

《星際效應》的時空幾何與想像

金升光

和科幻英雄片相比，平實的科學主題或科學家的故事往往不大容易成為好萊塢電影的賣座元素。然而，無獨有偶的，傳奇科學家霍金和電腦科學之父涂靈的故事相偕成為今年奧斯卡金像獎矚目的焦點。關於涂靈的事蹟和影響可以參閱本刊製作的專輯（2012年6月）；而霍金畢生鑽研的相對論、黑洞等學問，正是去年另一部電影《星際效應》（*Interstellar*）的主要題材。霍金的老友，美國加州理工的索恩教授（Kip Thorne）不僅是這部電影的顧問，也從頭到尾實際參與製作，確保影片的科學正確性或可能性。他將相關科學議題的討論和介紹都囊括在《*The Science of Interstellar*》（意即「星際效應的科學」）這本新書中。書中無可避免的洩漏了一些電影中的關鍵劇情，可能影響一般人觀賞時的樂趣。封面有警語，套用時下影迷網友們常用的術語，就是「有雷」（spoiler alert）。所謂「外行看熱鬧，內行看門道」。索恩是相對論專家，他早年與同門的米茲訥（Charles Misner）和指導教授惠勒（John Wheeler，也是物理學家費曼的老師）三人合著的《*引力論*》（*Gravitation*）一書是學習相對論的經典。電影的整體表現另有公評，但是如果想在看電影時還要吸收相關的科學新知，索恩的新書應該是入門者的首選。本文簡短聚焦在相對論與時空的基本概念，不會提及電影劇情，就算是看電影或新書前後的「無雷」推文，順道一窺當代物理研究的新發展。

相對論與時空

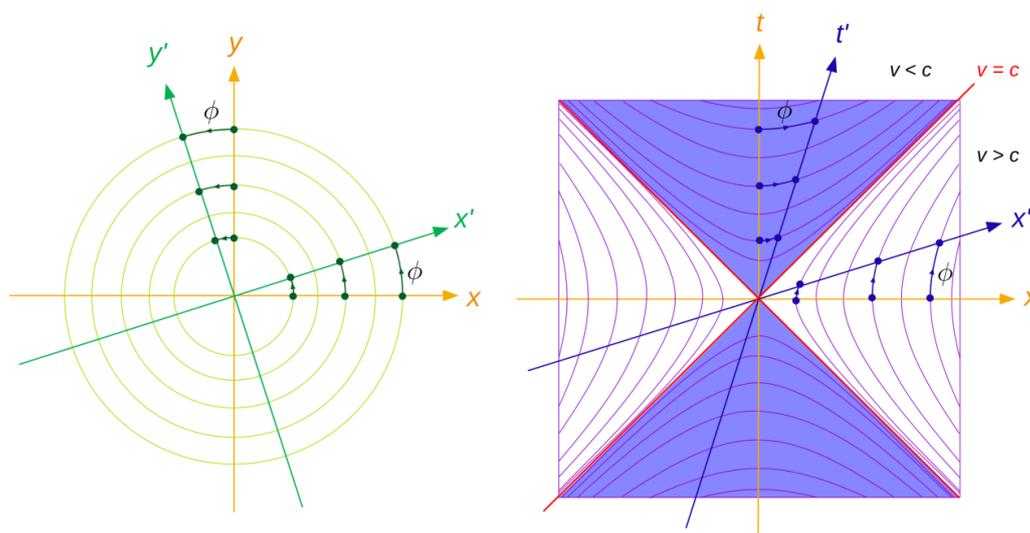
求學時住宿舍免不了互相串門子。有一回在同學書架上看到一本《幾何與想像》（*Geometry and the imagination*）英譯本，是從大數學家希伯特（David Hilbert, 1862-1943）在德國哥廷根大學的講稿整理而成，寫給缺乏背景知識的讀者。楊振寧教授曾經開玩笑的說：數學的書只有兩種，一種是你讀完第一頁就看不下去了，另一種是你才讀完第一行就讀不下去的。隔行如隔山哪！但是透過那些看似熟悉又陌生的幾何圖形，聯想推演到其他未曾聽聞的原理或結論，用直觀來了解大自然的設計，這大師之作翻過幾頁後竟欲罷不能！可是，幾何和時空為什麼會連在一起？故事得從狹義相對論說起。

