

國立中央大學

天文研究所

碩士論文

星系中磁場、宇宙射線、
超新星產生率的關係

研究生：蔡殷智

指導教授：高仲明 博士

中華民國八十四年六月

致謝

常言道『一將功成萬骨枯』。

一本薄薄的論文，雖只五十來頁，一萬五千多字，但背後總有不少的心血和故事。

能完成這本論文，要感謝很多人、事、物。

首先感謝我的老闆，高仲明博士，感謝他收留我這頑劣之徒，並耐心指導我完成這本論文。

還有現在在國外的陳啓榮博士，他對我的研究給了相當多的幫助。

感謝江碩士瑛貴，在數學方面幫了很大的忙。

感謝鄭碩士永志，他幫我改了一個重要的字，然後要我記得在致謝提一提他。

感謝劉碩士文煌，在論文的末期，適時伸出援手，使我能順利完成排版。

還有，謝謝 *Josephine* 學妹教了我一點點的德文，雖然最後在德文論文的研讀上，幾乎沒有發揮任何的作用。

感謝碩士後助理老林，在排版方面，提供了原始的檔案。

感謝高氏集團所有成員，每週的 *meeting* 因為有你們而不會枯燥、無聊，希望這種歡樂的 *meeting* 風氣能永遠持續。

感謝直屬學妹美燕，做為一個怪學長的怪學妹，她很成功。更難得的是她有一個漂亮的妹妹和很有價值的男朋友。

感謝電玩市的市長阿扁，沒有他提供的 *game*，我的 *computer* 一定蒙上了一層灰。

當然，絕不能忘了感謝天文台那票曠男怨女，長老、老林、老黎、小郭、桂X、鳥瑾、老何這組小北斗七星，沒有和他們這票人廝混，我大概早就掛了。

感謝我的研究伙伴小蔡，當然誰都知道，我們做得最好的研究不在天文。

感謝三年來陪伴過我的人、事、物，感謝那些因論文而倒下去的樹，感謝天，
沒有天，就沒有天文。

感謝我的父母，沒有他們就沒有我。

摘要

我們研讀星系之一普遍現象——遠紅外線與無線電波的相關，以此為主幹，試著去建構一個簡單的模型，來說明星系中磁場、宇宙射線、超新星產生率的關係，及其隨時間演化的情形。

從星系中磁場、宇宙射產生率的關係，我們忽略許多細微的機制，假設了一組屬於非線性自主系統的方程為模型。希望藉此模型可以了解星系中磁場、超新星產生率、宇宙射線隨時間的演化。

我們的模型有五個參數，藉以描述不同星系的狀態。調整參數可得到不同的磁場、超新星產生率、宇宙射線隨時間演化的情形。常見的情況是宇宙射線能量緩緩遞增到穩定態，而超新星產生率與磁場能量則以較陡的斜率遞減到穩定態。調整宇宙射線能量的初始值會影響演化到穩定態的時間，並且改變磁場、超新星產生率、宇宙射線隨時間演化的曲線，使磁場能量和超新星產生率在遞減會前出現遞增的情形。

另外，從模型的解可知，我們的模型是符合遠紅外線與無線電波的相關的，對於遠紅外線與無線電波的相關常見到的瀰散現象，我們解釋為不同狀態的星系在尚未演化到穩定態時表現出的特性。另外，如果模型的參數是任意，能量均分對我們的模型來說是不對的。

無法確定地提供星系演化的演化時間，這是我們模型的一項缺點。

目錄

1	簡介	1
2	遠紅外線與無線電波的相關	3
2.1	遠紅外線與無線電波的相關的歷史	4
2.2	描述遠紅外線與無線電波的相關的參數	4
2.3	遠紅外線與無線電波的相關的解釋	5
2.3.1	星系中的無線電波	7
2.3.2	星系中的遠紅外線	8
2.3.3	量熱計理論	8
2.4	遠紅外線與無線電波的相關的一些問題	11
2.4.1	星系質量的影響	11
2.4.2	磁場的影響	12
2.4.3	能量均分	13
3	模型的建構	14
3.1	宇宙射線	14
3.2	超新星產生率	15
3.3	星系的大尺度磁場	18
4	方程組的分析與求解	21
4.1	無因次化	21
4.2	數學工具	22

4.3	分析過程	26
4.4	解的型態	31
5	結果	34
6	討論	45
6.1	星系中磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量的關係	45
6.1.1	模型的參數與物理	45
6.1.2	穩定態與能量均分	45
6.2	遠紅外線與無線電波的相關	46
6.2.1	穩定態與遠紅外線與無線電波的相關	46
6.2.2	非穩態與遠紅外線與無線電波的相關的彌散	47
6.3	模型、本銀河與爆發星系 M82	49
	參考文獻	52

表格

1	特徵方程式的解的性質	27
2	不同定點的 $b = 0, c = 0, b^2 - 4c = 0$ 的方程	30
3	兩個定點間的四種組合	32

圖例

1	遠紅外線與無線電波的相關	3
2	遠紅外線與無線電波的相關的擬合	5
3	非線性的遠紅外線與無線電波的相關	6
4	除去質量效應後的遠紅外線與無線電波的相關	7
5	M82的無線電波觀測	8
6	量熱計理論示意圖	9
7	cool-FIR/nonthermal radio	10
8	warm-FIR/thermal radio	10
9	FIR-radio correlation 與宇宙射線逃脫率	11
10	磁場與FIR-radio correlation 的彌散的相關性	12
11	磁場與FIR-radio correlation 的線性程度的相關性	12
12	雲氣中離子的化學變化	16
13	宇宙射線能量對電離度的影響	17
14	正回饋系統	18
15	極向磁場產生環向磁場	19

16	環向磁場產生極向磁場	19
17	節點	24
18	鞍點	25
19	焦點	25
20	$I = 1$ 時，解在定點附近的特性	33
21	兩個定點的四組解曲線	39
22	狀況(b)下，解在焦點附近的局部放大圖	40
23	狀況(a)，參數 $(I, J, K) = (1, 12, 2)$ 時，CR ,SN 和B與時間的關係	41
24	狀況，參數 $(I, J, K) = (1, 50, 0.13)$ 時，CR ,SN 和B與時間的關係	42
25	狀況(c)，參數 $(I, J, K) = (1, 3, 4)$ 時，CR ,SN 和B與時間的關係	43
26	狀況(d)，參數 $(I, J, K) = (1, 0.5, 4)$ 時，CR ,SN 和B與時間的關係 . . .	44
27	由模型推出的 FIR-radio correlation 的彌散	48
28	$I = 2$ 時，解在定點附近的特性	51

1 簡介

一九九三年夏天，我們對星系中一個普遍的現象——遠紅外線與無線電波的相關感到興趣，並做了一番研讀(蔡殷智1994)。從文獻中了解到，星系中遠紅外線與無線電波的緊密相關發生的原因，與星系中的超新星產生率、宇宙射線、磁場有關，於是我們從中得到一些啟發，希望能建構一個簡單的模型，來描述星系中磁場、宇宙射線、超新星產生率的關係，及其隨時間演化的情形。

星系中磁場、宇宙射線、超新星產生率的關係，是一個有趣但相當複雜的問題。我們想建構的只是一個簡單的模型，要求能對星系中磁場、宇宙射線、超新星產生率的關係給出一個概括性的輪廓，所以我們並不仔細討論這三者間所有可能的物理機制，比如超新星的震波產生宇宙射線的機制、產生星系磁場的機制等，這些以粒子、場、波間的交互作用為主的討論，而是從宏觀的角度去找出三者間存在的一些簡單的關係，例如宇宙射線能量與超新星產生率成正比、磁場與超新星有一關係等以磁場、超新星產生率、宇宙射線為主體的討論。我們以這些粗略的關係為素材，來建構我們的模型。

在第二章中我們對遠紅外線與無線電波的相關做了一個回顧。遠紅外線與無線電波的相關是星系的一個普遍現象，而其產生的原因與星系中磁場、宇宙射線、超新星產生率有相當的關係，因而我們以此為建構方程的第一個線索。本章中我們將介紹遠紅外線與無線電波的相關的現象、現行解釋、這個領域的一些理論、發展和問題。

在第三章中，我們討論星系中的宇宙射線、超新星產生率和磁場，從能量的觀點來考慮三者間的關係。超新星殘骸會加速宇宙射線，宇宙射線會游離星際物質，影響恆星形成，進而影響超新星的產生，超新星產生湍流，湍流產生磁場，磁場引發同步加速輻射等。從這些機制與理論，我們建構了我們的模型。

對我們的模型分析、求解將在第四章詳述。我們的模型在數學上是非線性自主系統，我們依照這類問題的一般方法，討論解的型態，解的型態依參數的不同而有穩態節點、不穩態節點、鞍點、穩態焦點、不穩態焦點五種。

我們的結果將在第五章呈現。我們模型的解有四大類型，每一類我們都挑了三種結果，來描述不同星系中的宇宙射線、超新星產生率和磁場隨時間演化的情形。

第六章對我們的模型作了一些討論，包含模型參數的物理意義、與遠紅外線與無線電波的相關的關係、與能量均分理論的關係，甚至應用於爆發星系M82，還有對我們模型的批評與期許。



2 遠紅外線與無線電波的相關

遠紅外線與無線電波的相關(far-infrared and radio correlation, 簡稱FIR-radio correlation, 以後以FIR-radio correlation表示), 自早期論文發表以來(Dickey & Salpeter 1984; de Jong et al. 1985; Helou et al. 1985), 迄今(1995)不過十餘年, 這是一個頗新的領域。FIR-radio correlation描述一個有趣的事實: 在縱軸為無線電波強度, 橫軸為遠紅外線強度的圖上, 許多不同種類的星系竟然排在一條近乎直線的窄帶上, 如圖1。

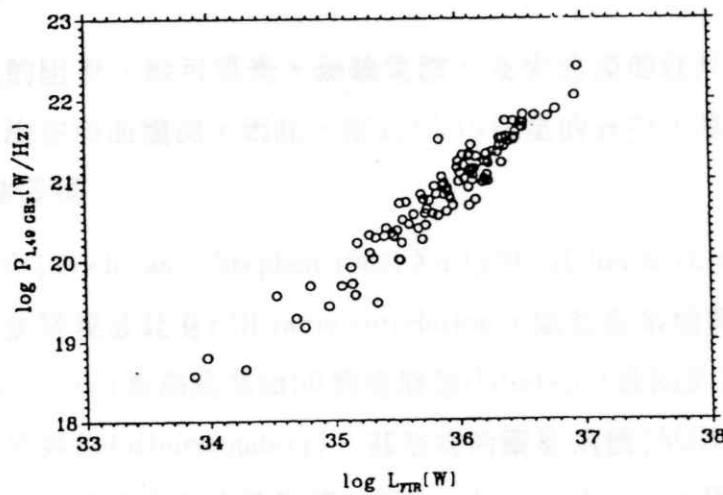


圖1: 遠紅外線與無線電波的相關 (出自 Lisenfeld 1993)

這項觀測成果是天文衛星 IRAS (Infra-Red Astronomical Satellite) 的一項成就, IRAS 提供了這些星系 40-120 μm 間的數個波段的觀測資料 (主要為 60 μm 、100 μm 兩個波段), 而無線電波方面的資料則得力於地面無線電望遠鏡的觀測, 主要波段為 1.49 GHz。

2.1 遠紅外線與無線電波的相關的歷史

在IRAS尚未升空前，van der Kruit在對西佛星系(Seyfert galaxy)的研究中，發現其核心在中紅外線波段($10\mu\text{m}$)和無線電波段(1415MHz)有一相關性(correlation)(van der Kruit 1971)。之後，他發現正常漩渦星系的核也有這種現象(van der Kruit 1973)。原先大家認為造成紅外線與無線電波的原因是核心的不明機制(例如巨大的黑洞)。後來有人指出(Harwit & Pacini 1975)，紅外線的機制應當是電離氫區(H II region)的加熱，而無線電波則來自於超新星殘骸內高速電子的同步加速輻射。由於電離氫區與超新星殘骸並不限於星系核心才有，因此人們認為漩渦星系的盤面應該有FIR-radio correlation。

限於地球大氣的阻礙，除可見光、無線電波、及少述幾個紅外線波段外，其他波段的輻射都無法在地面觀測，因此，直到IRAS衛星的升空，星系的FIR-radio correlation才真正被發現。

在衆多的研究中(Nicholas & Stephen 1989; Xu 1990; Helou & Bicay 1993)，各種類型的星系被觀測並發現彼此有FIR-radio correlation，這些星系種類包含正常漩渦星系(從早期型(early-type)漩渦星系如S0到晚期型(late-type)漩渦星系如Sc都有)、不規則星系、爆發星系(starburst galaxy)、甚至有活躍星系核(AGN)的星系亦包含其中。除橢圓星系外，幾乎所有的星系都有FIR-radio correlation。因此，FIR-radio correlation可說是星系的一個普遍的現象。

另外，其他波段的correlation也被廣泛地研究過，包含X-光、可見光、近紅外線等，但其中FIR-radio correlation最緊最密(Hummel et al. 1988)。

2.2 描述遠紅外線與無線電波的相關的參數

典型的FIR-radio correlation如圖1所示，橫軸是遠紅外線的強度的對數，縱軸是無線電波的強度的對數，圖上每一個點則對應一個被觀測的星系。描述這樣一個圖需要一些重要參數如：相關性 γ 、瀰散(scattering)程度 σ 、斜率 m 。以圖1而言，

分別是 $\gamma=0.96$ 、 $\sigma=0.2$ 、斜率 $m = 1.3 \pm 0.03$ (Lisenfeld 1993)。

從FIR-radio correlation發現後，相繼有許多的相關研究(Beck & Golla 1988; Condon & Yin 1990; Condon, Anderson & Helou 1991; Davies 1991; Condon 1992; Xu et al. 1994; Xu, Lisenfeld & Völk 1994)，由於採用的星系數目不同，種類不同，資料處理(data reduction)方法不同，得到的FIR-radio correlation圖形有些許的差異。如圖2所示，其擬合(fitting)的結果為兩段不同斜率的直線，在較高強度的FIR，FIR-radio correlation的斜率變得陡峭。圖3則是一個非線性的FIR-radio correlation (Xu et al. 1994)。

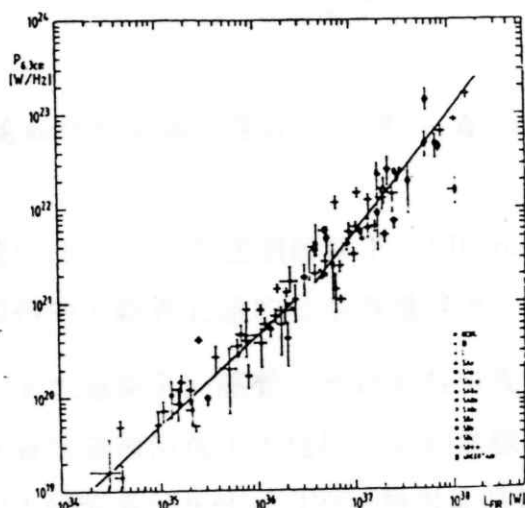


圖2: 遠紅外線與無線電波的相關的擬合(出自 Wielebinski et al. 1987)

