八大行星中（當年只有六大行星）僅次於水星。水星靠近太陽，觀測上不如火星來得容易。不過，在此且讓我們先來看看公轉軌道離心率更小的地球。

不論是以現代太陽為中心的觀點或是古代以地球為中心的觀點來看，地球繞太陽（或說太陽繞著地球）的軌道都非常接近正圓形。在電腦繪圖程式普及的今天，讀者不妨自行試著比較離心率 0.0167 的橢圓和正圓形的差異。太陽相對於背景的恆星每天沿著黃道往東方移動約一度，每 365.2422 日公轉一圈。依照這樣的運動週期，我們可以訂出每四年一閏，百年不閏，四百年再閏的太陽曆。彷彿太陽是以等速率圓周運動繞著地球，這是最簡單的想法。但是，讓我們來看看節氣。二十四節氣是依照太陽在黃道上移動的角度來訂定的，每個節氣相差十五度，四個分至點相隔九十度。簡單計算最近五年的節氣就會發覺從春分到夏至大約間隔 92.75~92.76 天，從夏至到秋分大約 93.65~93.66 天，秋分到冬至約 89.84~89.85 天，冬至到春分約 88.99 天。如果地球位在太陽等速率圓周運動的中心，這四個分至點相隔的時間都應該要相同。顯然，要不是地球不在圓心上，就是這運動根本不

是等速率圓周運動，或是以上兩種敘述同時成立。在兩千多年前古希臘的 Hipparchus 時代（190 BC-120 BC）就已經明白了這個道理。但是，等速率圓周運動非常完美，爲了保留這完美遂發展出了偏心圓和本輪（epicycle）、均輪（deferent）的模型。托勒密（Claudius Ptolemaeus, 90-168 AD）總其大成並增加了偏心點（equant）的構想，寫下了以地球爲宇宙中心的《至大論》（註一)。這部巨著的行星理論非常成功，以希臘文、阿拉伯文和拉丁文傳誦了一千多年，是古代學者研習行星理論的教科書。

日行跡與時差的問題

除了分至點之間的間隔不相等，我們再來看看另外一個有趣的現象。圖一我們把去年台北的日出時刻與日出方位角（註二）作圖，得到一個有趣的 8 字形。雖然原始資料精確度有限，但是重要的特徵一個都沒少。首先，北半球夏至或冬至的時候，太陽總是從最北邊或最南邊出來，這相當於圖中最左邊（日出方位角最小）和最右邊（日出方位角最大）的點。其次，每年日出最晚的一天和日出最早的一天相當於這個 8 字形最上面和最下面的點。於是，我們發現，一年中白晝最短的一天（冬至）並不是日出最晚的一天；一年中白晝最長的一天（夏至）也不是日出最早的一天。或許，有些長年日出而作日入而息的細心讀者也注意到了這個現象。但是，這和橢圓形軌道也有關係嗎？是的，不過不完全是。如果我們每天或每隔幾天固定的時間，譬如說早上十點或中午十二點，在同一個地點拍攝太陽的位置，持續一整年後我們就會發現太陽的位置呈現出和圖一相似的 8 字形。這就是非常著名的『日行跡』（analemma）（註三）。讀者們在網路上，例如 NASA 的每日一天文圖（註四）或是維基百科（註五），都可以找到成功的精彩作品。形成 8 字形的原因主要是地球的赤道與黃道有約 23.5 度的夾角。圖二顯示假設太陽沿著黃道均勻的運動（等速率圓周運動）會導致它在赤道上的投影相對於同樣轉速均勻的赤道運動有忽左忽右的變化。它的偏差結果和均勻的赤道運動（也就是地球自轉）相比較會形成一個對稱的 8 字形如圖三。有興趣的讀者不妨試試自行推導這個八字形的方程式看看。圖四則是英國皇家天文台正午十二點的太陽位置。圖一和圖四都顯示兩瓣不對稱的 8 字形，這個不對稱正是因爲太陽在每年的一月初前後移動較快（因爲地球正通過近日點），而在七月初移動較慢（因爲地球正通過遠日點）的結果。如果是等速率圓周運動，春分和秋分太陽由正東方升起的日出時間應該要相同。如果更仔細看，圖四的 8 字形不僅上下兩瓣不對稱，它的左右也不對稱。這是因爲地球的近日點和遠日點與北半球的冬至和夏至並不完全相同，而有兩星期左右的差距。反過來說，如果古人用日影指向正北來定義正午時刻（註六），那麼，在秋后午時三刻問斬的犯人可能會少活了十多分鐘！計時科技的進步讓我們能夠更精確的定義時間。