狹義相對論的原理並不困難，許多相關科普讀物都很適合中學生程度來閱讀，只是它和一般人的常識相違背，令人難以接受。以最經典的場景為例，假想一輛相對於月台接近光速運動的火車。月台上的乘客會發覺運動中的火車長度比靜止在月台上的火車短，稱為「勞侖茲收縮」；此外，他們也會發現運動中火車上乘客的時鐘或手表變得比較慢，稱為「時間膨脹」（time dilation）。不過，運動是相對的，狹義相對論裡沒有絕對靜止的觀察者或月台。所以，從運動中火車上的乘

客角度，變慢的是月台上的時鐘，而月台的長度也會變短。這有可能嗎？沒錯，這正是弔詭的地方。長度收縮和時間膨脹對於相對運動兩方的觀察者都是真實的而非幻象，許多佯謬也由此而生。例如，假使原本停靠的火車和月台長度相同；高速運動下，當火車頭和月台前端齊平時，從最後一節車廂跳出車門的乘客會在月台上還是月台外？別忘記，從火車上乘客的觀點，月台已經縮短了！

如果您頭一回碰到這樣的問題，可能得花點時間。關鍵在於「同時」是一個相對的概念。假設有閃電同時擊中第一月台和第十月台的燈柱，對於所有在月台上的旅客，無論距離燈柱的遠近，在扣除光線傳播的時間後，都會得到同樣的結論：兩側閃電同時發生。然而，這輛高速運動火車上的所有乘客都會發現，在考慮光線傳播的時間後，這閃電擊中月台兩端的事件必然可以分出先後。這是火車與月台兩組時間與空間坐標經過「勞侖茲變換」(Lorentz transformation) 後的簡單結果。勞侖茲變換是狹義相對論的核心，它和牛頓力學所遵循的「伽利略變換」有所不同。後者與一般常識中的速度合成觀念相似，前者則顯示當相對速度接近光速時有明顯區別。電磁學方程式與勞侖茲變換相容，實驗也證實傳統牛頓力學的絕對時間概念必須有所修正，這正是愛因斯坦在 1905 年的革命性貢獻之一。

「勞侖茲變換」這名詞看似莫測高深，它的數學形式卻是中學生就可以處理的，比電磁學簡單多了。這變換可以透過許多版本的時空圖來理解，例如圖一右。時間被看做獨立於空間之外的另一個維度，圖中省略了 y 軸和 z 軸，通常也假設光速 $c = 1$ 。相對運動時，火車或月台間的時空坐標變換相當於一個「旋轉」。只不過，這旋轉角是一個雙曲角 (hyperbolic angle)，可用雙曲幾何來描述。因為，不同坐標測得的光速都一樣，光總是沿著時空圖中 45 度角的直線移動。這四維時空稱為「閔考斯基空間」(Minkowski space)，若使用單位直角坐標，向量長度平方可以寫成 $x^2+y^2+z^2-t^2$ ，和四維歐氏空間的對應 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 有些差異，但是兩者都屬於平坦的時空或空間。