但是儘管FIR-radio correlation圖形有些許的差異，大致上，FIR-radio correlation呈現的是斜率大致為1，非線性程度不大，瀰散程度低，相關性緊密的圖像。

2.3 遠紅外線與無線電波的相關的解釋

關於FIR-radio correlation，可以有一個淺易的解釋，質量越大的星系擁有越多的星，因而整個星系發出的能量也越多，相對地無線電波和遠紅外線的能量也越多

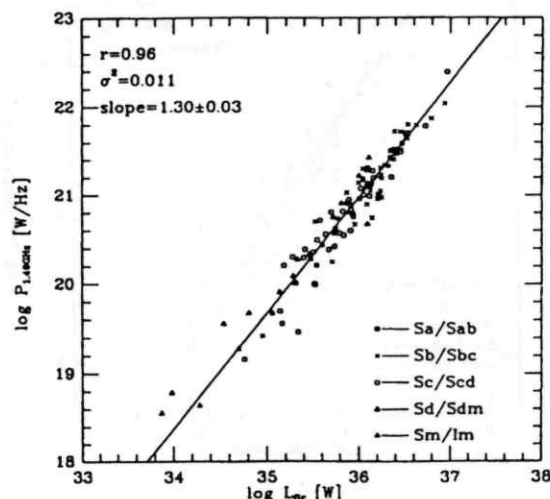


圖3: 非線性的遠紅外線與無線電波的相關 (出自 Xu et al. 1994)

。這個解釋就叫質量效應(richness)。在這個解釋下，FIR-radio correlation可以描述星系的質量，在圖上的窄帶中，越靠右邊的星系質量越大。

但是這樣的解釋令人有太過簡單的感覺，於是有些研究試圖除去質量對無線電波和遠紅外光的影響，來看看這種情況下，遠紅外線和無線電波是否仍有相關性。圖4 就是一個這樣的例子，研究者(Xu et al. 1994)利用星系質量與H-band光度間的關係，求出星系的質量，然後將遠紅外線和無線電波的強度分別除以質量，比較尚未除去質量的圖3和處理後的圖4，我們可知，扣除質量後，相關性的緊密程度變差了，可見質量效應有一定的影響力，但是從圖4仍有相當好的相關性看來，造成FIR-radio correlation另有其他原因。以下先從星系中的無線電波和遠紅外線兩個方向來討論造成FIR-radio correlation的原因，再介紹解釋FIR-radio correlation方面廣為接受的量熱計理論(calorimeter theory)。

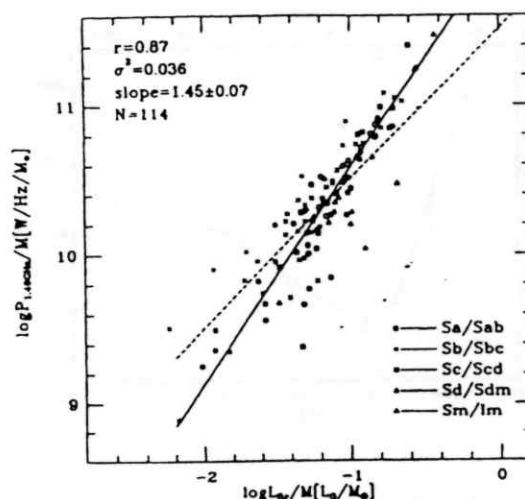


圖4: 除去質量效應後的遠紅外線與無線電波的相關 (出自 Xu et al. 1994)

2.3.1 星系中的無線電波

星系中的無線電波依其產生機制可分兩類：帶電粒子間的自由-自由躍遷輻射 (free-free emission) 和高速電子在磁場中產生的同步加速輻射 (synchrotron radiation)。圖5為爆發星系 M82 在無線電波段和遠紅外線波段的強度分佈圖，短線-點相間的線代表同步加速輻射，點線代表自由-自由躍遷輻射，由此可看出這兩種輻射的相對強度，圖中的短線則代表星系中的灰塵的輻射，將在下小節討論。

帶電粒子間的自由-自由躍遷輻射，因其帶電粒子是由熱輻射的電離作用所產生，所以因這個機制所產生的無線電波稱做熱無線電波輻射 (thermal radio emission)，而相對地，不直接與熱輻射有關的同步加速輻射則稱為非熱無線電波輻射 (nonthermal radio emission)。一般認為，熱無線電波輻射產生在巨大質量的星附近，其相當高的溫度使周圍的雲氣電離，這些被電離的電子間便互相作用而產生熱無線電波輻射。而非熱無線電波輻射則源自超新星殘骸，由於超新星爆炸產生了大量的電子，這些高速電子在星系中運動，受到幾個微高斯 ($10^{-6}G$) 的星系磁場的牽引而改變運動方向，同時產生同步加速輻射。星系的無線電波，大部份是屬於非熱輻射的。

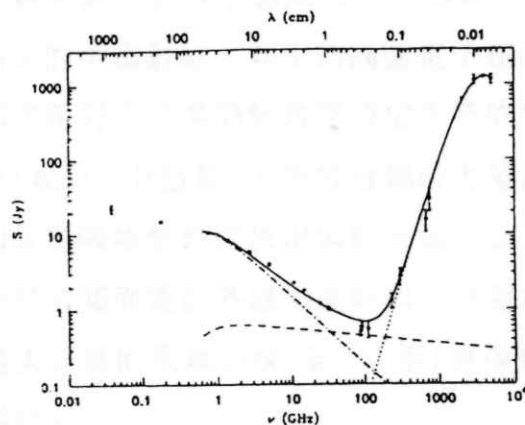


圖5: M82的無線電波觀測(出自 Klein, Wielenbinski & Morsi 1988)

2.3.2 星系中的遠紅外線

星系中的遠紅外線，一般認為，其產生的機制為星系中的灰塵(dust)，吸收來自星球的高能光子(如UV)。吸收了一部份能量，然後將剩餘的能量以低能的光子(如遠紅外線)釋出。而灰塵根據其溫度的高低又分為兩類，暖灰塵(warm dust)和冷灰塵(cold dust)。暖灰塵溫度為30-40K，冷灰塵則為10-15K。一般相信，暖灰塵是由電離氫區所加熱，而冷灰塵則由星際輻射場(ISRF)所加熱，但也有另外的看法(Xu et al. 1994)，他們認為對冷灰塵貢獻最大的是5-20 $M_{\odot}$ 的星球，而暖灰塵則為20 $M_{\odot}$ 以上的星球所貢獻的。

星系中的遠紅外線產生地區，冷灰塵與暖灰塵的比例，一般認為暖灰塵佔了大部份，約65%，而冷灰塵只佔35%，但沒有一定的結論。在有些研究中，冷灰塵佔比較重的地位(Xu et al. 1994)。

2.3.3 量熱計理論

任何現象都會有許多的理論來解釋，FIR-radio correlation也不例外，而在這麼多種理論中，Völk在1989提出的熱量計理論(calorimeter theory)算是較為一般所接受的理論(Völk 1989)。

量熱計理論，我們可以將其概念以示意圖表示，如圖6。先從圖形的右邊說起，超新星的爆炸產生了高速的宇宙射線，其中的高速電子在星系磁場中運動而產生同步加速輻射，而同步加速輻射在星系的無線電波佔主要的地位。再說圖形的左邊，星系中大質量星的形成(如O、B型星)，通常會輻射大量的紫外線而在星球附近造成電離氫區，星系中的灰塵吸收紫外線放出遠紅外線，成了遠紅外線的來源。因此，無線電波強度與超新星有關而遠紅外線強度則與大質量星球的形成有關，從星球演化的理論，我們知道大質量的星球很快(約 10^7 年)會演化成超新星，所以無線電波與遠紅外線有一相關性。

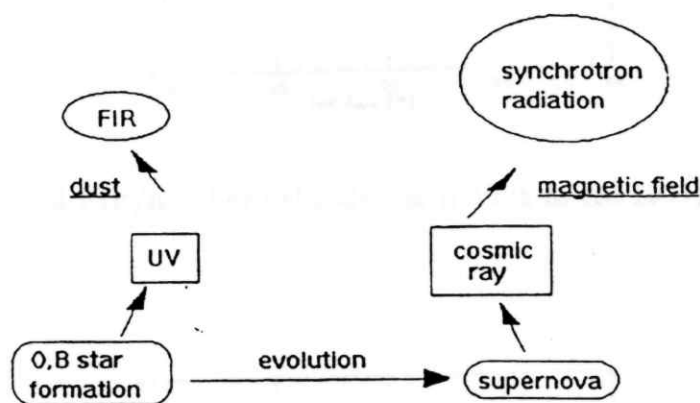


圖6: 量熱計理論示意圖

在量熱計理論中，星系對紫外線與宇宙射線都是光學厚的(optically thick)，即紫外線與宇宙射線都會在星系內被吸收，而無法溢出，這也是取名為量熱計理論的道理。

近來的研究(Völk & Xu 1994)建議， $5-20M_{\odot}$ 的星球是FIR-radio correlation的主角，他們的輻射加熱了冷灰塵，並且演化成超新星。

這些研究並建議，冷灰塵對無線電波的相關性比暖灰塵好，如圖7與圖8所示。因此他們認為應分成兩種：cool-FIR/nonthermal radio correlation和warm-FIR/thermal radio correlation。前者對應 $5-20M_{\odot}$ 的星球的形成與死亡，後者則對應 $20M_{\odot}$ 以上的星球。 $20M_{\odot}$ 以上的星球其高溫加熱了暖灰塵，同時使星際物質電離產生電子而產

生自由-自由躍遷輻射。

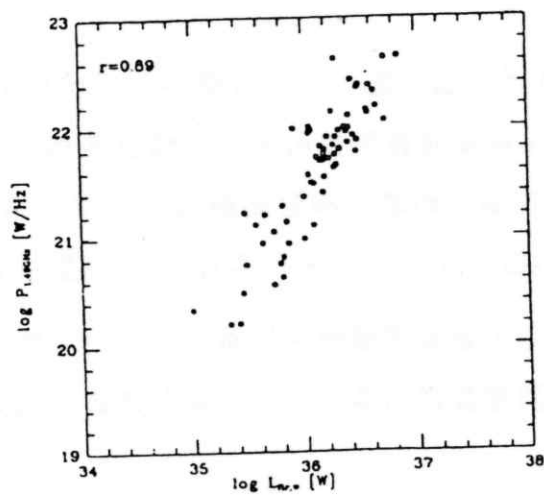


圖7: cool-FIR/nonthermal radio(出自 Völk & Xu 1994)

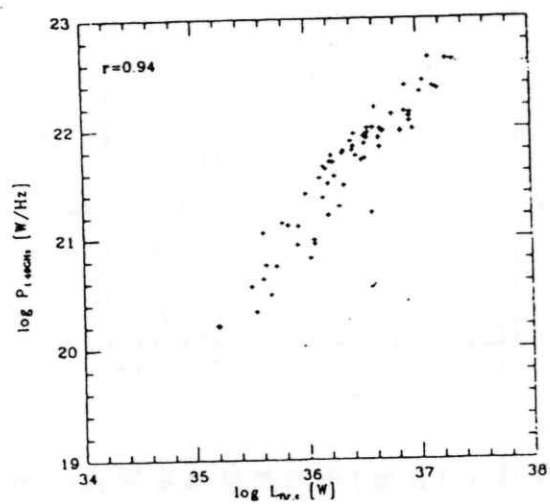


圖8: warm-FIR/thermal radio(出自 Völk & Xu 1994)

2.4 遠紅外線與無線電波的相關的一些問題

2.4.1 星系質量的影響

相對於量熱計理論，Chi & Wolfendale 提出另外一套理論 (Chi & Wolfendale 1990)。與量熱計理論最大的不同在於其理論中，宇宙射線會從星系中逃脫，如圖9所示，FIR-radio correlation 成了星系對宇宙射線捕獲率的指標，最左邊的4%表示96%的宇宙射線都逃出星系，最右邊的74%則表示只有26%的宇宙射線逃脫。

雖然這個理論並不廣受支持，但是從另一個觀點來看，宇宙射線容易逃脫的星系應是較小的星系，也就是小質量的星系，把它當成質量效應的一種，應該是可以說得過去的。

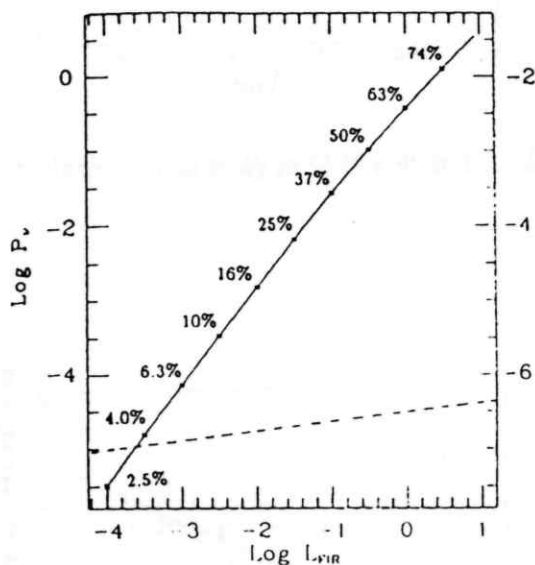


圖9: FIR-radio correlation 與宇宙射線逃脫率 (出自 Chi & Wolfendale 1990)

2.4.2 磁場的影響

早期曾經有一些說法，認為 FIR-radio correlation 的彌散是星系磁場的變化造成的 (Hummel 1986)，但後來的研究 (Fitt & Alexander 1993) 顯示磁場與彌散現象並沒有明顯的相關性 (見圖 10)，反而與 FIR-radio correlation 的線性程度有相關性 (見圖 11)，也就是說一個變化的磁場會導致 FIR-radio correlation 的非線性。

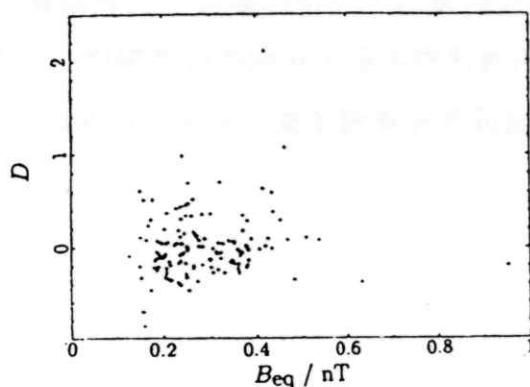


圖 10: 磁場與 FIR-radio correlation 的彌散的相關性 (出自 Fitt & Alexander 1993)