托勒密的宇宙觀

爲了解釋太陽運動的不均勻又要保存等速率圓周運動的完美，古人提出了偏心圓的想法。這個偏心圓可以用一個以地球爲中心的大圓（均輪）加上一個沿著大圓均勻運動的小圓（本輪）來取代（圖五）。哥白尼在《天體運行論》裡基本上也採用了類似的想法，只是把太陽放在圖五中黑色方塊的位置，讓地球在偏心圓的軌道上繞著太陽。爲了解釋哥白尼認爲已經觀測到的遠日點移動現象，哥白尼還在地球的本輪上再加了一個小本輪（epicycle on epicycle）。不考慮哥白尼的小本輪，單從現代軌道運動的觀點來看，無論是地心說的太陽軌道還是日心說的地球軌道都是偏心圓。倒是均輪加上本輪掃過的同心圓區域是以地球或太陽爲中心。這其實正是托勒密的宇宙觀。在托勒密的眼中，地球以外就是一層又一層的太陽、月亮天球和行星天球，一組本均輪系統緊密連接著另外一組本均輪系統，沒有真空和現代的軌道概念。而同樣的宇宙觀也出現在克卜勒早年的作品《宇宙的神秘》（Mysterium cosmographicum，1596 年出版）一書中。克卜勒用五個完美的正多面體模型以內切球和外接球的方式緊密連接在一起，來解釋當時已知的六個行星和它們的軌道。軌道雖然是分開的，但是和軌道可以獨立存在於行星天球或正多面體之外的真空中的概念還是不大一樣。

托勒密的行星理論與哥白尼革命

行星和太陽又不大一樣，因爲行星相對於背景恆星運行當中會發生逆行的現象。關於行星逆行和距離計算可參閱本刊上月錢宜新和姚珩教授兩位的文章。圖六是利用現代的程式（註七）計算克卜勒時代火星在黃道上的經度（也就是黃經）和地心距離的變化情形，火星在將近十六年內有八次逆行。而古人對於行星逆行最簡單的標準解釋就是利用一組本均輪系統，不過行星在本輪（小圓）上的運動頻率和太陽繞地球同步。哥白尼雖然讓地球繞著太陽轉可以簡化行星逆行爲地球與行星之間的相對運動，但是在預測精度上並沒有超越托勒密。因爲無論是地心說或日心說的觀點，如果不考慮像是光行差這種近代的概念，從幾何上來看就只是一個座標轉換的差異而已。克卜勒在他的《新天文學》第六章也證明了包含了第谷修正後的地心說模型在內的這三種學說是相等的。如果地球在火星均輪的中心而且本輪也繞著中心均勻的旋轉，描繪出來的曲線應該類似一條對稱的外擺線（epicycloid)，每次火星逆行的距離也應該都一樣；但是圖六相對於原點地球卻不是對稱的，就像在先前太陽的例子一樣，要不是地球不在圓心，就是運動相對於地球並不均勻，或是兩種情形都有。以火星軌道爲例，托勒密認爲地球並不在火星均輪的圓心，而是在一個偏心的位置上。此外，火星本輪沿著均輪的運動相對於地球或是均輪的圓心都不是均勻的，但是在均輪圓心的另一側和地球與圓心

距離相同的位置上，托勒密定義了一個偏心點（圖七）。托勒密認爲，火星本輪的運動如果從這個偏心點來看是均勻的。

托勒密在《至大論》第十一卷裡總結他得出的行星本輪大小，不過他只給出了本輪半徑相對於均輪半徑的值如表一。

表一：托勒密的行星本輪相對大小和行星距離。均輪的半徑假設是 60（整數）單位，表中的小數部分（分號右側）使用六十進位。所以水星的本輪相對大小是 22 又 30/60，也就是 22.5。其他依此類推。現代行星和太陽的距離也一併列出。

行星	水星	金星	火星	木星	土星
托勒密的本輪相對大小	$22;30^P$	$43;10^P$	$39;30^P$	$11;30^P$	$6;30^P$
行星和太陽平均距離（AU）	0.39	0.72	1.52	5.20	9.55

什麼是均輪的半徑？如果不考慮偏心或橢圓軌道的問題，這基本上就是行星到地球的平均距離（假設地球不動）。但是，行星有時和地球在太陽的同一側，有時在太陽的另一側，所以，對火星、木星、土星（稱爲地外行星）來說，這距離也就是行星到太陽的距離；而對於水星和金星來說，這就應該是太陽到地球的距離（註八）。地外行星的本輪大小應該就是地球繞太陽的公轉軌道；水星與金星的本輪大小則是它們繞太陽的公轉軌道。托勒密沒有算出本輪真正的大小，這或許和他的宇宙觀有關：既然地球是宇宙不動的中心，又怎麼能夠求出行星真正的距離呢？哥白尼認爲行星繞著太陽轉，如果地球在動而且行星又離得不太遠，相對於遙遠的恆星，我們就有可能可以量到行星的視差，決定行星的距離。