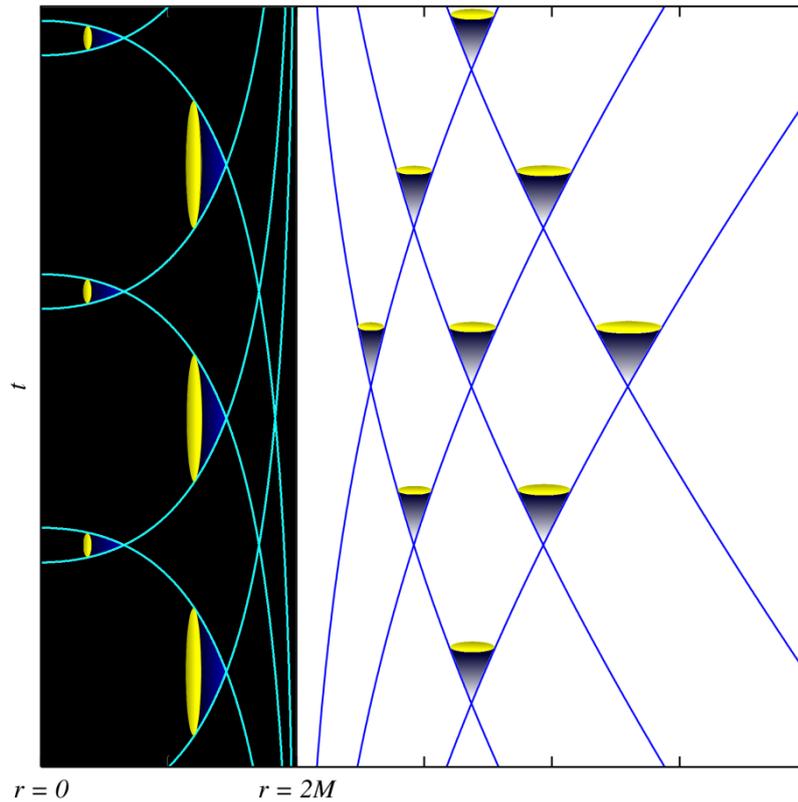


圖一（左）歐氏空間中繞原點旋轉後向量長度不變（ $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ）。（右）
閔考斯基空間中的旋轉，向量長度不變（ $x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$ ），旋轉角 ψ 由相對速度
 v 決定。光總是沿著 45 度的直線（光錐）傳播（ $x^2 - t^2 = 0, c = 1$ ）。（圖片來源：
Wikipedia.org）

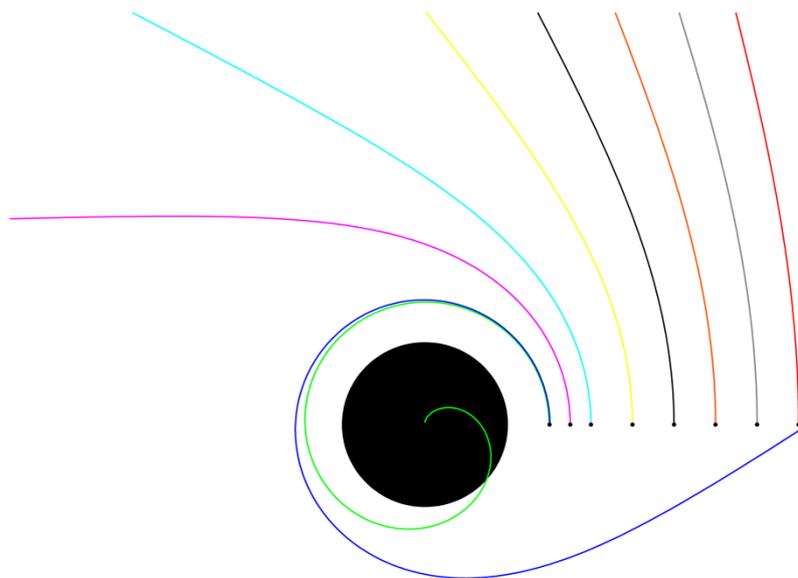
廣義相對論與黑洞

時間和空間不再是絕對的，這「四維時空連續才是物理的實體」（註一）。但是要如何把慣性原理的相對性推廣到非均勻的運動？愛因斯坦注意到由加速度定義的慣性質量與萬有引力定律的重力質量兩者間的關連，古典物理並沒有解釋。1915 年他發表了廣義相對論，距今恰好一百年。廣義相對論可以說是愛因斯坦的重力理論，它的核心是愛因斯坦方程式。牛頓的重力定律有許多不同的寫法，譬如任意質量質點所產生的力、單位質量質點所產生的重力場或重力位等等。愛因斯坦方程式有些類似，方程式左邊描述時空彎曲的程度，右邊則和質量、能量密度以及動量、壓力等有關。用惠勒的話說，「物質與能量決定時空如何彎曲，彎曲的時空則決定質點該如何運動」。百年來，許多實驗驗證了這方程式的正確性，包括光線在彎曲時空中的偏移、重力透鏡、水星近日點的移動、重力場所產生的時間膨脹效應（重力紅移）等等。許多現象也都寫進了電影的場景中。

如果能把整個太陽的質量壓縮到圓周長約 18 公里範圍之內，就會形成一個連光也無法脫離的「視界」（event horizon，圖二）而形成黑洞，視界的大小和質量成正比。觀測驗證遙遠又微小的黑洞視界非常困難，星系核心和類星體的研究（參閱本刊 2013 年 11 月）透露出一線曙光。黑洞幾乎不發光，光線經過黑洞附近會有明顯的偏折（圖三）。從遠處看，黑洞的引力就像普通的天體，行星、恆星、甚至於另一顆黑洞都可以繞著它運行，就像地球繞著太陽。黑洞吸積物質的過程，好比射飛鏢落在紅心外的機率高，星際物質或星球通常都移動快速，不會直接撞進黑洞，比較可能在周圍形成「吸積盤」發光發熱，減少能量和角動量後再慢慢墜入黑洞。從地球上，已知視直徑最大的黑洞應該在我們銀河系的中心，質量約太陽的四百萬倍，有許多恆星環繞，尚未觀測到吸積盤。和活躍星系核心的超大質量黑洞相比，銀河中心的黑洞相對比較溫和。

