

衛星軌道與扁圓的地球

金升光

克卜勒歸納出行星遵循橢圓軌道繞著太陽運行的規律。透過牛頓的運動定律和萬有引力定律，計算兩質點間隨著距離平方遞減的作用力，兩三百年前的科學家可以準確的預測哈雷彗星的回歸、推測海王星的存在，也預見人造衛星的誕生。克卜勒的橢圓軌道有一定的大小、形狀，長軸和軌道平面必須指向遙遠星空中固定的方向。但是，如果把這樣簡單的橢圓軌道套用在月球或是人造衛星的運行，我們很快就會發現觀測和克卜勒的橢圓有相當的差距。自古以來，月球的運動就是一個重要的問題，在此暫且不提。今年恰好是人造衛星六十歲的生日，讓我們來認識人造衛星運轉的深一層原理，以及一個有點扁又不大均勻的地球所帶來的問題與研究。

低軌道衛星

您的車從台北到高雄需要耗費多少汽油？在不考慮起步和停止、沒有地球自轉、沒有摩擦力的理想條件下，慣性定律提供了一個節能減碳的選擇。扣除發射操作的成本，人造衛星繞地球基本上是不需要燃料的；但是，另一方面，衛星的速度和方向也受到物理學的限制。想像王建民投手站在玉山山頂上往水平方向投出一顆時速 100 公里的慢速球，這球應該會掉到山谷裡。假使這球速能夠再快 285 倍以上，比每秒 343 公尺的音速還快，超過每秒鐘 7.9 公里，如果沒有濃密大氣的阻擋，它很有可能進入軌道成為一顆人造衛星！新世紀衛星軌道五花八門，基本原理卻沒有太大差別，讀者可參閱孫方鐸教授〈談太空飛行〉一文（本刊 123 期 1980 年 3 月）及續篇。若把地球看做一顆蘋果，玉山的高度和地球的平均赤道半徑 6378 公里相比，可能比削下來的蘋果皮還薄。通常，軌道距離地面高度在一兩千公里之內的，稱為低軌道（low Earth orbit）。國人熟知的福衛二號、哈柏太空望遠鏡、國際太空站等等，都屬於此類衛星。它們環繞地球的軌道半徑大致和地球半徑相去不遠，只要 1.5 小時到 2 小時左右就可以繞地球一圈。

低軌道衛星不像同步衛星可以持續連繫或監測同一個城市或地區，運用起來有些限制。但是低軌道的發射、通訊、維護成本較低，是太空工業不可忽視的選項。對於衛星發射和基地相關問題有興趣的讀者請參閱張以棣教授〈人造衛星是怎樣發射的？〉（本刊 249 期 1990 年 9 月）與〈衛星發射基地巡禮〉（258 期 1991 年 6 月）的介紹。軌道接近地表的衛星運行和操作會受到大氣層、地球形狀與質量分布、地球磁場、甚至於月球等鄰近天體的影響，軌道形狀和方向因而偏離克卜勒的橢圓，量測通訊也可能有些特別的干擾或阻礙。我們可透過如圖一的簡單模型來說明形狀與質量分布的問題。首先，在同一直線上質量分別為 m 、 M 、 m 對稱分布的三個質點，對於直線遠端一點衛星（和 M 相距為 r ）的萬有引力並不等於某一個質量 $M+2m$ 的質點在同樣距離 r 處的所產生的引力。也就是說

$$\frac{Gm}{(r-R)^2} + \frac{GM}{r^2} + \frac{Gm}{(r+R)^2} \neq \frac{G(M+2m)}{r^2}$$

上式中的 G 是牛頓的萬有引力常數，衛星質量省略。 M 與 m 就像地球和她分布不大對稱的質量。另一方面，若衛星位置不與三質點共線，和這直線有段距離，同時衛星本身質量和 M 、 m 相比不可忽略（譬如像月球與潮汐），可以想見衛星的運動和地球的旋轉也會相互影響。

重力場解析

地球實際上的質量分布很複雜，有山川、海洋、還有不同的岩石、礦物、板塊、冰河以及更深層的地函等結構。想像中，計算地表的重力或是人造衛星所受的力需要把所有質點產生的引力加起來，可以透過積分或現代電腦科技來達成。但是，沒有人真正知道準確的質量分布，我們只能從各種測量的結果加上理論來推估。力是一個向量，分析時不如更單純的重力位 GM/r 好用。重力位 (gravitational potential) 可以看做是質量 M 的質點對於距離 r 的單位質量質點所產生的重力位能。利用牛頓、萊布尼茲所發明的微積分，可證明球對稱分布的質量所產生的萬有引力相當於將所有質量集中在球心所產生的引力。圖一的簡單模型並不具有球對稱性。

許多天體和地球類似，都擁有接近球對稱的外形。用球坐標系統 (r, θ, ϕ) 表示的重力位就可以寫成：總質量 M 的質點產生的重力位，加上另一個非球對稱質量分布的修正項。假設球坐標的 z 軸就是自轉軸，非球對稱質量分布可能和經度方向 ϕ 或緯度方向 θ 有關。如果不是像同步衛星之類固定在地表某個經度上空，隨著地球或天體自轉，影響低軌道衛星的重力位可以用只隨 θ 方向變化的級數來近似表示成

$$U \approx -\frac{GM_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\cos \theta) \right]$$

其中 $M_{\oplus}$ 是地球質量， $R_{\oplus}$ 是地球赤道半徑， P_{n0} 是勒壤得多項式 (Legendre polynomials) 可以查表， J_n 則是一組沒有單位的係數，由實際上非球對稱的質量分布來決定。 n 是大於 1 的正整數；雖然一般情況下也允許 $n=1$ ，但若選擇質心為坐標原點，可以證明 $J_1=0$ 。如果要考慮質量分布沿著經度方向的變化，就要用更完整複雜的式子（譬如連帶的勒壤得多項式 P_{nm} 或球諧函數 Y_{lm} ）來展開。