克卜勒的挑戰

擺在克卜勒眼前的是第谷在 1580 年到 1604 年之間的火星觀測結果。透過近代的行星軌道計算程式（註七），我們可以重現四百年前火星在天球上運行的軌跡。圖八顯示了西元 1580 年到 1596 年的八次火星逆行前後運行軌跡的細節。圖中黑點的直徑約半度，相當於滿月的大小。第谷當年肉眼的觀測誤差比這圖中的黑點要小得多。這麼複雜的運動，早在托勒密時期以前就被人注意到了。首先，地球根本很少出現在火星運行軌道的平面上；否則，火星在天球上的軌跡就應該落在單獨一條大圓線上，就像太陽在黃道上運行一樣。其次，如先前所述，每次火星在天球上逆行的距離也不一樣。托勒密的《至大論》和哥白尼的《天體運行論》都把行星在天球上垂直於黃道方向的運動留在最後一卷討論，並以等速圓周運動的組合來解釋火星在天球上的運行。克卜勒的行星橢圓軌道運動也可以簡化成距離與平面方位的組合。這三種理論間的密切關係或許還是霍愛爾爵士（Sir Fred Hoyle，1915−2001）的近代觀點解釋得比較清楚。

克卜勒問題的近代觀點

行星的橢圓軌道形狀雖然簡單，計算卻不容易。所謂的克卜勒問題（Kepler Problem）吸引了許多學者鑽研各式各樣的解法。假設 a 是橢圓軌道的半長軸或是到太陽的平均距離，e 是軌道離心率，θ 是離開近日點的角度（真近點角，true anomaly）。定義平近點角（mean anomaly）$M = 2\pi t/P$，其中 t 是時間，P 是公轉週期。在天文觀測上，我們希望知道任一時刻 t 時候的行星位置 $\theta = \theta(t)$；然而，我們只能得到一個數值的近似解或是用級數逼近。譬如說，當離心率很接近零的時候，我們可以得出

$$\theta = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin(2M) + \ldots \qquad (1)$$

把上式代進橢圓的極座標表示式可求得行星距離。有了距離和幅角，我們就可以用複數 z 來代表行星在複數平面上的位置向量，再取近似展開到離心率 e 的一次方項，可以得出

$$z = -\frac{3}{2}ae + a\exp(iM) + \frac{1}{2}ae\exp(2iM) \qquad (2)$$

這是行星相對於太陽的位置向量，exp 代表以超越數 e 爲底的指數函數（註九）。

公式(2)有一個很簡單的幾何解釋。首先，乘積 ae 相當於橢圓的焦距長度。行星的位置與太陽位置的關係可以近似表示成複數平面上三個向量的和：第一，由太陽開始往-1的方向移動1.5倍焦距長；其次，以橢圓的半長軸 a 爲半徑作圓；第三，在這大圓上以半個焦距的長度爲半徑作一個小圓，行星在小圓上以逆時針方向運動的角頻率是小圓沿著大圓以同方向運動角頻率的兩倍。此處，我們得到了兩個同方向不同速率的等速圓周運動組合，而太陽在大圓的一個偏心的位置上。如果讀者翻開哥白尼的《天體運行論》第五卷就會發現，這就是哥白尼的行星模型（譬如說，火星）：以太陽偏心距離三分之一爲半徑作小圓（也就是哥白尼的小本輪，epicyclet），行星在小本輪上的轉速是小本輪在大圓上轉速的兩倍！哥白尼當年很高興的發現，只要用他發明的小本輪就可以不必使用托勒密的偏心點。不過，我們可以把公式(2)重新整理，寫成

$$z = -2ae + a(1 + e\cos M)\exp(iM) \qquad (3)$$

公式(3)可以這樣解釋：如果以-1方向距離太陽兩倍焦距遠的地方爲中心來看行星的運動，行星的方向會隨著指數項 $\exp(iM)$均勻的改變，但是行星和該點的距離也會隨著時間增加或減少。這一點在哪裡呢？從行星的橢圓軌道來看，-1的方向正是行星遠日點的方向；太陽佔據橢圓的一個焦點，在遠日點方向兩倍焦距遠的地方正是橢圓的另一個焦點，而行星在天球上的運動從這個空的焦點來看是均勻的。這不就像是托勒密對偏心點的構想嗎？只是，托勒密是把地球放在宇宙的中心。如果我們忽略地球公轉軌道的離心率，再計算行星相對於地球的位置，這