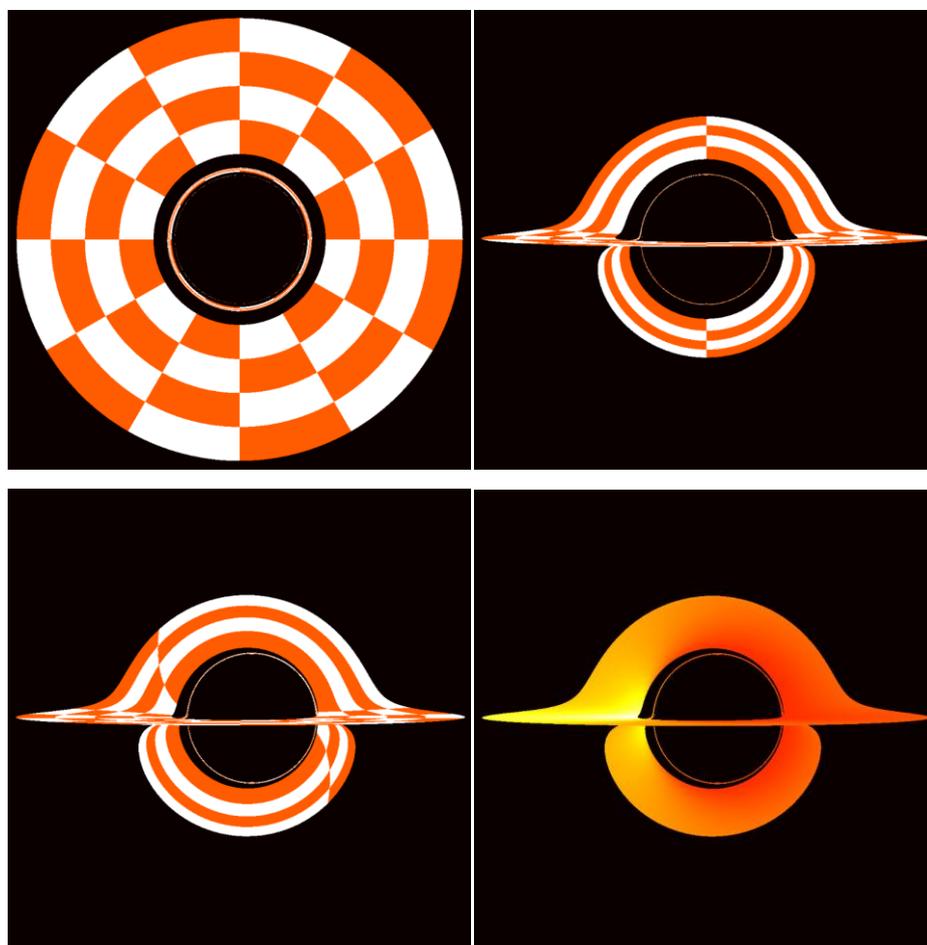


圖二 球對稱黑洞附近的時空圖一例，縱軸是時間坐標，橫軸是徑向坐標。視界位在 $r = 2M$ 處，稱「史瓦西半徑」； $r = 0$ 是奇異點，時空曲率無窮大。曲線代表光線的時空軌跡（世界線），小圓錐（光錐）顯示所有質點可能的移動方向。在黑洞內部 ($r < 2M$)，所有質點包含光線都只能向奇異點移動。