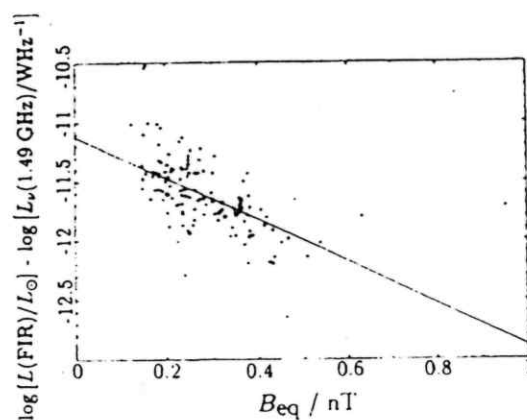


圖 11: 磁場與 FIR-radio correlation 的線性程度的相關性 (出自 Fitt & Alexander 1993)

2.4.3 能量均分

本銀河系的磁場可以藉由法拉第旋轉(Faraday rotation)或塞曼效應(Zeeman effect)等方法直接量得，但是其他星系的磁場就無法直接量得了，最容易觀測到而與磁場相關的現象就是同步加速輻射，通常都是觀測同步輻射，藉由一個假設，來求出星系的磁場。這個假設就是能量均分(equipartition of energy)，即假設宇宙射線的能量與磁場的能量是大約相等的。這個假設在本銀河系太陽附近有相當的證據支持，但是也僅此孤証而已。因此對有關外星系磁場的研究，能量均分假設的無法證實一直是項隱憂，FIR-radio correlation的研究也不例外，很多模型都用到了能量均分假說(Xu et al. 1994; Chi & Wolfendale 1990)。所幸近來不斷有研究間接支持這項假設(Hummel 1986; Davies 1991)。

3 模型的建構

我們試圖建立一個簡單的模型來描述宇宙射線、磁場和超新星產生率三者在星系演化中所扮演的角色，以及它們如何隨時間變化。在詳細的討論之前，我們可先勾勒出一個輪廓。在星系中，星球隨著演化逐漸老去，大質量的星在生命末期產生爆炸而成為超新星，超新星釋出了大量的能量、質量同時也產生了宇宙射線。另一方面，星系中的物質透過種種的機制又形成新的星球。此外，充斥星系之中的磁場也有作用，一方面可以約束宇宙射線，另一方面，磁場的產生與超新星有密切的關係。

3.1 宇宙射線

宇宙射線指的是星際的高能帶電粒子，其組成主要是質子、電子等，其中質子與電子的比例約為100:1。一般相信大部份的宇宙射線是在超新星的殘骸中為衝擊波所加速的(Völk, Zank & Zank 1988; Drury, Markiewicz & Völk 1989)。

宇宙射線從超新星產生，然後向星際空間傳播，由於與物質、光子、磁場發生交互作用，不斷地有能量的損失，主要的能量損失機制有：電離(ionization)、軀致輻射(bremsstrahlung)、絕熱膨脹(adiabatic losses)、反康普頓散射(inverse Compton scattering)及同步加速輻射。

我們想要建立一個方程式來描述宇宙射線在星系演化中所扮演的角色，首先，因為宇宙射線是被超新星殘骸(SNR)的衝擊波(shock)所加速(Völk, Zank & Zank 1988; Drury, Markiewicz & Völk 1989; Völk, Klein & Wiełebinski 1989)，我們得到一個關係： $dE_{cr}/dt \sim \nu_{sn}$ 即宇宙射線的能量隨時間的變化正比於超新星產生率。接著我們看看宇宙射線的能量如何損失。從FIR-radio correlation的研讀中，我們知道，在星系磁場的作用下，宇宙射線中的高速電子會和磁場產生同步加速輻射而損失能量，而質子與磁場則沒有可觀的相互作用，所以同步加速輻射是宇宙射線能量損失的主要機制，而從輻射理論可知，同步加速輻射的能量 E_{syn} 損失有如下的關係：

$dE_{syn}/dt \sim E_{cr}^2 B^2$ (Longair 1981)。綜合上述兩點，又磁場的能量 E_B 有 $E_B \sim B^2$ 的關係，我們假設了一條方程式：

$$dE_{cr}/dt = a\nu_{sn} - eE_{cr}^2 E_B \quad (1)$$

式中 a 、 e 是常數。

3.2 超新星產生率

從星球演化的理論得知，一顆星球的末路大概可分成兩種，一種隨著核心能源的消失，表面慢慢的冷卻，光芒慢慢地減少，在宇宙中漸漸黯淡，終至再也無法看見。這一類的星球通常質量小而且壽命很長。另一種星球通常質量大，在生命的末期會產生爆炸，將星球大部份的質量往外拋，留下中心的致密物質，中心致密物質則視其質量發展為黑洞、中子星或白矮星，這爆炸現象表現較為激烈的就叫超新星。這類星球壽命通常都很短(10^7 年)，相較於星系的壽命(大於 10^{10} 年)，不過是一瞬間而已。所以從星系演化的時間來看，這些會演化成超新星的星球壽命是極短的，短到可以將這些星球的形成和死亡視為同時。

由於會演化成超新星的星球多為大質量星，所以大質量星球的形成率與超新星產生率有一正比關係，一顆大質量星球產生後，其演化到超新星的路徑只與星球核心的反應有關，不會受到磁場與宇宙射線的直接影響。但是大質量星球的形成，磁場與宇宙射線就有其影響力了。

從文獻(Bettens et al. 1993)中，我們看到一個宇宙射線影響星球形成率(star formation rate)的理論。在這個理論中，宇宙射線造成星際物質的電離，而這些離子的生態有如圖12所示。我們重點放在圖中標有 H^+ Era 的那條線。氫原子被宇宙射線電離成氫離子，氫離子隨時間逐漸增多，這段時間稱為氫離子時期(H^+ Era)，然後有一個陡峭的遞減產生，這段時間稱為離子破壞時期(ion destruction era)，大量的離子在這段時間遭毀滅，然後離子數目就到達一個穩定態。

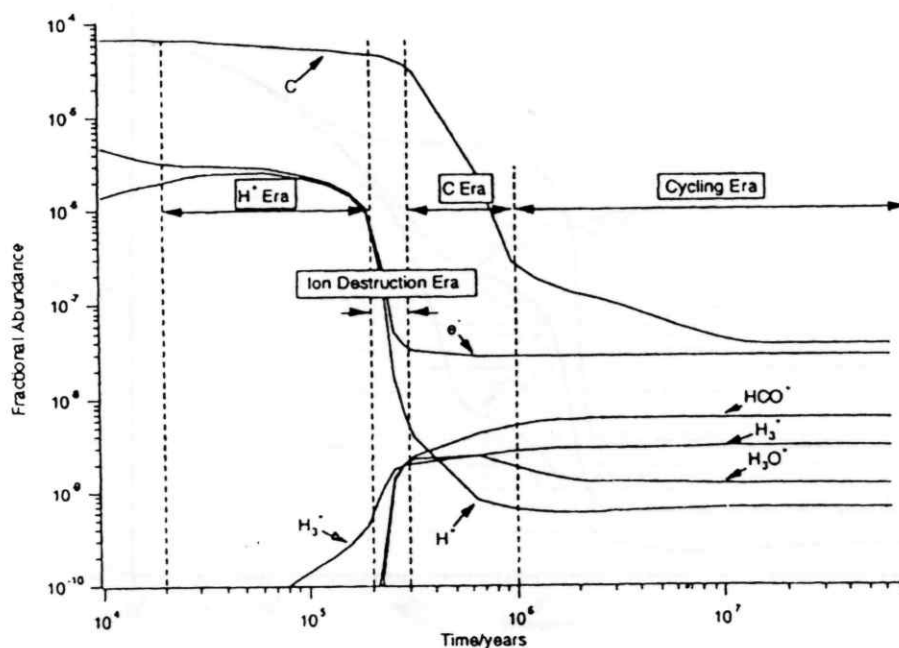


圖12: 雲氣中離子的化學變化 (出自 Bettens & Brown 1992)

現行的理論相信，星球是由星雲坍縮而產生的。在上述的理論裡，宇宙射線會使星際物質電離，使坍縮星雲裡的物質電離程度增高，電離程度增高的結果，會使收縮中的星雲花較長的時間才能完成坍縮，因此這段時間星雲會吸積較多的質量，於是增加大質量星的形成。

圖13 中顯示，針對不同的宇宙射線強度，其氫離子時期的長短各不相同，宇宙射線強度越強，氫離子時期越長，電離程度越高，雲氣坍縮時，可吸積質量的時間也越長，因而大質量星的形成率也會越大。這個理論的結論是大質量星的形成率與宇宙射線的能量成正比。

但是如果宇宙射線的能量高過一個臨界值，大質量星的形成率反而會受到抑制，因為這時宇宙射線的能量已經超過電離星際物質所需了，這時宇宙射線會將星際物質蒸發，而使得星雲無法坍縮了 (Field et al. 1969)。根據上述的論點，我們假設了一個方程式：

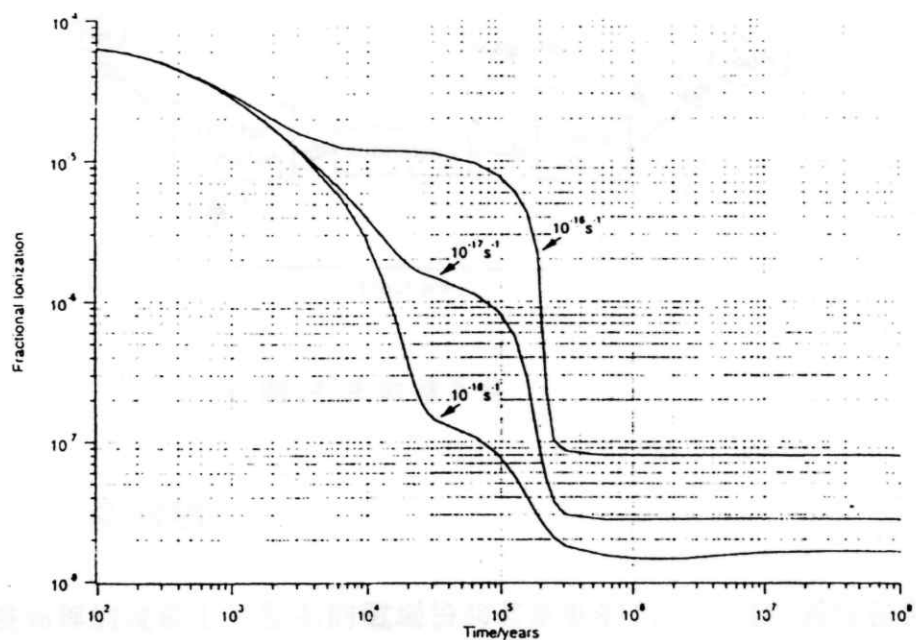


圖13: 宇宙射線能量對電離度的影響(出自 Bettens et al 1993)

$$\nu_{sn} = \nu_0 + lE_{cr}(E_0 - E_{cr}) \quad (2)$$

其中 l 是常數, ν_0 為超新星產生率的原始值, 代表在不考慮宇宙射線的影響下, 星系本身順著星球演化所該產生的超新星。 E_0 則代表宇宙射線的臨界值, 超過這個值, 星際物質會被宇宙射線蒸發。方程式右邊第二項, 代表宇宙射線電離星際物質的機制, 與超新星產生率 ν_{sn} 成正比, 理由是宇宙射線電離星際物質的機制, 與大質量星的形成率成正比, 而大質量星的形成率又與超新星產生率成正比。

結合(1)、(2)兩個方程式, 我們得到了如圖14 的一個正回饋模型。

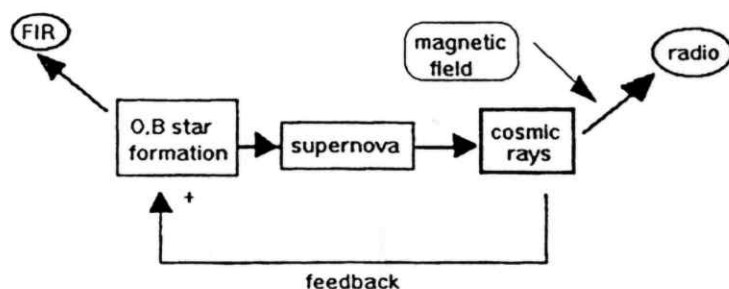


圖 14: 正回饋系統

3.3 星系的大尺度磁場

在許多天體物理的現象上，星系的磁場扮演著重要的角色，這些過程包含星球的產生，宇宙射線的傳播，同步加速輻射，FIR-radio correlation 等。因此，了解星系磁場是如何產生是很重要的，而產生星際磁場的理論，最為一般相信的則是發電機理論(dynamo theory)。

發電機理論的概念如同一般的發電機：由機械能產生電磁能。天體磁場可分成兩個方向，環形磁場(toroidal magnetic field)和極向磁場(poloidal magnetic field)，發電機理論的重要課題在於使極向磁場能產生環向磁場而環形磁場亦能產生極向磁場。在極向磁場產生環向磁場方面，如圖 15，天體內外轉動速度不同的較差自轉可以使極向磁場產生環向磁場。在環向磁場產生極向磁場方面，則一直是發電機理論的難題，直到 1955 年，Parker 提出湍流發電機理論(turbulent dynamo theory)，使這個問題獲得解決(Parker 1955)。如圖 16 所示，湍流產生的扭曲(twist)可以把環向磁場擰成極向磁場。

典型的星系磁場的發電機方程式如下：

$$\partial B / \partial t = \nabla \times (v \times B) + \nabla \times (\alpha B) - \nabla \times \eta (\nabla \times B) \quad (3)$$

右邊第一項代表星系較差自轉的影響，第二項則表示湍流的效應，第三項則代表磁

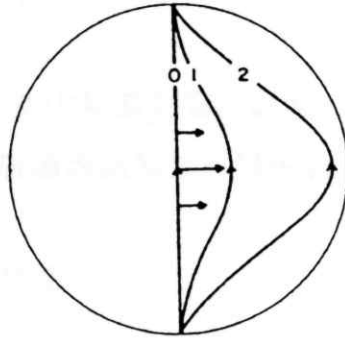


圖15: 極向磁場產生環向磁場(出自 Priest 1982)

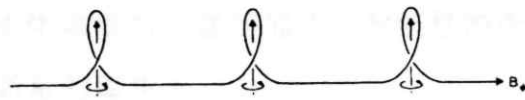


圖16: 環向磁場產生極向磁場(出自 Priest 1982)

場的擴散(diffusion)。由於解發電機方程式是一件大工程，因此我們將發電機方程式做了相當的簡化，抽取出一些想法，構成了我們模型的磁場方程式：

$$dE_B/dt = g\nu_{sn} - hE_B \quad (4)$$

其中 g 、 h 是常數。由於超新星會產生星際物質的湍流，所以右邊第一項描述湍流幫助磁場的產生，第二項則描述磁場因為擴散而損失能量。

總括上述的討論，我們的模型是：

$$dE_{cr}/dt = a\nu_{sn} - eE_{cr}^2 E_B \quad (5)$$

$$\nu_{sn} = \nu_0 + lE_{cr}(E_0 - E_{cr}) \quad (6)$$

$$dE_B/dt = g\nu_{sn} - hE_B \quad (7)$$

大略描述我們的模型，大質量的星經演化產生超新星，超新星的能量一部份產生宇宙射線，一部份變成動能，產生湍流，促進磁場的產生。磁場一方面促使宇宙射線產生同步加速輻射，一方面隨擴散損失能量。宇宙射線除產生同步輻射損失能量外，也電離星雲促使星產生率增加，從而加速了超新星的產生，但宇宙射線能量過大時，則反而會抑制超新星的產生。