就相當於在第(3)式中再加上一個等速圓周運動（也就是地球繞太陽的公轉）。原本行星繞著偏心點的運動變成了行星的本輪繞著偏心點的運動，而行星在本輪上的運動與太陽繞地球同步，這就是托勒密流傳千年的理論！

站在巨人的肩上

原來，哥白尼和托勒密的理論如此的接近，如果橢圓軌道的離心率很小，它們和克卜勒橢圓理論的近似公式也完全相符。然而，像是座標解析幾何、複數運算或是微積分這些近代的數學工具在當時根本還沒誕生。哥白尼和克卜勒所使用的基本上還是沿襲歐幾里德《幾何原本》的那一套經典做法。最近十多年天文學家們發現許多系外行星的公轉軌道離心率比我們太陽系的八大行星要大得多，必須要用不同的方法來處理。單從軌道形狀的觀點來看，本均輪模型的內容其實是相當豐富的。不過，公式(2)或公式(3)並不是簡單的圓形或橢圓形軌道，哥白尼和托勒密的行星真正軌道從來就不是圓形，它們毫無疑問是兩個或兩個以上的等速圓周運動的組合。當離心率很小的時候，它們和觀測結果相當吻合。從這個角度來看，克卜勒的劃時代貢獻可以說是把觀測行星軌道運動的準確度提升到離心率的平方項以上；而第谷對於火星的精密測量使得克卜勒能夠洞察天機。什麼是本輪？什麼又是均輪？從公式(2)或公式(3)以及向量加法的可交換性，讀者應不難理解本均輪理論並不能提供唯一的本輪均輪組合。今天，學校裡雖然不再講授本均輪的行星理論，但是這類簡單豐富的分析方法和精神仍然在瞭解其他複雜週期現象的分析中大行其道：理工科系大二以上的傅立葉分析（Fourier analysis）和頻譜分析（spectral analysis）不就正是現代版本的本均輪分析嗎？這些不同分量的組合會構成一個新的橢圓嗎？我們看得比古人遠，是因為我們站在巨人們的肩膀上。在這個科學發現的年代，在克卜勒發現行星橢圓軌道四百年後的今天，我們更殷切的期盼下一個重大的發現能引領我們探究未知的領域。

注釋：

一、《Almagest》或《至大論》是源自托勒密原著的阿拉伯文譯本書名。原著希臘文的標題比較類似《數學論述》（Mathematical Treatise），和書的內容也比較相符。