簡單的說，地球的重力位可以表示成一個球對稱的重力位再加上 J_2 、 J_3 、 J_4 等等高階項的總和；同時，距離越遠，高階項的影響越小。測量可以決定這些係數。地球的 $J_2 = 1.0826359 \times 10^{-3}$ ， J_3 與 J_4 的數量級約 10^{-6} 。換句話說，地球的重力可以初步用球對稱的引力再加上 J_2 項的影響來近似。因為 $P_{20} = (3\cos^2\theta - 1)/2$ ，南北半球相對於赤道 ($\theta = 90^\circ$) 是對稱的。這第一階近似的模型有點像把圓圓的

地球稍微壓扁成橢球。雖然，地球的重力場和地球的形狀（figure of the Earth）不完全等價， J_2 項和地球扁率（flattening）兩者數量級大致相去不遠。此外，無論是萬有引力常數 G 的測定或是太陽、地球等天體質量的測定，精確度都十分有限；兩者的乘積卻可以藉由精密測量行星、衛星的軌道運動而得出更多的有效位數。因此，在軌道分析時，使用這種組合常數反而可以得到更精確的結果。

地球重力場與衛星運動

福衛二號、五號或類似的太陽同步軌道（Sun-synchronous orbit）正是利用了地球重力場 J_2 項的特性，選擇了特定的軌道，使得軌道平面方向的變化能夠和地球繞太陽的公轉周期同步。如果地球是球對稱的，類似的遙測衛星軌道遵照克卜勒定律繞著地球，軌道平面方向固定。假定在某天中午時分通過台灣上空，三個月之後，卻只能在清晨或傍晚才能觀測相同的目標。這樣的軌道恐怕就不大適合當成台灣的小天使了。

即使您沒用過 GPS（全球衛星定位系統），應該也看過架設望遠鏡或某些儀器裝置時使用的氣泡水準儀，或像是蓋大樓時用的鉛錘吧！利用重力，人們希望儀器或家中的地板不至於歪斜。但是，這重力或鉛錘的方向未必指向地球真正的中心。爬山時我們想知道海拔多高，外出旅遊時想知道所在位置或經緯度。這些垂直和水平坐標，甚至於時間的基準不僅和地球的重力場有關，地球的形狀、自轉、潮汐、海流、坐標定義採用的標準等等都必須考慮。如果沒有校準，或是不同國家，甚至於同樣地區不同年代採用了不同的標準，把不同的坐標套用在起伏的地形地貌上就很容易產生誤差。地球重力加上自轉產生的水平或鉛垂方向定義了大地水準面（geoid），也就是重力等位面。理想的大地水準面不受颱風或海潮等因素而改變。反過來說，仔細測量重力細微的變化，也可以透露出大氣、洋流、乃至於地表下水流、冰層、岩漿等更多的訊息。這正是美國航太總署（NASA）的 GRACE 衛星與稍後歐洲太空總署（ESA）GOCE 衛星的任務。這兩組衛星以貼近地表的低軌道測量全球的重力場變化和重力異常（gravity anomaly），讀者不妨參閱朱美妃與張翠玉兩位教授〈淺談地球的重力量測〉一文（本刊 520 期，2013 年 4 月）。透過相似的概念，NASA 的另一組孿生太空船 GRAIL A 和 B 也在 2011 年發射升空，精確的測定月球的重力場。

參考橢球與重力模型

大地水準面的形狀並不規則，和實際的質量分布有關，在某些應用上不如幾何形狀單純的參考橢球體（reference ellipsoid，或稱地球橢圓體 Earth ellipsoid）來得好用。給定赤道半徑、地球扁率、短軸方向、再加上地心或其他基準點就可以決定一個橢球。以這個橢球為大地基準（geodetic datum）配合適當的投影和參考點，可以決定經緯度。隨著測量精度與技術的演進和地區的差異，歷史上有許多不同的橢球和基準定義，也造成經緯度坐標的混淆。台灣曾使用以南投埔里

虎子山為基準的 TWD67 系統（1967 年）。現在的 TWD97（1997 臺灣大地基準）和國際通用以地心為基準的 WGS84（World Geodetic System）比較接近。如果混用 TWD67 與 TWD97 兩種系統，可能產生接近 1 公里的誤差。緊急狀況下，恐怕會耽誤救援的黃金時間。倘若您經常遠赴海外旅遊甚至在野外登山健行，進一步瞭解當地採用的坐標系統有時候比認識不同的電源插座規格還重要。GPS 新科技雖然帶來便利，現代人也該具備一些駕馭新科技的智慧吧！

六十年來，人造衛星不僅繞著地球，也把觸角延伸到太陽系。簡單的橢球和 J_2 項修正顯然不足以描述地球的重力場。更精細的地球或行星重力模型像是 EGM96、EGM2008（Earth Gravitational Model）等等，為太空飛行、科學研究、生活應用提供了更精確的參考，引領人類與他們的無人駕駛車或太空船探索未知的世界。

延伸閱讀：

1. J. R. Wertz (Edit.), 1978, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer, Netherlands
2. 內政部地政司衛星測量中心網站：
<http://gps.moi.gov.tw/SSCenter/Introduce/InfoPage.aspx>
3. The International Gravity Field Service – IGFS 國際重力場服務網站：
<http://igfs.topo.auth.gr/> 以及其下屬的幾個服務中心，如 ICGEM（International Centre for Global Earth Models）等等。