4 方程組的分析與求解

4.1 無因次化

我們的模型如前所述，爲三個方程式，在分析求解上爲了方便，我們通常經過一些過程，使方程式變數變成沒有單位，而且也可使參數數目減少，這過程爲無因次化。

將方程(6)代入方程(5)得

$$dE_{cr}/dt = a[\nu_0 + lE_{cr}(E_0 - E_{cr})] - eE_{cr}^2 E_B \quad (8)$$

將方程(6)代入方程(7)得

$$dE_B/dt = g[\nu_0 + lE_{cr}(E_0 - E_{cr})] - hE_B \quad (9)$$

令

$$\begin{aligned} \tau = alE_0t, \quad \epsilon = E_{cr}/E_0, \quad \beta = eE_B/al, \quad I^2 = \nu_0/lE_0^2, \\ J = geE_0/a^2l, \quad K = ah/egE_0, \quad \nu = \nu_{sn}/lE_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

方程(8)可寫成

$$d\epsilon/d\tau = I^2 + \epsilon - \epsilon^2 - \beta\epsilon^2 \quad (11)$$

方程(9)可寫成

$$d\beta/d\tau = J[I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) - K\beta] \quad (12)$$

方程(6)可寫成

$$\nu = I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) \quad (13)$$

4.2 數學工具

我們的模型如上所示，這樣的一組方程，在數學上為形如

$$\dot{x} = X(x, y) \quad (14)$$

$$\dot{y} = Y(x, y) \quad (15)$$

的方程，稱為自主系統(autonomous system)，因為方程組右邊的函數不含時間的變數。另外，我們的方程組，其右邊含有非線性項，所以我們的模型在數學上是屬於非線性自主系統。面對這樣一個非線性自主系統，想要對解的性質充分了解，通常使用如下的一個標準的程序：

1、求定點(fixed point)：

首先，令 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ，求解 $X(x, y) = 0, Y(x, y) = 0$ 。如果其解為 $x = x_c, y = y_c$ ，則在 $x = x_c, y = y_c$ 上，變數的變化率為0，變數不再發生變化，物理上是穩態，故稱 (x_c, y_c) 為定點。

2、對方程組做線性化(linearize):

在定點 (x_1, y_1) 的附近，對 $X(x, y)$ ， $Y(x, y)$ 做泰勒展開(Taylor expansion)，則

$$X(x, y) = ax + by + O_1(x, y) \quad (16)$$

$$Y(x, y) = cx + dy + O_2(x, y) \quad (17)$$

$O_1(x, y), O_2(x, y)$ 是二次以上的項，在 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 趨近於0的情況下會趨近於0，這個過程稱為線性化。其中 $a = \partial X(x_1, y_1)/\partial x$ ， $b = \partial X(x_1, y_1)/\partial y$ ， $c = \partial Y(x_1, y_1)/\partial x$ ， $d = \partial Y(x_1, y_1)/\partial y$ 。線性化後方程如下：

$$\dot{x} = ax + by \quad (18)$$

$$\dot{y} = cx + dy \quad (19)$$

3、求特徵值(eigenvalue):

上述的方程，其非零解為 $x = re^{\lambda t}$ ， $y = se^{\lambda t}$ ，其中 r, s 為常數， λ 也是常數，稱為特徵值。將解代入上述方程式，得

$$(a - \lambda)r + bs = 0 \quad (20)$$

$$cr + (d - \lambda)s = 0 \quad (21)$$

這個方程欲有非零解存在，必須

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (22)$$

解上述方程式即可求出特徵值。

4、討論解的特性：

上述行列式展開為一二次方程式，其解為特徵值依特徵值的不同，系統的解會出現不同的性質：

a、節點(node)

當特徵值為正負同號的實根時，定點附近解的特性如圖17所示，在參數平面上，定點附近的解的演化趨勢是向定點趨近或遠離，前者為穩定節點，後者為不穩定節點。

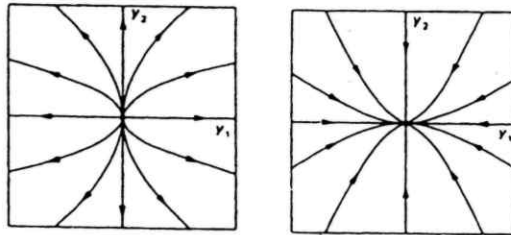


圖17: 節點，定點附近的解會向定點趨近或遠離，前者如圖右為穩定節點，後者如圖左為不穩定節點。(出自 Arrowsmith & Place 1992)

b、鞍點(saddle)

當特徵值為正負異號的實根時，定點附近解的特性如圖18所示，解的演化趨勢是永遠不會趨近定點，在接近到一定距離就會遠離，這種解是一定不穩定的。

c、焦點(focus)

當特徵值為複數根時，定點附近解的特性如圖19所示，解會在定點附近打轉，最後趨近或遠離定點，前者為穩定焦點，後者為不穩定焦點。

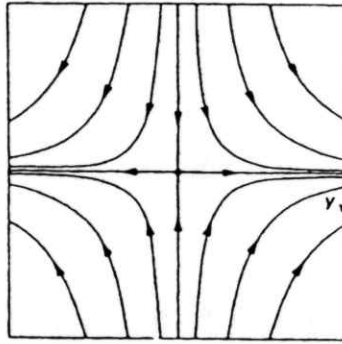


圖18: 鞍點，解的演化是永遠不會趨近定點。(出自 Arrowsmith & Place 1992)

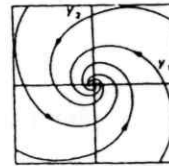
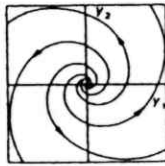


圖19: 焦點，解會在定點附近打轉，圖左會向定點趨近，為穩定焦點，圖右會遠離定點，為不穩定焦點。(出自 Arrowsmith & Place 1992)

4.3 分析過程

分析求解的方法，如上節所示。整個分析的過程，則在本節描述。

對我們的模型，首先我們令 $d\beta/d\tau = d\epsilon/d\tau = 0$ ，以便求方程(11)和(12)的定點，即

$$I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) - \beta\epsilon^2 = 0 \quad (23)$$

$$J[I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) - K\beta] = 0 \quad (24)$$

解方程組，得出4個定點 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ ， $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ ， $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 或 $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 。

接著我們做線性化，得出

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \epsilon - \epsilon_c \\ \beta - \beta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(1 + \beta_c)\epsilon_c & -\epsilon_c \\ (1 - 2\epsilon_c)J & -J\epsilon_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon - \epsilon_c \\ \beta - \beta_c \end{pmatrix} \quad (25)$$

接著求特徵方程式

$$\lambda^2 + [KJ + 2(1 + \beta)\epsilon - 1]\lambda + J(1 - 2\epsilon)\epsilon^2 + K[2(1 + \beta)\epsilon - 1] = 0 \quad (26)$$

此特徵方程式形如

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (27)$$

其中

$$b = [KJ + 2(1 + \beta_c)\epsilon - 1] \quad (28)$$

$$c = J(1 - 2\epsilon - c)\epsilon_c^2 + K[2(1 + \beta_c)\epsilon_c - 1] \quad (29)$$

對方程(27)討論其解的形式，得表1。

$c > 0$	$b^2 > 4c$	$b > 0$	$\lambda_1 < 0$	$\lambda_2 < 0$	穩定節點
		$b < 0$	$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	不穩定節點
	$b^2 < 4c$	$b > 0$	$Re(\lambda_1) < 0$	$Re(\lambda_2) < 0$	穩定焦點
		$b < 0$	$Re(\lambda_1) > 0$	$Re(\lambda_2) > 0$	不穩定焦點
$c < 0$			$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	鞍點

表1: 特徵方程式的解的性質

由表1可知，對 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ 這樣的特徵方程式而言，要討論定點的型態，必須知道在定點附近(i) $c = 0$ ，(ii) $b = 0$ ，(iii) $b^2 - 4c = 0$ 這三條線的分布情形。以下就這三條線在定點附近的分佈討論之。

(i) $c = 0$

$$J[(1 - 2\epsilon_c)(\epsilon_c^2 - K) + 2K\beta_c\epsilon_c] = 0 \quad (30)$$

因 $J \neq 0$ ，故

$$(1 - 2\epsilon_c)(\epsilon_c^2 - K) + 2K\beta_c\epsilon_c = 0 \quad (31)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\pm\sqrt{K}, \frac{1 \pm \sqrt{K} - K}{K})$ 而言， $2K\beta_c\sqrt{K} = 0$ 。又因為 $K \neq 0$ ，所以 $\beta_c = 0$ ，也就是

$$I^2 = K \mp \sqrt{K} \quad (32)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\frac{1 \pm \sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 而言， $\epsilon_c \neq 1/2$ ，所以 $\epsilon_c = \pm \sqrt{K}$ ，也就是

$$I^2 = K \mp \sqrt{K} \quad (33)$$

跟方程(32)一樣。

$$(ii) b = 0$$

$$KJ + 2(1 + \beta_c)\epsilon_c - 1 = 0 \quad (34)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\pm \sqrt{K}, \frac{I^2 \pm \sqrt{K} - K}{K})$ 而言，我們有

$$J = \frac{\mp 2I^2 - \sqrt{K}}{K\sqrt{K}} \quad (35)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\frac{1 \pm \sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 而言，我們有

$$J = \frac{\mp \sqrt{1+4I^2}}{K} \quad (36)$$

$$(iii) b^2 - 4c = 0$$

$$[KJ + 2(1 + \beta_c)\epsilon_c - 1]^2 - 4J[(1 - 2\epsilon_c)(\epsilon_c^2 - K) + 2K\beta_c\epsilon_c] \quad (37)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\pm \sqrt{K}, \frac{I^2 \pm \sqrt{K} - K}{K})$ 而言，我們得到

$$K^2 J^2 + (2K \pm 4I^2 \sqrt{K} \mp 8I^2 \sqrt{K} - 8K \pm 8K \sqrt{K})J + \frac{4I^4}{K} \pm \frac{4I^2}{\sqrt{K}} + 1 = 0 \quad (38)$$

方程式形爲 $PJ^2 + QJ + R = 0$ ，其解爲

$$J = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (39)$$

其中

$$P = K^2, Q = -6K \mp 4\sqrt{K}(I^2 - 2K), R = \frac{4I^4}{K} \pm \frac{4I^2}{\sqrt{K}} + 1 \quad (40)$$

對 $(\epsilon_c, \beta_c) = (\frac{1 \pm \sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 而言，我們得到

$$K^2 J^2 - [(1 - 2\epsilon_c)(4\epsilon_c^2 - 2K)] + (1 - 2\epsilon_c)^2 = 0 \quad (41)$$

方程式形爲 $PJ^2 + QJ + R = 0$ ，其解爲方程(39)，但現在

$$P = K^2, Q = 8\epsilon_c^3 - 4\epsilon_c^2 - 4\epsilon_c K + 2K, R = (1 - 2\epsilon_c)^2, \epsilon_c = \frac{1 \pm \sqrt{1+4I^2}}{2} \quad (42)$$

綜合上述討論，對我們的特徵方程式， $c = 0$ ， $b = 0$ ， $b^2 - 4c = 0$ 三線，相對於不同的定點，可得表2。

ϵ	$\sqrt{K}$	$-\sqrt{K}$	$\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}$
β	$\frac{I^2+\sqrt{K-K}}{K}$	$\frac{I^2-\sqrt{K-K}}{K}$	0	0
$c=0$	$K = \left(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}\right)^2$	$K = \left(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}\right)^2$	$K = \left(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}\right)^2$	$K = \left(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}\right)^2$
$b=0$	$J = \frac{-2I^2-\sqrt{K}}{K\sqrt{K}}$	$J = \frac{2I^2-\sqrt{K}}{K\sqrt{K}}$	$J = \frac{-\sqrt{1+4I^2}}{K}$	$J = \frac{\sqrt{1+4I^2}}{K}$
$b^2-4c=0$	$J = \frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4I^2R}}{2I^2}$	$J = \frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4I^2R}}{2I^2}$	$J = \frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4I^2R}}{2P}$	$J = \frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4I^2R}}{2P}$
P	K^2	K^2	K^2	K^2
Q	$-6K - 4\sqrt{K}(I^2 - 2K)$	$-6K + 4\sqrt{K}(I^2 - 2K)$	$8\epsilon^3 - 4\epsilon^2 - 12K\epsilon + 6K$	$8\epsilon^3 - 4\epsilon^2 - 12K\epsilon + 6K$
R	$\frac{4I^4}{K} + \frac{4I^2}{\sqrt{K}} + 1$	$\frac{4I^4}{K} - \frac{4I^2}{\sqrt{K}} + 1$	$(1-2\epsilon)^2$	$(1-2\epsilon)^2$

表2: 不同定點的 $b=0, c=0, b^2-4c=0$ 的方程

4.4 解的型態

綜合表2的結果，我們對四個定點作圖來了解定點的性質，由於參數有 I 、 J 、 K 三個，爲了簡化起見，我們先固定參數 I ，令其值爲1。對四個定點在 J 、 K 平面上作圖，因爲 I 、 J 、 $K > 0$ ，故只取 J 、 $K > 0$ 的部份，則其定點在不同參數下的性質如圖20所示。其中，圖20.1對應定點 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ ，圖20.2對應定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ ，圖20.3對應定點 $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ ，圖20.4對應定點 $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 。

從圖20.1可知，對定點 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 而言，其特性是左邊區域爲鞍點，右邊區域則分爲曲線內側的穩態焦點區及外側的穩態節點區。從圖20.2可知，對定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 而言，則恰巧和 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 成一個對比，右側是鞍點區，左側爲穩態節點區和一個細小狹長的穩態焦點區。圖20.3表示定點 $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 的性質，右側爲鞍點區，左側曲線內側爲穩態焦點區，曲線外側爲穩態節點區。圖20.4描述定點 $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 的性質，相對於定點 $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ ，其鞍點區坐落在左邊，右邊從左下到右上，分別是不穩態焦點、不穩態節點、穩態焦點、穩態節點。

從上述分析可知，我們可將四個定點分爲兩組，這兩點其 $c=0$ 的線 (J, K) 平面是一致的，其解的性質劃分是類似的，這兩組分別是 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 、 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 和 $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 、 $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 。

由於 I 、 J 、 $K > 0$ ，討論四個定點，定點 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 其 ϵ_c 必爲正數，而 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 其 ϵ_c 必爲正數， β_c 則正負數都有可能， $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 其 ϵ_c 必爲負數， $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 其 ϵ_c 必爲負數， β_c 則有正負數都有可能。