二、地平方位角以正北方為零度，正東方 90 度，正南方 180 度，依此類推。

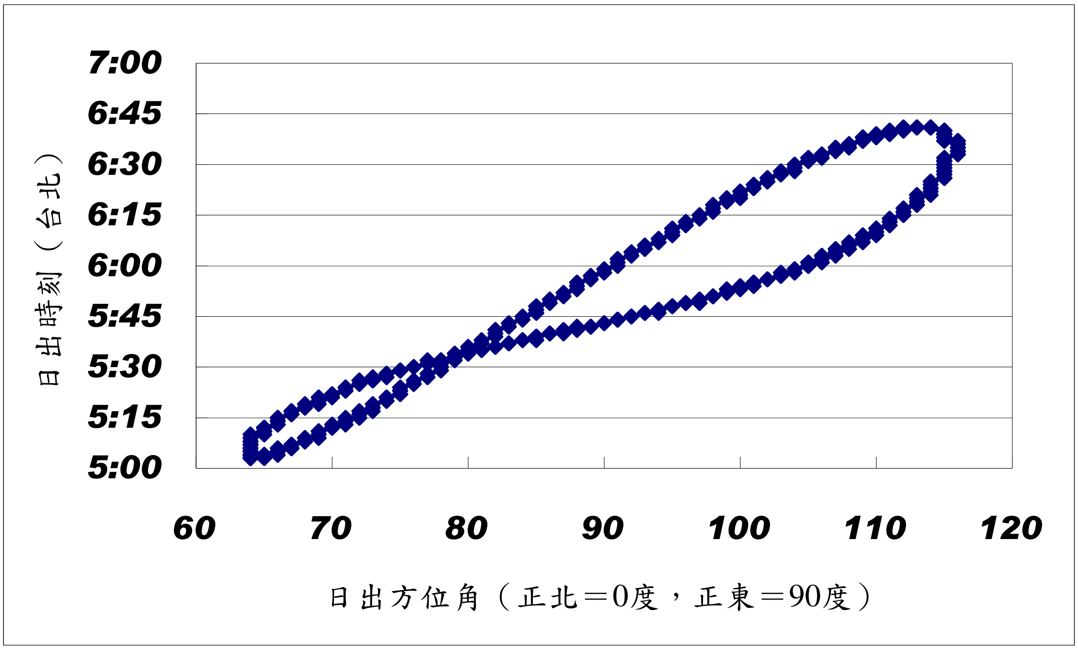
三、“analemma”此處採用成功大學蘇漢宗教授的譯名。

四、每日一天文圖 Astronomy Picture of the Day 主要站址是：http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/astropix.html，台南成功大學蘇漢宗教授建立了一個中文版的分站：http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/mirrors/apod/apod.html

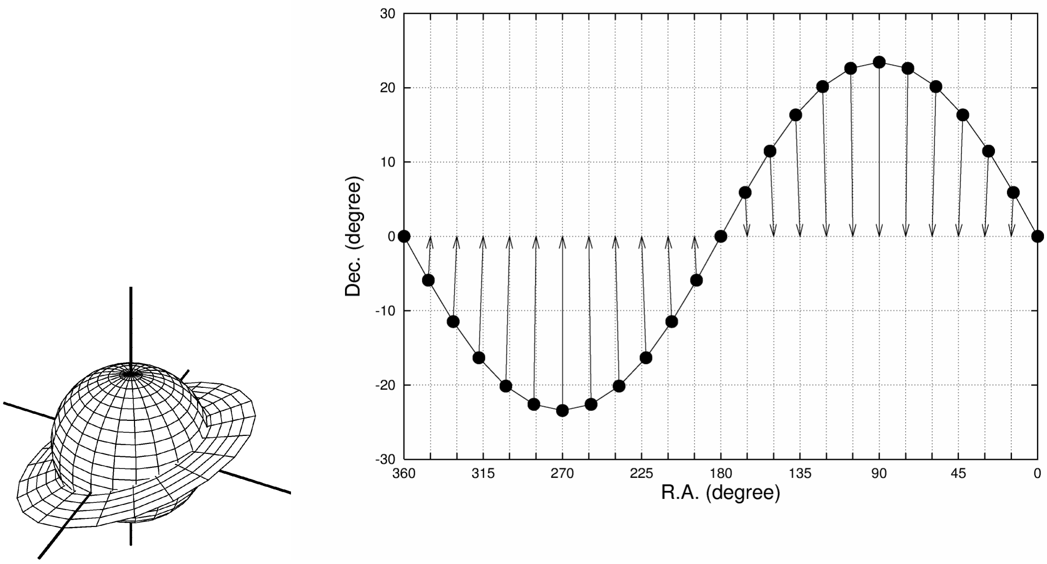
五、維基百科 Wikipedia 英文版網址：http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
六、現代精確的日晷應該會考慮每日時差（equation of time）的變化，再將日影的位置轉換成正確的時間。關於日晷可以參考清華大學邱紀良教授的著作。
七、此處使用的是 JPL 的 Horizons 系統，網址是 http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons
八、在托勒密的模型裡，水星和金星的本輪並沒有繞著太陽運轉，但是爲了和實際觀測相符，這兩顆行星的本輪也不能脫離太陽單獨運行。在第谷的地心說模型裡，所有五顆行星都繞著太陽，而太陽繞著地球。
九、爲了避免超越數 e（$e = 2.7182818\ldots$）和離心率 e 之間的混淆，本文使用 exp() 來代表以超越數 e 爲底的指數函數。尤拉公式 $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ 則是大數學家尤拉（Leonhard Euler，1707−1783）後來發明的。