圖三 與視界表面平行發射的光線在球對稱黑洞(史瓦西黑洞)周圍的偏折情形。當 $r < 3M$ 時 (綠線)，光線會落入黑洞。

牛頓力學中，潮汐力（tidal force）就是重力的差或微分；在相對論中，大致相當於時空的曲率。如果有「天上一小時，相當於地上七年」的時間膨脹效果，必須非常接近黑洞視界。太空船靠近太陽質量般大小的黑洞視界幾公里附近，一定會被潮汐力扯成碎片；但是在太陽質量一億倍的超大質量黑洞旁卻可能安然無恙，因為它的視界比地球繞太陽軌道還要遠。不過，這超大黑洞旁的行星所受到的潮汐力大約也是太陽對地球潮汐作用的一億倍！此外，黑洞還可能有自轉，有些黑洞自轉非常快，帶動周圍的時空接近光速旋轉。想像黑洞旁有一圈類似土星環般扁平發亮的吸積盤，彎曲時空的光偏折讓我們還可以看到黑洞背後的盤面上下兩側（圖四）。目前，天文觀測計畫正在進行中，或許不久之後就能看到真正的黑洞視界。



圖四 a) 從靜止黑洞的上方觀察，可以看到扁平的吸積盤面，和盤內緣被黑洞偏折的影像（圖中內部細圈）。b) 從傾斜的角度觀察，原本被黑洞擋住的盤面上方（上方凸起）和盤面下方（下方凸起）都可以看見。c) 中心黑洞本身的自轉會進一步扭曲吸積盤的影像。d) 實際吸積盤內外圍溫度等性質可能有所不同。因吸積盤旋轉和重力紅移所產生的都卜勒效應也有影響（註二）。（卜宏毅博士提供）

蟲洞、弦理論與高維時空

黑洞視界上的時空曲率有限，但是有去無回。另一方面，越接近中心，曲率（潮汐力）無限大的「奇異點」（singularity）更是太空旅行者的終極夢魘。當年爲了拯救好友薩根（Carl Sagan）筆下《接觸未來》中的主角，索恩等人設計出一種沒有視界，沒有奇異點，理論上有可能用於星際旅行的時空通道—「蟲洞」（wormhole）。傳統教科書中，學習廣義相對論通常給定某種對稱的物質能量分布，然後分析可能的時空幾何；紙上建造蟲洞則先設定所需要的時空幾何，再找出這彎曲時空所對應的質能分布。就像早年固態物理常常從自然界材料的結構開始，研究物質的電、磁或光學等性質；近年卻常見先設定想要的電、磁等特性，再探求可能的天然物質或超穎材料（metamaterial）。

質能不像電荷有正有負，牛頓重力總是相互吸引。一組非自然條件任意寫下的時空幾何所對應的「特異物質」（exotic matter）是否存在並足以維持通道穩定不無疑問。近年蟲洞研究雖然有相當的進展，但仍未蓋棺論定。其中牽涉的特異物質和因果論等實際問題可能和尚未問世的量子重力理論有關。古典的真空空無一物，自然沒有引力；量子力學的真空中能量期望值爲零，可以起伏不定。量子力學與相對論是當今物理學的兩大支柱，兩者都經過相當廣泛的驗證，但是彼此之間就像十九世紀的牛頓力學與電磁學並不相容。弦理論的研究是當前最看好的方向之一，然而它的時空包含了 10 個維度，統一的 M 理論更包含了 11 個維度。物質與電磁力或許陷在四維的時空膜世界（brane）裡，唯獨重力（彎曲的時空）可以滲透到其他維度。但是其他維度的空間必須很小，否則牛頓的平方反比定律應該早就被推翻了。高維時空中是否有其他有形的個體甚至生命存在？它們的重力變化是否會顯現在我們周遭的重力異常？實驗與觀測證據值得特別注意。

索恩在新書中將已知的科學事實、有一定依據的猜想、以及如蟲洞這類較縹緲的推測三者做了區分。如果您是科幻迷或物理控，您一定不想錯過把四維時空夾成三明治的「反德西特空間」、黑洞內部較溫和的其他奇異點、如何透過超立方體觀察隔壁房間、仿效電力磁力線但用來顯現彎曲時空的張力線（tendex）、還有許多爲電影補充的科學外傳。但是，如果那彎來扭去的時空讓您的腸子打結，腦子短路，或許該坐下來欣賞或再次回味 IMAX 銀幕上那透過精密計算，經由黑洞或蟲洞所扭曲的吸積盤和絢爛星空。這可是連相對論學者也未曾見識過的模擬結果（註三），就像依藍圖所建造的摩天樓，在電影藝術下首次呈現觀眾眼前。

註一 愛因斯坦，《相對論的意義》

註二 吸積盤動畫可參考 <http://pansci.tw/archives/72705>

註三 相關論文已於二月中在網路上發表（arXiv:1502.03808, 1502.03809）