定點是系統到達穩定的狀態，因此我們的系統要求定點的 ϵ_c 、 β_c 都不能小於0，因此 $(\frac{1-\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 和 $(-\sqrt{K}, \frac{I^2-K-\sqrt{K}}{K})$ 這兩個定點的附近的解是可以不要討論的，但是這兩個定點雖然在穩定態上不重要，卻會影響解曲線的形狀，所以嚴格來說是應該討論的，但是從圖20我們知道，要同時考慮四個定點是相當複雜的，尤其這兩個定點的區域劃分與另一組定點 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 和 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 有相當的差異，造成這四點的組合會相當複雜，爲了簡單起見，我們只考慮 $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 和 $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 這兩個較具物理意義，影響可能也較大的定點。

個別地對這兩個定點附近討論，隨著參數的不同，每個定點都有節點，鞍點，焦點三種情況發生，但是由於這兩個定點間有一定的關係，其中一點為鞍點時另一點只能是焦點或節點，因此我們不直接討論某點附近的狀況，而是將這兩個定點一起討論，看看在這兩點附近的點如何演化。在這樣的討論下，這兩個定點間的組合只有四種狀況，如表3所示，其中，N表示節點，S表示鞍點，F表示焦點。

	$(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$	$(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$
(a)	N	S
(b)	F	S
(c)	S	N
(d)	S	F

表3: 兩個定點間的四種組合

- 穩態節點區
- 穩態焦點區
- ▨ 鞍點區
- ▩ 不穩態節點區
- 不穩態焦點區

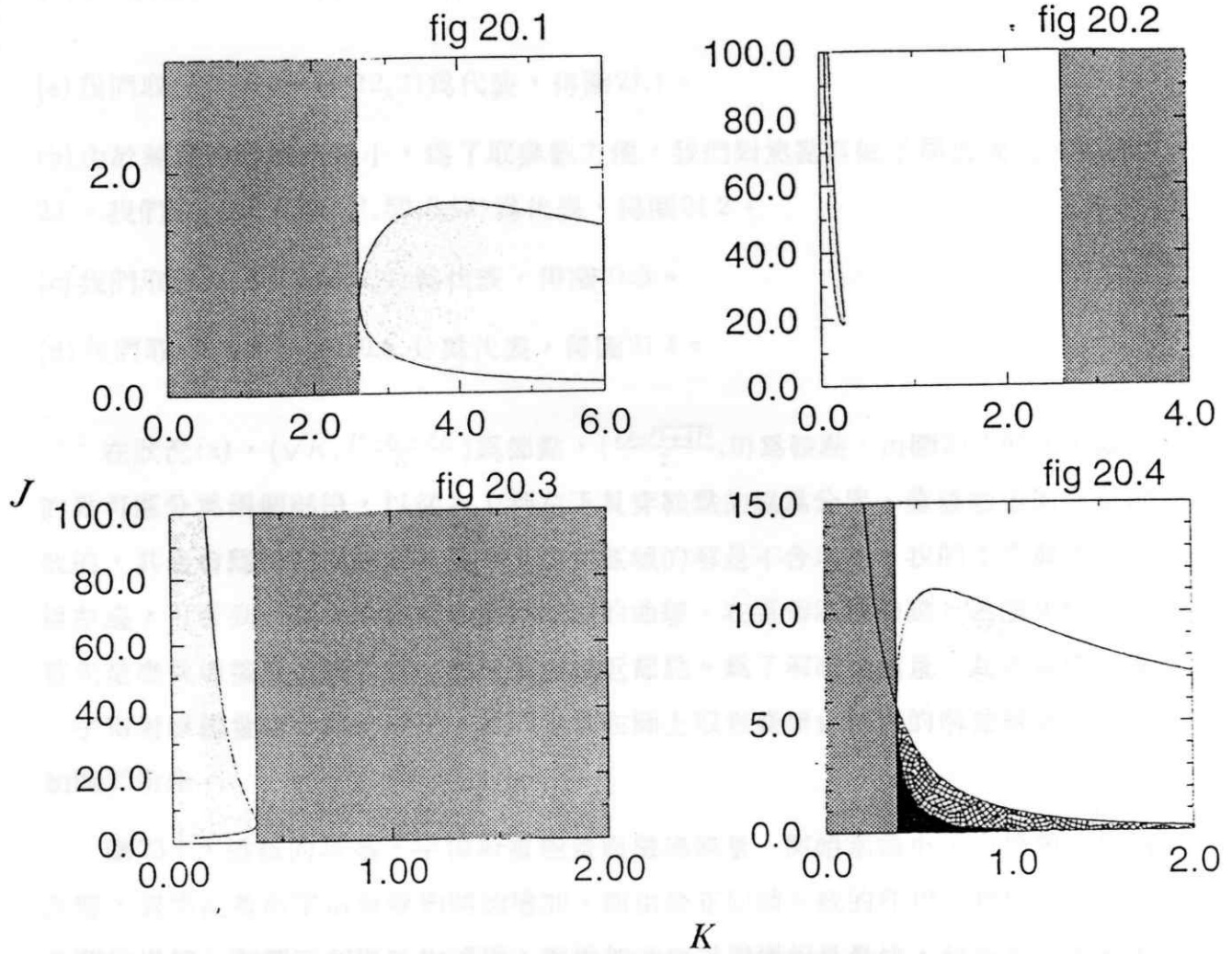


圖20: $I = 1$ ，解在定點附近的特性(用繪圖軟體xmgr繪製)

5 結果

依上述分析情形，我們調整參數來求方程組(11)-(13)的解，其解有表3的四種狀況，調整參數，針對四種狀況作圖，結果如下：

(a)我們取 $(I, J, K) = (1, 12, 2)$ 為代表，得圖21.1。

(b)由於焦點的範圍相當小，為了取參數方便，我們對焦點區做了局部放大，如圖22。我們取 $(I, J, K) = (1, 50, 0.13)$ 為代表，得圖21.2。

(c)我們取 $(I, J, K) = (1, 3, 4)$ 為代表，得圖21.3。

(d)我們取 $(I, J, K) = (1, 0.5, 4)$ 為代表，得圖21.4。

在狀況(a)， $(\sqrt{K}, \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K})$ 為節點， $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4I^2}}{2}, 0)$ 為鞍點，由圖21.1可知，圖上的點可區分為兩個部份，以從右上到左下貫穿鞍點的線為分界，直線右邊的點是發散的，其值會隨時間而變成無限大，這個區域的解是不合理的，我們不感興趣。直線左邊，可看到一條從原點經節點到鞍點的曲線，在這個區域的點，其演化情形，首先是盡量地接近這條曲線，然後循線趨近節點。為了解磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量隨時間的變化，我們分別在圖上取幾條變化較大的解曲線來探討，如圖23所示。

圖23.1，這樣的星系，宇宙射線能量與磁場能量一開始都很小，由於超新星的影響，磁場能量與宇宙射線均開始增加，而由於正回饋系統的作用，超新星產生率也開始增加，初期三個變數均遞增，而增加速率以磁場能量最快，超新星產生率與宇宙射線能量則差不多。演化經一段時間後，磁場能量增加速度趨緩，然後到達極大值，與此幾乎同時，超新星產生率也到了極大值，然後正回饋機制被抑制，超新星產生率漸減，磁場能量也因磁場耗散和超新星產生率的減少而漸減，而宇宙射線能量依舊遞增，但越趨平緩，最後，三者達到穩定狀態。相較於初始值，磁場能量與宇宙射線能量都是增加的，而超新星產生率會減少。這樣的星系，其演化的終態是宇宙射線能量大幅增加，磁場能量小幅增加，而超新星產生率大幅減少的。另外

，由圖 23.1 可知道，超新星產生率與磁場能量的演化情形較類似，故兩者間的關係較宇宙射線能量來的密切，

圖 23.2，這樣的星系，一開始磁場能量有相當的值，可用來代表高磁場的星系，而宇宙射線能量一開始仍很小，由於超新星的貢獻，宇宙射線能量開始穩定地增加，而磁場能量方面，超新星的作用雖然可以增加磁場能量，但是由於損失磁場能量的機制作用更大，使磁場能量以陡峭的速率減少，此時，超新星產生率因正回饋作用而遞增。一段時間後，增加磁場能量的機制與減少能量的機制達到平衡，磁場能量到達極小值，之後，增加磁場能量的機制勝過了減少能量的機制，磁場能量開始爬升，之後，與圖 23.1 的演化差不多，磁場能量與超新星產生率幾乎同時到達極大值，而後遞減到穩定態，宇宙射線能量則始終遞增，直到穩定態。與圖 23.1 相比較，最大的不同在於磁場能量多了個快速遞減的現象，而在穩定態，主要的不同則為磁場大幅減少。

圖 23.3，這樣的星系，其初始值如圖所示，一開始的磁場能量與圖 23.2 相同，而宇宙射線能量則較大。一開始的變化與圖 23.2 相似，磁場能量大幅滑落，宇宙射線能量穩定爬升，最大的不同在於增加超新星產生率的正回饋機制一開始就受到抑制，致使超新星產生率不斷減少，磁場能量在大幅衰減一段時間後，增加磁場能量的機制與減少能量的機制，其大小相差不多，於是衰減速率趨緩，但與圖 23.2 相較有個較大的不同，由於增加磁場能量的機制較弱，因此無法使磁場能量有遞增的機會。在磁場能量衰減趨緩後三個變數的演化，與圖 23.2 超新星產生率及磁場能量過極大值後三個變數的演化是差不多的。與圖 23.2 相比較，最大的不同在於磁場能量少了遞增到極大的現象，超新星產生率也少了遞增到極大的現象，而在穩定態，基本上是相同的，磁場能量與超新星產生率大幅減少，宇宙射線能量大幅增加。

比較圖 23.1-3，可以知道：宇宙射線的能量、超新星產生率、磁場能量均在一段時間後趨於穩定，宇宙射線能量初始值的改變，會影響演化時間的長短，而並使三個變數的演化曲線有所改變，磁場能量初始值的變化，主要影響磁場能量的演化曲線。

在狀況(b)， $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 爲焦點， $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 爲鞍點，由圖21.2可知，圖上的點可區分爲兩個部份，以從右上到左下貫穿鞍點的線爲分界，直線右邊的點是發散的，我們不感興趣。直線左邊，所有的點以不同的方向，略帶彎曲的曲線趨向焦點， $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 雖然是焦點，但是並沒有像一般的焦點有明顯的打轉現象，只有在接近定點時有些許的彎曲。

爲了解磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量隨時間的變化，我們分別在圖上取幾條變化較大的解曲線來探討，如圖24所示。

由於取 $(I, J, K)=(1, 50, 0.13)$ ， J 對磁場能量的增加率有正比作用，宇宙射線能量與超新星產生率的變化率大小則取決於 I ，因爲 $J \gg I$ ，所以狀況(b)的特色是磁場能量的變化遠較另兩個變數爲大。

圖24.1的星系，宇宙射線能量與磁場能量一開始都很小，由於超新星的影響，磁場能量與宇宙射線均開始增加，宇宙射線能量增加相當平緩，而相較之下磁場能量增加速率陡峭得多，而由於正回饋系統的作用，超新星產生率也開始增加，增加相當平緩，整個演化過程三個變數均單調遞增到穩定態。而增加速率以磁場能量最快，宇宙射線能量次之，超新星產生率最慢。演化終了，宇宙射線能量與超新星產生率皆微量增加，而磁場能量則大幅增加。

圖24.2的星系，其初始值如圖所示，一開始，超新星產生率很小，同步加速輻射的作用超過了超新星的作用，所以宇宙射線能量一路遞減，超新星產生率則遞增，而磁場能量則大幅遞增，一段時間後，三者皆達到穩定態。演化終了，宇宙射線能量微量減少，超新星產生率微量增加，而磁場能量則大幅增加。

圖24.3的星系，一開始，超新星產生率、宇宙射線能量和磁場能量在初始值附近維持一段時間，之後，超新星產生率與磁場能量先產生變化，磁場能量與超新星產生率遞增，磁場能量以較大的變化率遞增，一段時間後，宇宙射線能量遞減，之後三者到達穩定態，超新星產生率最先到穩定態，宇宙射線能量次之，最後是磁場能量。演化終了，宇宙射線能量微量減少，超新星產生率微量增加，而磁場能量則大幅增加。

在狀況(c)， $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 爲鞍點， $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 爲節點，與先前的討論相似，由圖21.3可知，圖上的點可區分爲兩個部份，以從右上到左下貫穿鞍點的線爲分界，直線右邊的點是發散的，其值會隨時間而變成無限大，我們不感興趣。直線左邊，可看到一條從原點經節點到鞍點的曲線，在這個區域的點，其演化情形，首先是盡量地接近這條曲線，然後循線趨近節點。比較圖21.1與21.3可發現，兩張圖非常相似，最大的不同在於鞍點和節點的位置，節點的縱軸座標爲0，鞍點的縱軸座標則爲負數。

爲了解磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量隨時間的變化，我們分別在圖上取幾條變化較大的解曲線來探討，如圖25所示。

圖25.1-3的星系，其宇宙射線能量和磁場能量的初始值分別與圖23.1-3相同，而圖25.1-3所表現出的演化情形，也大致相同。最大的差異在於穩定態的值，比較狀況(c)和狀況(a)的穩定態，狀況(c)的宇宙射線能量比狀況(a)的大，狀況(c)的磁場能量比狀況(a)的小，並且爲0，狀況(c)的超新星產生率比狀況(a)的小。

在狀況(d)， $(\sqrt{K}, \frac{I^2-K+\sqrt{K}}{K})$ 爲鞍點， $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 爲焦點，跟前面的討論相似，由圖21.4可知，圖上的點可區分爲兩個部份，以從右上到左下貫穿鞍點的線爲分界，直線右邊的點是發散的，我們不感興趣。直線左邊，所有的點以不同的方向，略帶彎曲的曲線趨向焦點， $(\frac{1+\sqrt{1+4I^2}}{2}, 0)$ 雖然是焦點，但是並沒有像一般的焦點有明顯的打轉現象，只有在接近定點時有些許的彎曲，與狀況(b)相比較，狀況(b)附近的點是以輻射狀趨近焦點的，而狀況(d)，焦點左上方的點以較彎曲的曲線輻射狀接近焦點，右下方的點則以較平緩的曲線接近焦點。

與以前的討論相似，爲了解磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量隨時間的變化，我們分別在圖上取幾條變化較大的解曲線來探討，如圖26所示。

圖26.1，這樣的星系，與圖23.1相似，宇宙射線能量與磁場能量一開始都很小，由於超新星的影響，磁場能量與宇宙射線均開始增加，而由於正回饋系統的作用，超新星產生率也開始增加，初期三個變數均單調遞增，但不同於圖23.1的，增加速率以宇宙射線能量最快，超新星產生率次之，磁場能量最慢。演化經一段時間後