參考資料

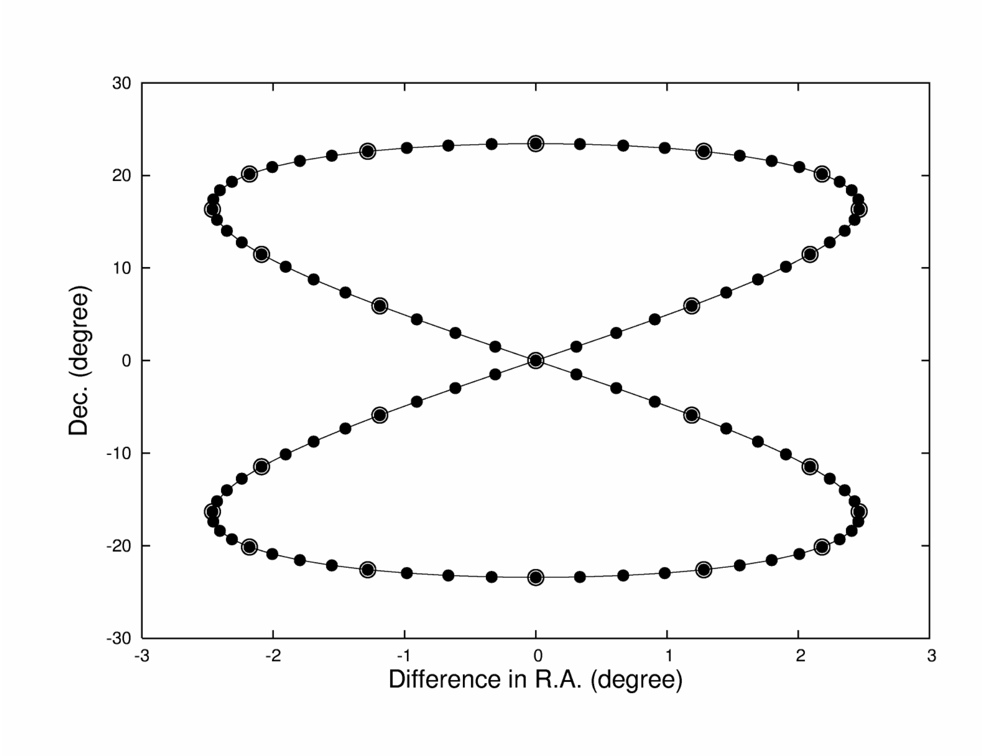
1. Fred Hoyle, “The Work of Nicolaus Copernicus”, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 336, pp. 105-114 (1974)
2. Jean-Claude Pecker, “Understanding the Heavens”, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2001)
3. Johannes Kepler, “The Secret of the Universe”, 英譯本譯者 A. M. Duncan, Abaris Books, Inc., New York (1981)
4. Johannes Kepler, “New Astronomy”, 英譯本譯者 W. H. Donahue, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
5. G. J. Toomer (translator), “Ptolemy’s Almagest”, Princeton University Press, New Jersey (1998)
6. S. Hawking (editor), “On the Shoulders of Giants”, Running Press, Philadelphia (2002)
7. Nicolaus Copernicus, “天體運行論”, 張卜天譯, 大塊文化, (2005 年)



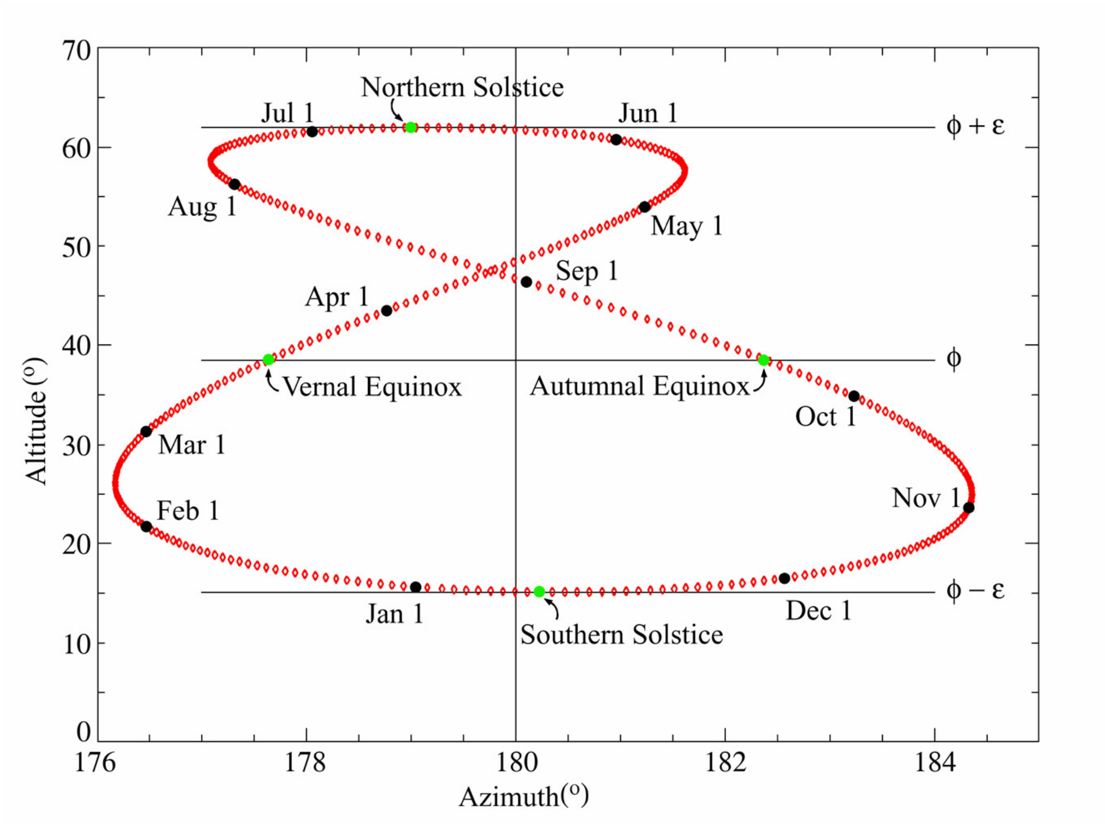
圖一：2008 年台北日出時刻與日出方位角（原始資料來源：台北市立天文科學教育館網站）



