

氣象資料同化期中考試

2004 年 12 月 8 日

1. 試述伴隨方程及其初始、邊界條件的幾個特性。(20%)
2. 考慮擴散方程 $\varphi_t = \kappa \varphi_{xx}$ ， $x_1 < x < x_2$ ， $0 < t < \theta$ ，其中正值擴散係數 κ 設為和 x, t 無關的常數。初始值 $\varphi(x, 0)$ 給出但不固定。考慮下面兩種邊界條件：(20%)
 - A. $\varphi(x_1, t) = \text{固定}$ ， $\varphi_x(x_2, t) = \text{固定}$ 。
 - B. $\varphi_x(x_1, t)$ 是控制變數， $\varphi(x_2, t) = \text{固定}$ 。現在希望由 $\varphi(x, t)$ 的觀測值 $\tilde{\varphi}(x, t)$ 決定出最佳的控制變數值。(a) 試寫出 Lagrange 目標函數。(b) 將目標函數取變分，然後進行分部積分。試問 $\lambda(x, \theta)$, $\delta\varphi(x, \theta)$, $\lambda(x, 0)$ 和 $\delta\varphi(x, 0)$ 這 4 個量中哪些等於零？為什麼？在這裡 λ 是 Lagrange 乘數。(c) 試問 $\lambda(x_2, t)$, $\delta\varphi_x(x_2, t)$, $\lambda_x(x_2, t)$, $\delta\varphi(x_2, t)$, $\lambda(x_1, t)$, $\delta\varphi_x(x_1, t)$, $\lambda_x(x_1, t)$ 和 $\delta\varphi(x_1, t)$ 這 8 個量中哪些會等於零？為什麼？(d) 試寫出伴隨方程及其終端、邊界條件。(e) 試寫出目標函數關於控制變數的梯度。
3. 考慮三維擴散方程： $\varphi_t = \kappa \nabla^2 \varphi$ 其中 κ 是正值常數， ∇^2 為三維 Laplace 算符。在求解域 Ω 的封閉邊界 S 上邊界條件是 Dirichlet 型的。(40%)

(A) 初始條件 $\varphi(x, y, z, 0)$ 已給定。反應泛函設為

$$R = \int_0^\theta \int_\Omega r(\varphi) d\tau dt$$

其中 $d\tau = dx dy dz$ 為體積元。(a) 試導出伴隨方程及其終端、邊界條件的表達式。(b) 試導出敏感性度量 δR 的表達式。

(B) 現在要由觀測值 $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$ 決定最佳的初始條件。(a) 試導出伴隨方程及其終端、邊界條件的表達式。(b) 試導出目標函數關於初始值的表達式。

4. 假如觀測誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}_o = \mathbf{x}_o - \mathbf{x}^t$ 和背景誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}^t$ (\mathbf{x}^t 表示真值) 都是無偏的，但它們之間彼此是相關的。試重新定義一個新的觀測值 $\tilde{\mathbf{x}}_o$ ，使得它的誤差和背景誤差彼此不相關。提示：令 $\tilde{\mathbf{x}}_o = \mathbf{x}_o + \mathbf{P}(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_b)$ ，然後求出矩陣 \mathbf{P} 的表達式。(20%)