，超新星產生率先到達極大值，之後超新星產生率便遞減，而在超新星產生率到達極大值後一段時間，磁場也到了極大值，這是與圖34的另一個不同處，之後，除穩定態的值不同外，演化情形大致與圖23.1相同。演化終了，超新星產生率大幅減少，宇宙射線能量大幅增加，磁場能量小幅減少。

圖26.2，這樣的星系，宇宙射線能量一開始很小，而磁場能量有一較高的值，其演化情形與圖26.1相似，主要的差別為磁場能量的演化，在本圖中，磁場直接遞減到穩定態，沒有經過極大值的狀態。

圖26.3，這樣的星系，初始值如圖所示，磁場能量遞減，宇宙射線能量遞增，超新星產生率遞減，各自趨近定值。

最後，由物理觀點可知，狀況(d)由於焦點的磁場能量為0，其解在趨向焦點時會打轉，造成磁場能量會有負值的情況發生，故不是合乎物理的解。，因此合乎物理的只有(a)、(b)、(c)三種狀況。

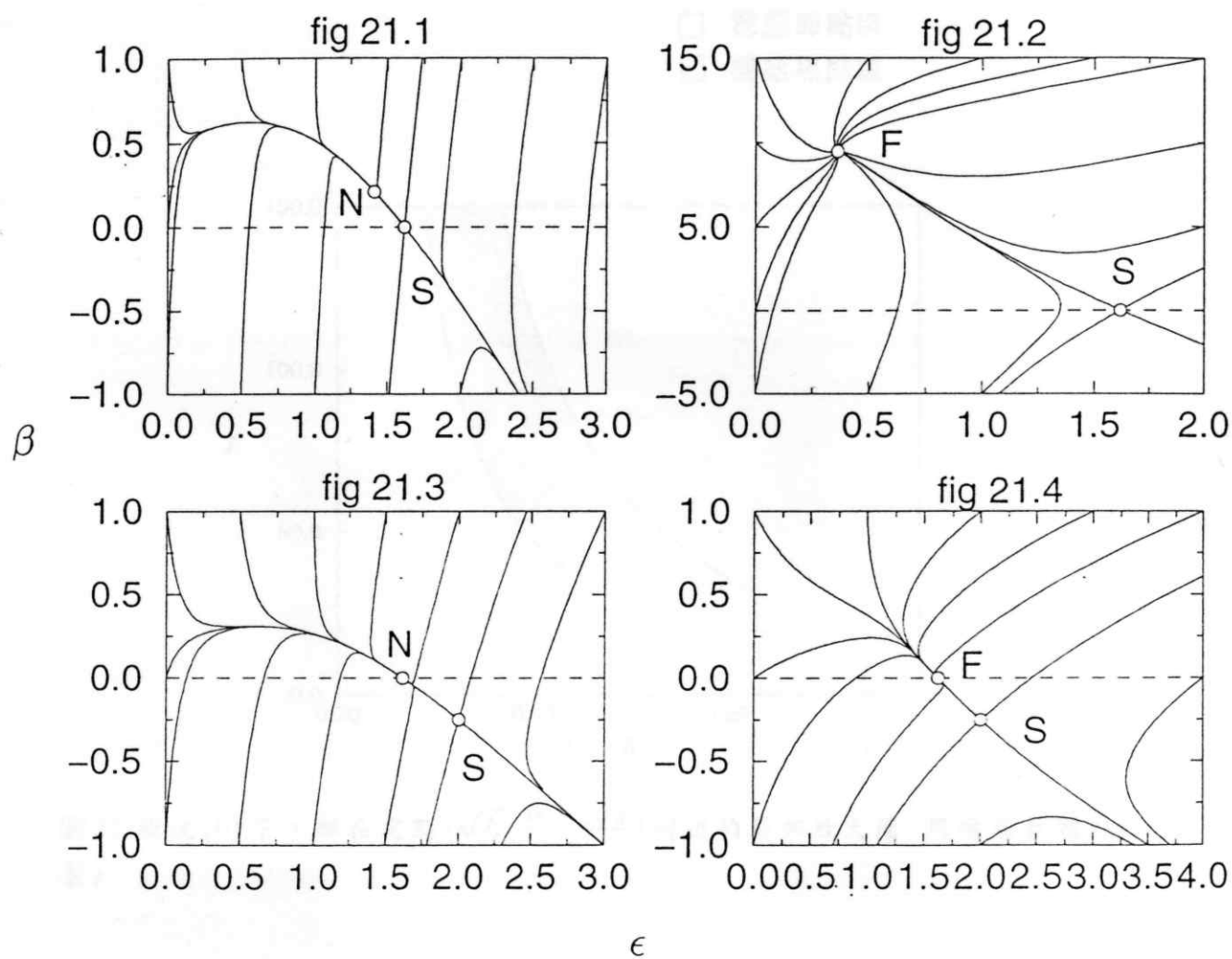


圖21: 定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K})$ 與 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4I^2}}{2}, 0)$ 的四組解曲線 (用繪圖軟體 xmgr 繪製)

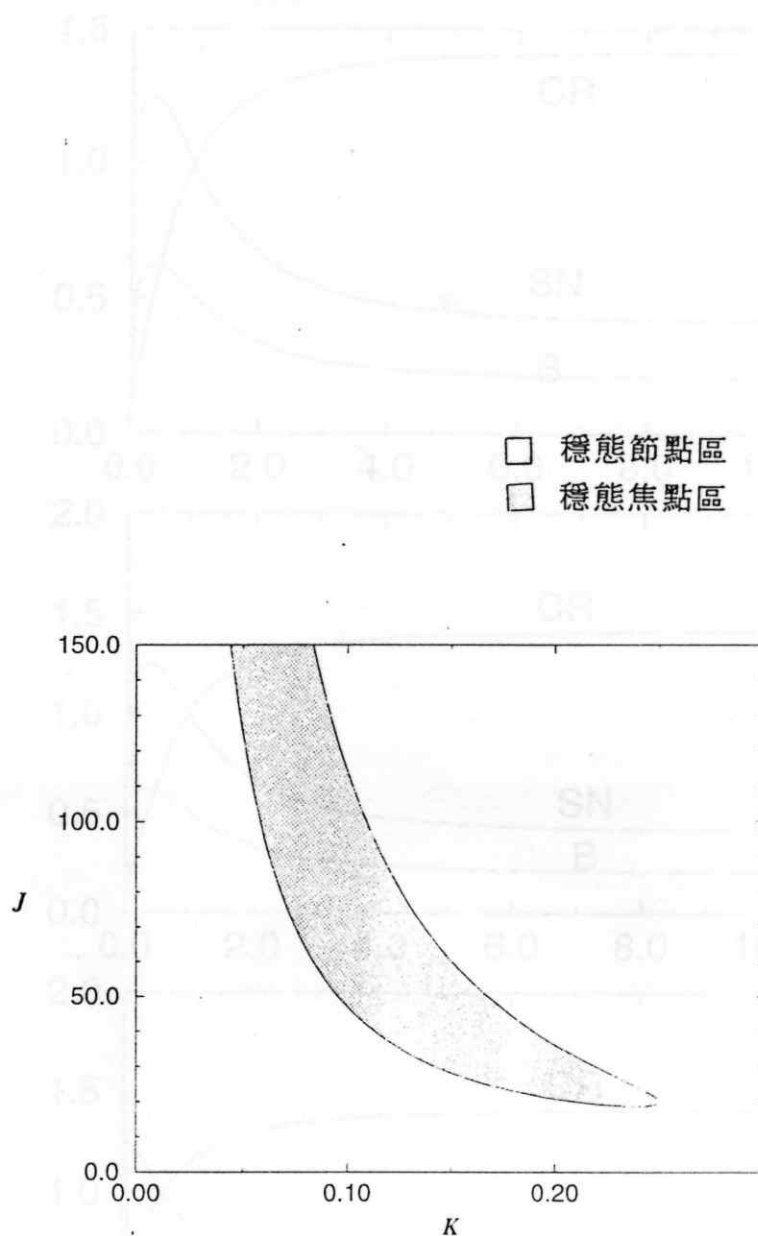


圖 22: 狀況 (b) 下，解在定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K})$ 附近的局部放大圖 (用繪圖軟體 xmgr 繪製)

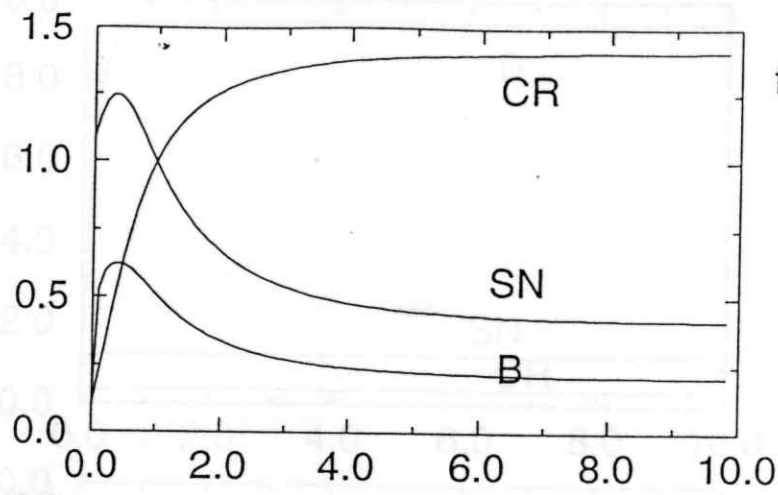


fig23.1

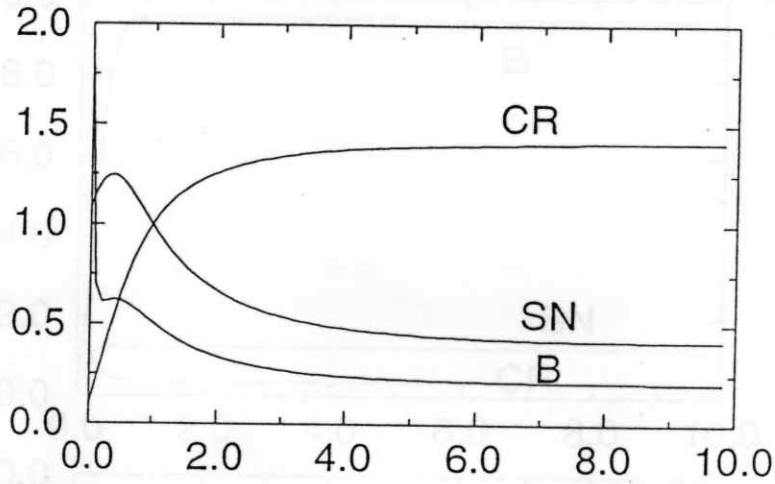


fig23.2

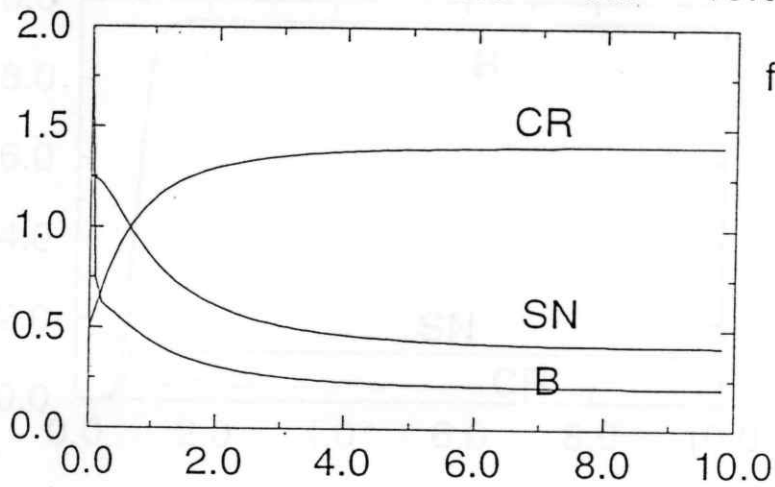


fig23.3

τ

圖 23: 狀況(a)，參數 $(I, J, K) = (1, 12, 2)$ 時，宇宙射線能量 CR，超新星產生率 SN 和磁場能量 B 與時間的關係。圖 23.1 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 0.1)$ ，圖 23.2 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 2)$ ，圖 23.3 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.5, 2)$ 。(用繪圖軟體 xmgr 繪製)

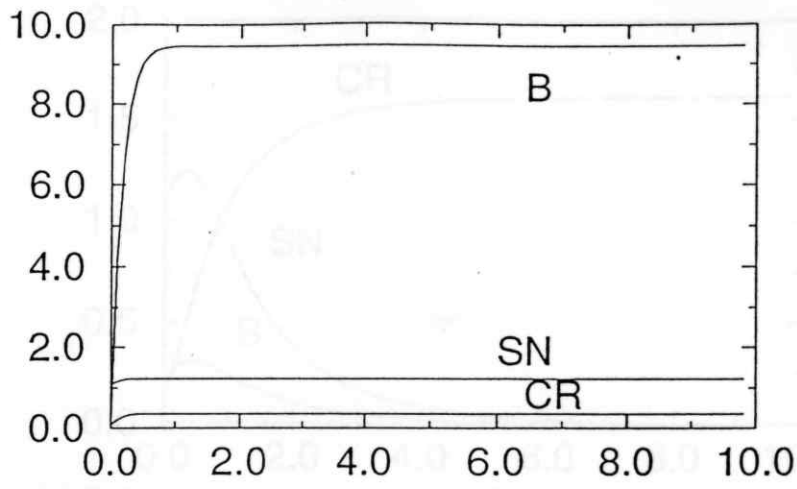


fig24.1

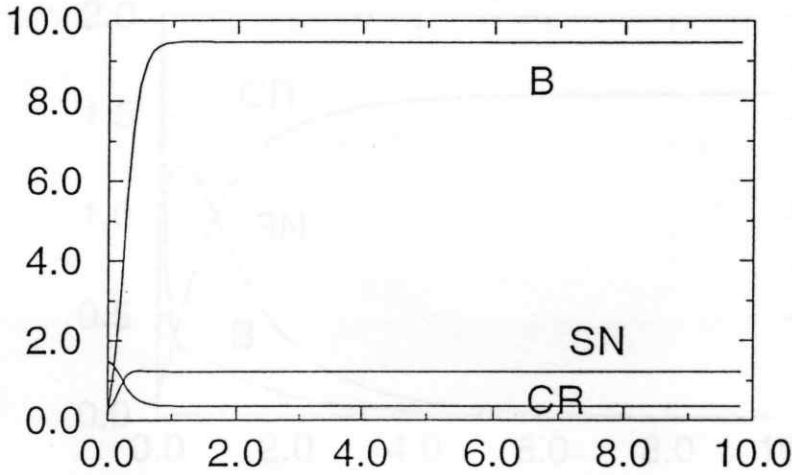


fig24.2

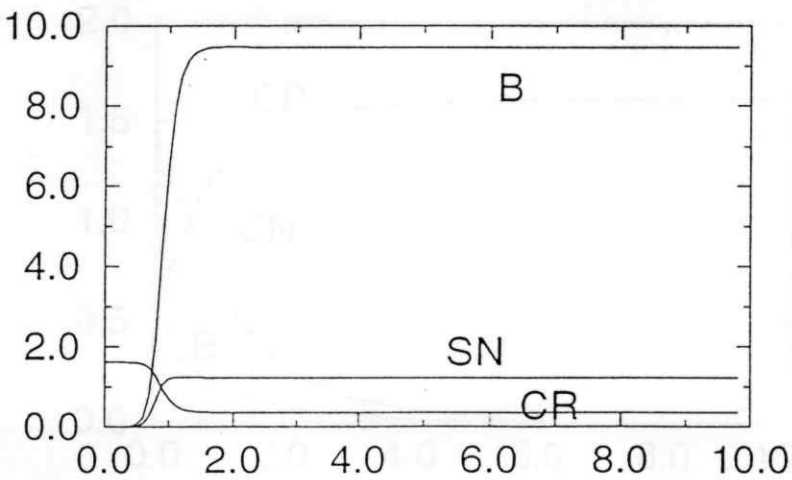


fig24.3

τ

圖24: 狀況(b), 參數 $(I, J, K) = (1, 50, 0.13)$ 時, 宇宙射線能量 CR , 超新星產生率 SN 和磁場能量 B 與時間的關係, 圖24.1初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 0.1)$, 圖24.2初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(1.5, 0.1)$, 圖24.3初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(1.618, 0)$ 。(用繪圖軟體 xmgr 繪製)