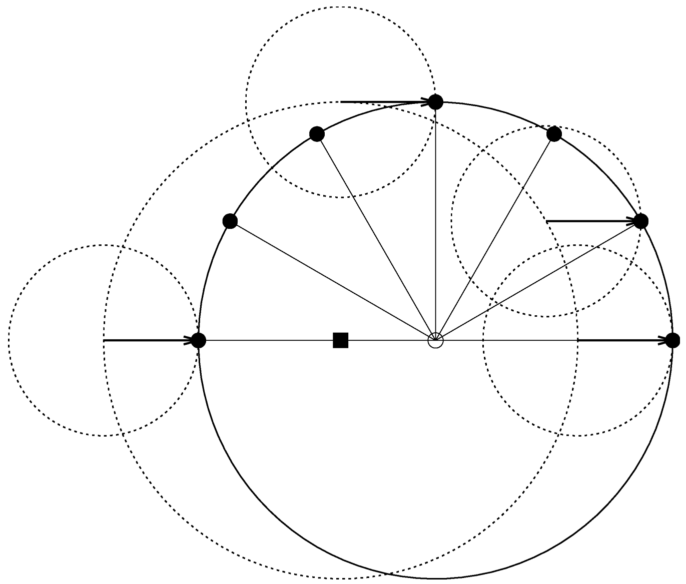
圖二：黃道上均勻的運動從赤道座標看是不均勻的。右圖中的黑點在黃道上相隔正好是 15 度，但是由於黃道面（左圖圓盤面，右圖的曲線）和赤道面（左圖水平兩軸構成的平面，右圖中間的水平線）有約 23 度半的夾角，黑點對應的赤道座標在緯度上（赤緯，簡寫 Dec.）不僅會忽北忽南，在經度上（赤經，簡寫 R.A.）也會有忽而落後忽而超前的現象。



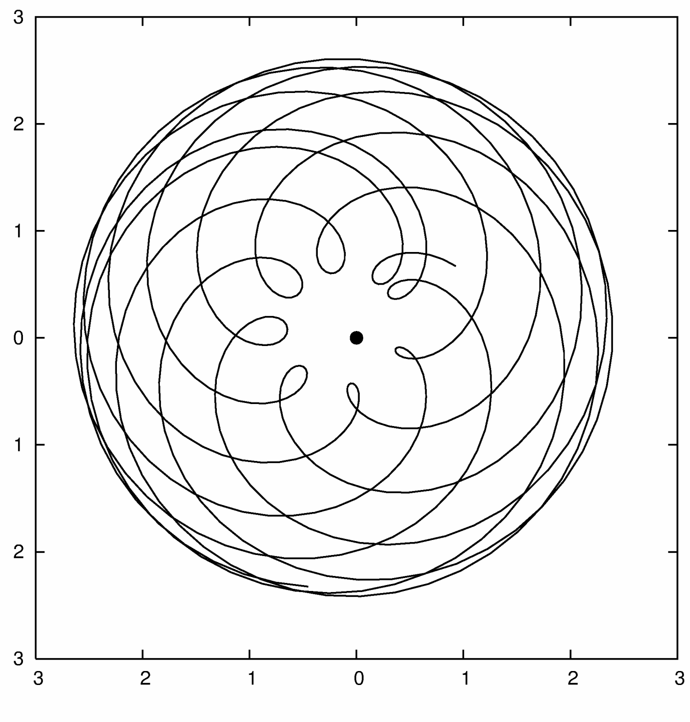
圖三：把圖二中箭頭起點和終點的赤經差和赤緯做圖就得到一個對稱的 8 字形。注意這裡的橫軸稍微有點誇大，實際的差異很小，只有兩三度如圖二所示。



