氣象資料同化學期考試

2003.1.16 下午 15:00~17:00

總共 2 頁

1.試證 20%

(a) $\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\mathrm{tr}\,\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^T$ ，**A** 和 **B** 爲矩陣，乘積 **AB** 存在。

(b) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}/2)$ ，**A** 爲向量。

2.試各以 100 字左右的文字解釋下面的名詞：30%

(a)Kalman 濾波器。

(b)擴張 Kalman 濾波器。

(c)系集 Kalman 濾波器。

3.考慮下面的擴散方程：20%

$$u_t = \kappa u_{xx}, \qquad t \ge 0, \qquad x_1 \le x \le x_2 \tag{1}$$

擴散係數 κ 設爲和 x, t 無關。假設(1)式的定解條件爲

$$u(x, 0)=\text{給出} \qquad (\text{但不固定}) \tag{2}$$

$$u(x_1, t) = \text{已知且固定}, \qquad u_x(x_2, t) = \text{已知且固定} \tag{3}$$

必須注意，在 $x = x_2$ 處的邊界條件是 Neumann 型的。現在希望由 $u(x, t)$的觀測值 $\tilde{u}(x, t)$ 決定出最佳的初始值 $u(x, 0)$，在這情況下代價函數可寫爲

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\int_{x_1}^{x_2}[(u-\tilde{u})^2 - 2\lambda(u_t - \kappa u_{xx})]\,dxdt \tag{4}$$

將(4)式取變分，並做分部積分後，有

$$\begin{aligned}
\delta J = &\int_0^{\theta}\int_{x_1}^{x_2}(\lambda_t + \kappa\lambda_{xx} + u - \tilde{u})\,\delta u dxdt \\
&- \int_{x_1}^{x_2}\left[\lambda(x,\theta)\delta u(x,\theta) - \lambda(x,0)\delta u(x,0)\right]dx \\
&+ \kappa\int_0^{\theta}\left[\lambda(x_2,t)\delta u_x(x_2,t) - \lambda_x(x_2,t)\delta u(x_2,t)\right. \\
&\qquad \left. - \lambda(x_1,t)\delta u_x(x_1,t) + \lambda_x(x_1,t)\delta u(x_1,t)\right]dt
\end{aligned}$$

(a)寫出共軛方程。

(b)試問 $\lambda(x,\theta)$，$\delta u(x,\theta)$，$\lambda(x,0)$ 和 $\delta u(x,0)$ 的值是否等於零，爲什麼?

(c)試問下面8個量 $\lambda(x_2,t)$，$\delta u_x(x_2,t)$，$\lambda_x(x_2,t)$，$\delta u(x_2,t)$，$\lambda(x_1,t)$，$\delta u_x(x_1,t)$，$\lambda_x(x_1,t)$ 和 $\delta u(x_1,t)$ 的值是否等於零，爲什麼？

(d)寫出共軛方程的終端條件和邊界條件。

4.考慮兩個格點之間有一個觀測點的情況，這兩個格點各有它們的背景值，分別以 x_1^b 和 x_2^b 表示，而觀測點的背景值可用線性內插得到：30%

$$\mathbf{Hx}_b = \alpha x_1^b + (1-\alpha)x_2^b$$

其中 $0 \le \alpha \le 1$。觀測誤差和背景誤差的協方差矩陣分別設爲

$$\mathbf{R} = \sigma_r^2, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & \sigma_b^2\rho \\ \sigma_b^2\rho & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \sigma_b^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

上式中 σ_r^2 爲觀測誤差的方差，ρ 爲背景誤差的相關係數。必須指出，在上式中已設兩個地點背景誤差的方差是相等的，用 σ_b^2 表示。

(a) 試寫出觀測算符 $\mathbf{H}$ 的表達式。

(b) 假如觀測點位於格點 1 上（$\alpha = 1$），而且背景誤差是不相關的（$\rho = 0$），試證兩格點上的分析值爲

$$x_1^a = x_1^b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b), \qquad x_2^a = x_2^b$$

說明這個解的意義。

(c)假如觀測點位於格點 1 處（$\alpha = 1$），但兩個格點背景誤差是相關的（$\rho \ne 0$），試證兩格點上的分析值爲

$$x_1^a = x_1^b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b), \qquad x_2^a = x_2^b + \frac{\rho\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b)$$

試說明爲何分析點 2 雖然沒有觀測，但其分析值不等於背景值。