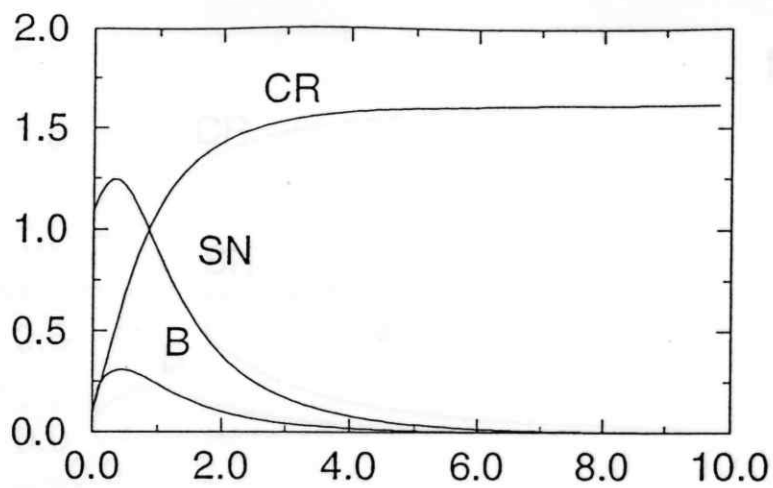


fig25.1

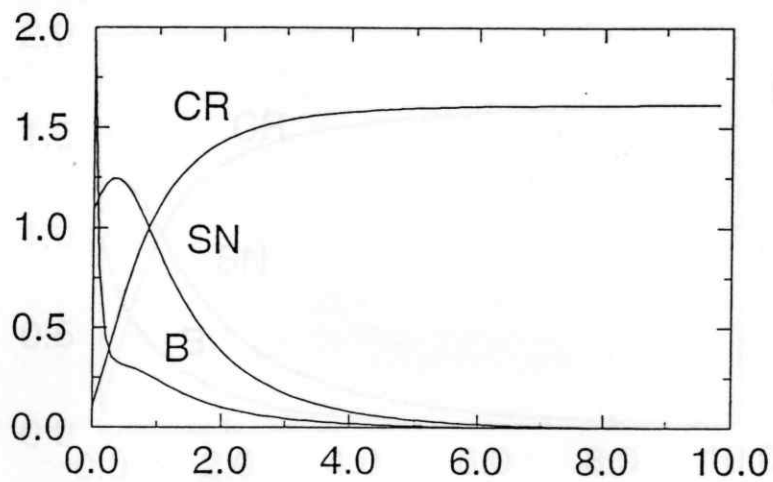


fig25.2

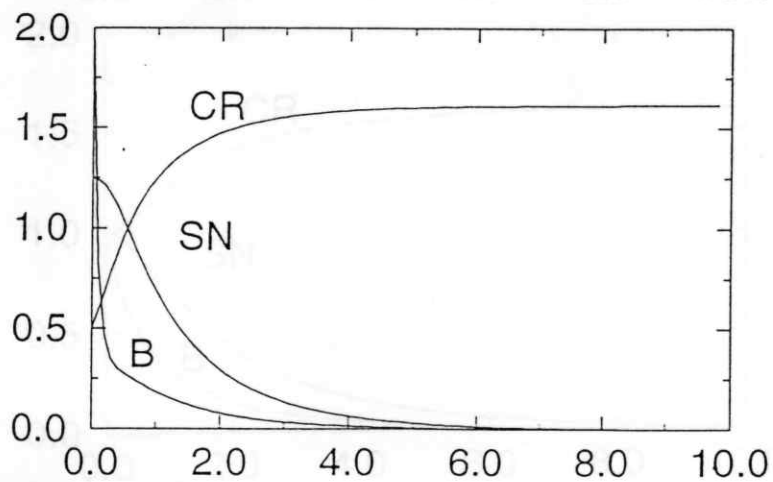


fig25.3

τ

圖 25: 狀況(c), 參數 $(I, J, K) = (1, 3, 4)$ 時, 宇宙射線能量 CR, 超新星產生率 SN 和磁場能量 B 與時間的關係。圖 25.1 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 0.1)$, 圖 25.2 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 2)$, 圖 25.3 初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.5, 2)$ 。(用繪圖軟體 xmgr 繪製)

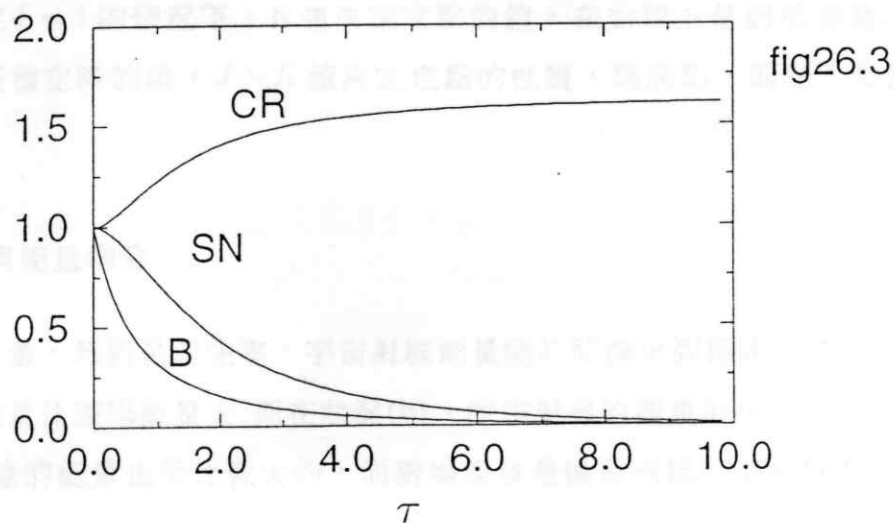
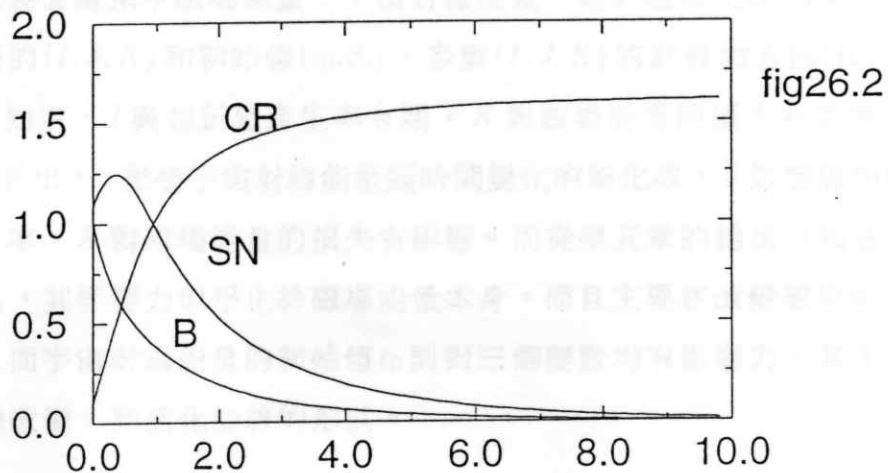
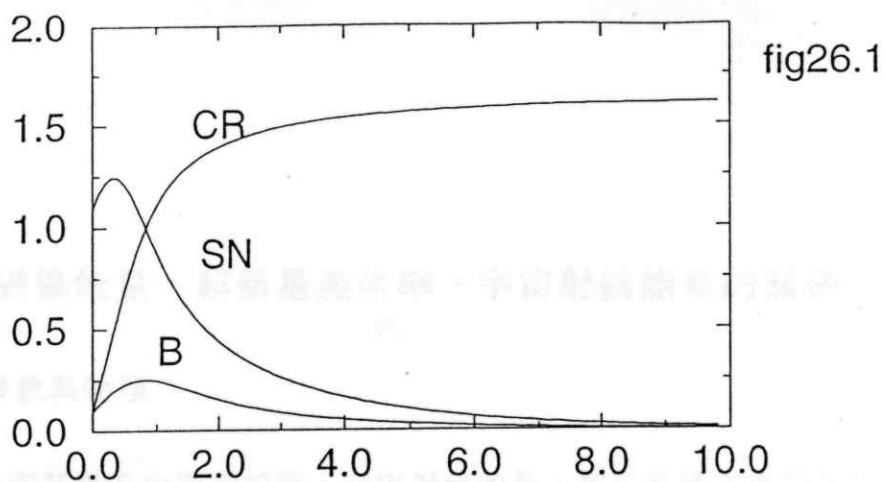


圖26: 狀況(d)，參數 $(I, J, K) = (1, 0.5, 4)$ 時，宇宙射線能量CR，超新星產生率SN和磁場能量B與時間的關係，圖26.1初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 0.1)$ ，圖26.2初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(0.1, 1)$ ，圖26.3初始值 (ϵ_0, β_0) 為 $(1, 1)$ 。(用繪圖軟體xmogr繪製)

6 討論

6.1 星系中磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量的關係

6.1.1 模型的參數與物理

我們的模型，代表著星系中磁場能量、宇宙射線能量、超新星產生率的演化，不同的星系有著不同的 (I, J, K) 和初始值 (ϵ_0, β_0) ，參數 (I, J, K) 的意義如方程(10)所示，從方程(10)可以知道， I 與超新星產生率有關， K 對磁場能量的損失有影響，而從方程(11)-(13)可看出， I 影響宇宙射線能量隨時間變化的變化率， J 影響磁場能量隨時間變化的變化率， K 對磁場能量的損失有影響。而從第五章的結果可知道，磁場能量的初始值 β_0 ，其影響力似乎止於磁場能量本身，而且主要在改變磁場能量隨時間的變化情形，而宇宙射線能量的初始值 ϵ_0 則對三個變數均有影響力，其主要作用在於演化時間的改變，和演化曲線的形狀。

在已經固定 $I = 1$ 的情況下， K 值決定定點的值，在物理上是磁場能量和宇宙射線能量演化至穩定時的值， J 、 K 值決定定點的性質，為焦點、節點、鞍點三種中的哪一種。

6.1.2 穩定態與能量均分

當星系中磁場能量、超新星產生率、宇宙射線能量隨時間演化到穩定態時：狀況(a)，宇宙射線的能量比磁場能量大；而在狀況(b)，宇宙射線的能量則小於磁場能量；狀況(c)，宇宙射線的能量也是比較大的，而磁場能量最後會成為0；至於狀況(d)則不合物理。

決定星系磁場常用的一套理論是能量均分(見2.4.3節)。在這個理論下，宇宙射線能量和磁場能量的大小是差不多的，而上述兩個狀況的結果顯然不合乎這個理論，因為宇宙射線的能量與磁場能量有相當的差距。這樣的結果表示，如果我們模型的參數 (I, J, K) 是任意的，那麼就不會符合能量均分。反之，如果要符合能量均

分，那麼我們模型的參數 (I, J, K) 就不是任意的，而是有一定的條件限制。令定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K})$ 宇宙射線能量與磁場能量相近，則條件限制為 $\sqrt{K} \approx \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K}$ ，以 $I = 1$ 為例，假設 $\sqrt{K} = \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K}$ ，必須 $K = 1$ 才行， J 則沒有限制，如此可得定點 $(1, 1)$ ，這時候宇宙射線能量與磁場能量相等。

6.2 遠紅外線與無線電波的相關

6.2.1 穩定態與遠紅外線與無線電波的相關

從第二章 FIR-radio correlation 的回顧中，我們知道遠紅外線 FIR 來自超新星產生率 ν_{sn} 而無線電波 radio 來自同步加速輻射。我們的模型又有 $\nu_{sn} \sim I^2 + \epsilon(1 - \epsilon)$ 和同步加速輻射 $\sim \epsilon^2 \beta$ 的關係，所以我們可得如下關係：

$$\text{FIR} \sim I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) \quad (43)$$

$$\text{radio} \sim \epsilon^2 \beta \quad (44)$$

由於解隨著時間的演化會到達定點，而且最後解呈穩定態的是穩態焦點或節點。

對第五章(a), (b)兩種情況而言，演化到定點 $(\sqrt{K}, \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K})$

$$\text{radio} \sim \epsilon^2 \beta \sim \sqrt{K}^2 \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K} \sim I^2 - K + \sqrt{K} \quad (45)$$

$$\text{FIR} \sim I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) \sim I^2 - K + \sqrt{K} \quad (46)$$

故當演化到穩態時，遠紅外線和無線電波有一相關性。

對第五章(c)情況而言，演化到定點 $(\frac{1 + \sqrt{1 + 4I^2}}{2}, 0)$ ，

$$\text{radio} \sim \epsilon^2 \beta = 0 \quad (47)$$

$$\text{FIR} \sim I^2 + \epsilon(1 - \epsilon) \neq 0 \quad (48)$$

故此時遠紅外線與無線電波沒有相關性。

故在我們的模型中，當解演化到穩定態後，在狀況(a), (b)下，有一FIR-radio correlation，而在狀況(c)下則沒有，此時因磁場能量為零，沒有同步加速輻射產生。

狀況(a),(b)可以符合FIR-radio correlation這一星系的普遍現象，這對我們來說是有意思的。從我們的模型來看，在符合這兩個狀況下的星系，當到達穩態後就會有FIR-radio correlation的現象。

這項有趣的結果令我們好奇，為何從我們的模型能得到相當精準的FIR-radio correlation，審視方程，我們發現在建構方程(5)時，隱藏了造成FIR-radio correlation的原因，由方程(5)可知，當系統到達穩態時，方程左邊為0，於是

$$\epsilon^2 \beta \sim \nu_{sn} \quad (49)$$

即FIR-radio correlation。

6.2.2 非穩態與遠紅外線與無線電波的相關的瀾散

在符合第五章(a), (b)狀況的前提下，我們取不同的參數(I, J, K)和不同的初始值(ϵ_0, β_0)，對其解的FIR-radio作圖，如圖27從這個圖。我們可以看出星系中的FIR-radio correlation如何隨時間而演化，另外我們可以看到在FIR-radio correlation中常看到的瀾散現象。