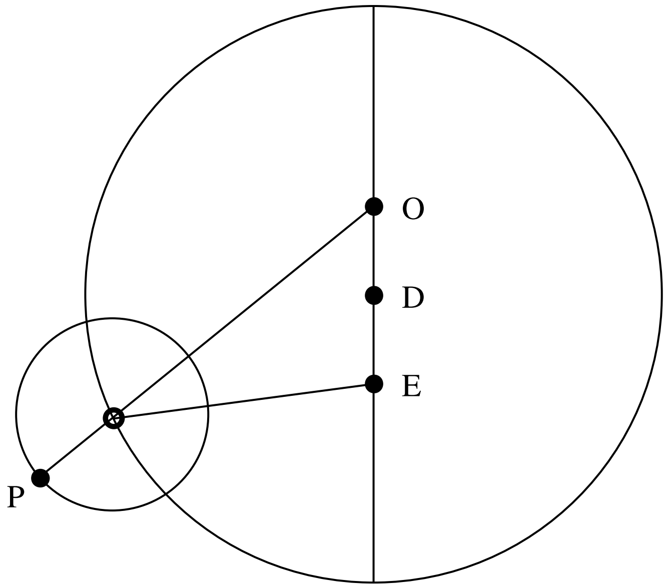
圖四：英國皇家天文台（北緯 51.4791 度）2006 年正午十二點的太陽位置。橫軸是地平方位角（正南＝180 度），縱軸是仰角高度。（圖片出自 Wikipedia）



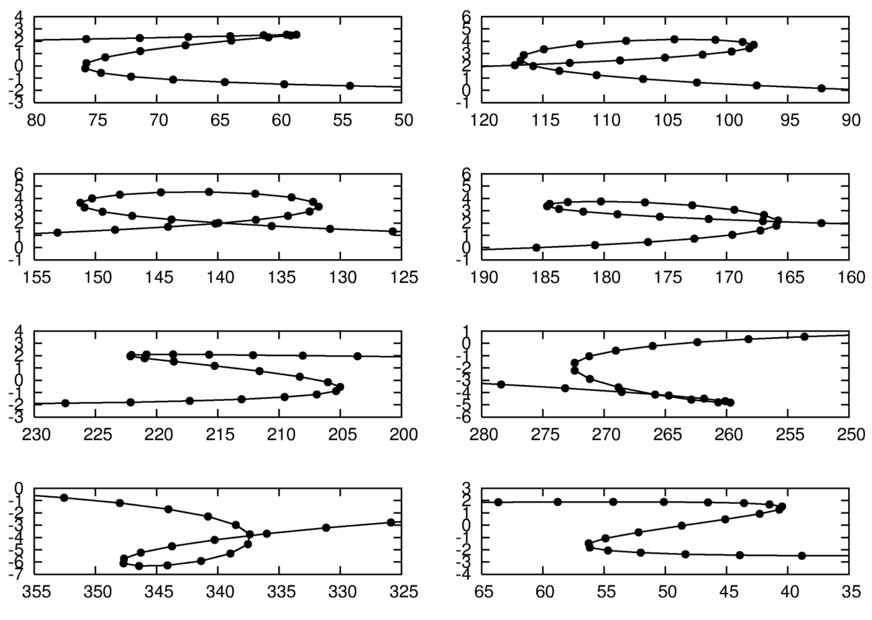
圖五：太陽的偏心圓模型可以用本均輪模型來取代。黑色實心圓點代表太陽的位置，黑色方塊代表地球的位置，實線大圓代表太陽的軌跡，地球並不在這個大圓的圓心。這個實線的偏心圓可以用虛線的小圓，也就是本輪，在以地球為圓心的（虛線的）大圓，也就是均輪上的運動來表示。



圖六：西元 1580 年 7 月到 1596 年 12 月火星（相對於地球，圖中央黑點）的黃道經度與距離連成的軌跡。圖中的橫軸與縱軸座標是以地球到太陽的平均距離當作一單位。



圖七：托勒密的火星運行模型和偏心點理論。地球在 O 點位置，火星均輪（大圓）的圓心在 D 點，另外，點 E 是偏心點，距離 OD=DE，火星本輪（小圓）沿著大圓的運動從 E 點看是均勻的。



圖八：從 1580 年到 1596 年共有八次火星衝（opposition），就在這火星最接近地球時刻的前後也發生了火星逆行的現象。上圖的火星位置用黃道座標表示：橫軸是黃經，縱軸是黃緯。每幅圖顯示的範圍都是 30°×7°（圓周 360°）。火星由圖右方（西方）往左方（東方）移動，逆行時則相反。黑點之間相隔十天。