從我們的模型來看瀾散現象，可以把瀾散現象解釋為尚未演化到穩態的星系，不同的初始值使星系座落在不同的位置，不同的參數(I, J, K)則控制演化的終點位

際。如果我們利用 the radio rest-frame 距離校正後的距離與紅移模型，利用 the FIR-radio correlation 的理論預測與我們的模型結果系統性的偏差。

6.1 模型：本區河區瀉星系 M33

我們建立了一個簡單的模型，中區星是 1.1×10^{11} 和 1.5×10^{11} 的 $M_{\odot}$ 的星系。在星系的模型中，由於我們的模型包括和各種參數的關係，我們與模型的關係和目前沒有太大的關係，也是本區河區星系比較似乎是可以有應用。

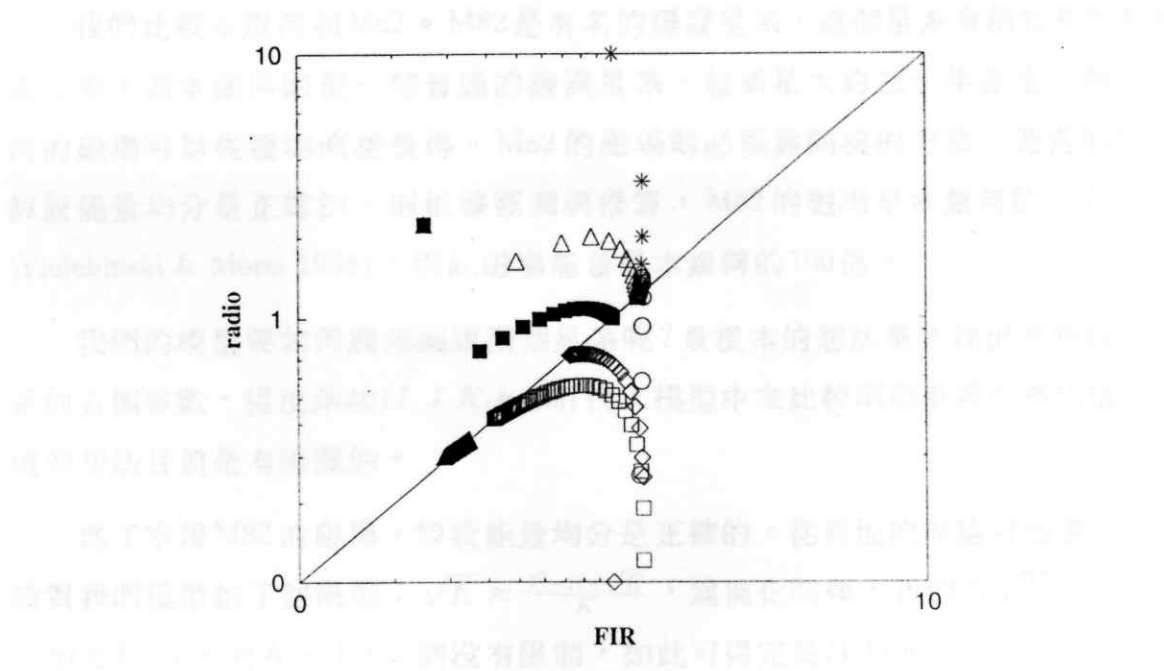


圖27: 由模型推出的 FIR-radio correlation 的彌散，其中不同的符號代表在不同的模型參數下，星系的演化路徑。(用繪圖軟體 xmgr 繪製)

置。如果我們對FIR-radio correlation的彌散現象的解釋可以成立的話，我們可以從FIR-radio correlation的彌散程度給我們的模型的星系演化時間提供一個尺度。

6.3 模型、本銀河與爆發星系M82

我們建構了一個簡單的模型，可調參數是 I, J, K 和宇宙射線能量初始值和磁場能量初始值五項。由於我們的模型無法確知各個參數的值，直接與星系的觀測資料比較在目前沒有太大的意義，但是拿不同的星系比較似乎是可行且有趣的。

我們比較本銀河和M82。M82是有名的爆發星系，這個星系有相當高的超新星產生率，而本銀河則是一個普通的漩渦星系，超新星大約三十年產生一個，本銀河的磁場可以從觀測直接量得。M82的磁場則必須靠間接的方法，通常的方法是假設能量均分是正確的，則根據觀測與推算，M82的磁場是本銀河的10倍(Klein, Wielebinski & Morsi 1988)，因此磁場能量是本銀河的100倍。

我們的模型要如何應用到這兩個星系呢？最根本的想法是去找出或假設每個星系的五個參數，得出兩組 $(I, J, K, \epsilon_0, \beta_0)$ 代入模型中來比較兩個星系的演化情形，但這個想法目前是有困難的。

爲了求得M82的磁場，假設能量均分是正確的，從前面的討論可知道，這個假設對我們模型給了些限制： $\sqrt{K} \approx \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K}$ ，爲簡化問題，我們令 $\sqrt{K} = \frac{I^2 - K + \sqrt{K}}{K}$ ，如果 $I = 1$ ，則 $K = 1$ ， J 則沒有限制，如此可得定點(1,1)。

由於 $I=1$ 是我們最熟悉的狀況，我們採用這個假設，於是在這些假設下，決定這兩個星系演化特性的兩組參數 $(I, J, K, \epsilon_0, \beta_0)$ ，已確定 $I = 1$ ， $K = 1$ ，而演化的穩定態也可以確定爲(1,1)。在這個狀況下，無論剩下的幾個參數爲何，當星系演化到最後，磁場能量都是一樣的。而這個推論與M82磁場能量是本銀河的100倍不合。

面對這樣的結果，我們先檢查我們的假設，由於我們的模型可以解釋FIR-radio correlation，而FIR-radio correlation適用於正常星系與爆發星系，所以我們的模型應該是適用於本銀河和M82的。能量均分的假設被廣爲應用，而且有相當多的間接證據，這假設應該也算合理。所以最值得爭議的假設是 $I = 1$ 。

由於 $I = \sqrt{\nu_0}/\sqrt{l}E_0$ ， ν_0 是超新星產生率的原始值， l 與正回饋的機制有關， E_0 是宇宙射線能量的臨界值，以目前的觀測而言，M82 與本銀河似乎不該有相同的超新星產生率的原始值，因為爆發星系顯然該有較大的超新星產生率的原始值，而 l 、 E_0 則兩個星系是差不多的，因此兩個星系不該有相同的 I ，所以兩個星系都是 $I = 1$ 是不對的。

由此可知，對不同的星系， I 是重要的變數，因此我們改變 I 值，看看在 J 、 K 參數平面上，解在定點附近的特性有什麼改變，我們取 $I = 2$ ，結果如圖 28。

最後，關於我們的模型，至少存在以下的問題，第一個是關於演化的時間，由於方程中使用的常數的值無法確定，所以我們無法從模型直接推導出一個演化時間的值。第二個問題在參數 I 上，在分析中我們爲了方便假設其值爲 1，雖然我們也對 $I = 2$ 做了點粗略的研究，但並沒有很有系統的探討，關於不同的 I 值對系統的影響，由於時間的關係我們來不及完成，留待有興趣的人再來研討。另外，比較圖 14 和我們的模型，圖 14 中 cosmic rays 的部份有三個項進出，而我們的宇宙射線能量方程，方程(5)只有兩項，故正回饋機制不明顯，因此若要改良模型，應該再加入一項，描述宇宙射線消耗能量電離坍縮星雲的機制，以使模型更趨完備。

- 穩態節點區
- 穩態焦點區
- 鞍點區
- ▨ 不穩態節點區
- 不穩態焦點區

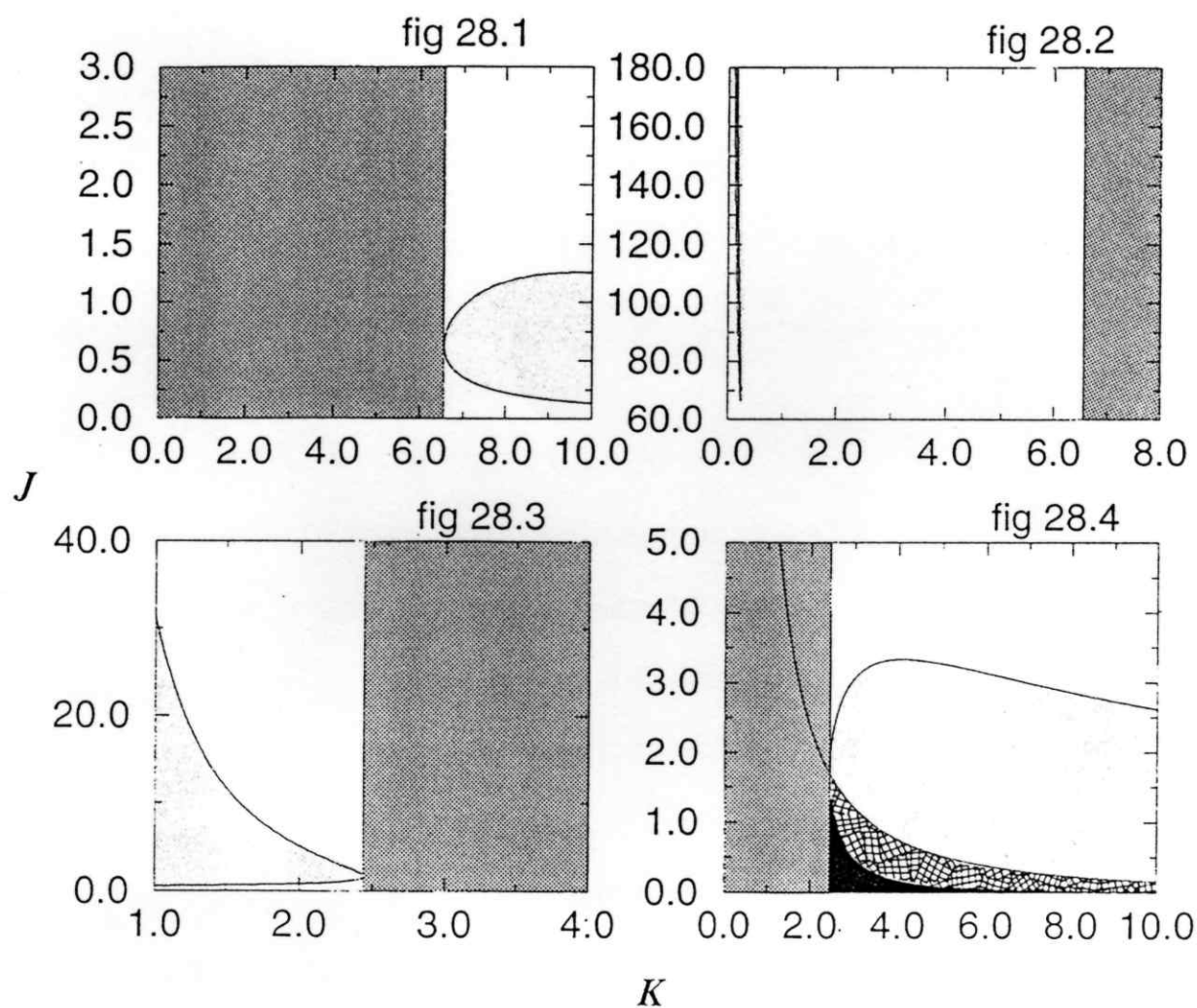


圖 28: $I = 2$, 解在定點附近的特性 (用繪圖軟體 xmgr 繪製)

參考文獻

- Arrowsmith D.K. & Place C.M., 1992, *Dynamical Systems*, Chapman & Hall Mathematics
- Beck R. & Golla G. ,1988,A&A,**191**,L9
- Bettens R. P. A.& Brown R. D.,1992,MNRAS,**258**,347
- Bettens R. P.A.,Brown R. D.,Cragg D. M.,Dickinson C. J. & Godfrey P. D. ,1993, MNRAS
.263 ,93
- Chi X. & Wolfendale A.W.,1990,MNRAS,**245**,101
- Condon J.J.& Yin Q.F.,1990,ApJ,**357**,97
- Condon J.J.,Anderson M. L.& Helou G.,1991,ApJ,**376**,95
- Condon J. J. ,1992,ARAA ,**30**,575
- Davies R. D. ,1991,Nuclear Physics B,**22**,138
- de Jong T.,Klein U.,Wielebinski R,Wunderlich E.,1985,A&A,**147** ,L6
- Dickey J.M. & Salpeter E.E.,1984,ÅJ,**284**,261
- Drury L.O'C.,Markiewicz W. J.& Völk H. J.,1989,A&A,**225** .179
- Field G.B.,Goldsmith D. W.& Habing H. J. ,1969,ApJ,**155** ,L149
- Fitt A.J. & Alexander P..1993,MNRAS,**261**,445
- Harwit M.& Pacini F.,1975,ApJ Lett,**200**,L127
- Helou G.& Bica M.D.,1993,ApJ,**415**,93
- Helou G. et al.,1985,ApJ,**298**,L7
- Hummel E.,1986.A&A,**160**.L4
- Hummel E.,Davies R. D..Wolstencroft R. D.,van der Hulst J.M. & A.Pedlar ,1988 .A&A
. 199 ,91

- Klein U.,Wielebinski R.,Morsi H. W.,1988,A&A,**190**,41
- Lisenfeld U.,1993,PHD desertation,University of Heidelberg
- Longair M.S.,1981,High Energy Astrophysics,Cambridge University Press
- Nicholas A.D. & Stephen A.E.,1989 ,ApJ,**340**,708
- Parker E. N.,1955,AJ,**122**,293
- Priest E.R.t ,1982,Solar Magnetohydrodynamics,D.Reidel Publishing Company
- van der Kruit P. C.,1971,A&A,**15**,110
- van der Kruit P. C.,1973,A&A,**29**,263
- Völk H.J.,Zank L. A.& Zank G. P.,1988,A&A,**198**,274
- Völk H.J.,Klein U.and Wielebinski R. ,1989,A&A,**213**,L12
- Völk H.J. , 1989,A&A,**218**,67
- Völk H.J. & Xu C.,1994,Infrared Phys. **35**,2/3, 527
- Wielebinski R,Wunderlich E.,Klein U.& E.Hummel,1987,in Star Formation in Galaxies ,
C.J. Lonsdale Persson(Editor) ,583
- Xu C.,1990,ApJ,**365**,L47
- Xu C.,Lisenfeld U. & Völk H.J.,1994,A&A,**285**,19
- Xu C.,Lisenfeld U.,Völk H. J.& Wunderlich E.,1994,A&A,**282**,99
- 蔡殷智,1994,物理雙月刊.16.330