

# 氣象資料同化期考

2005.1.10

1. (a) 試述下面 4 個分析誤差協方差矩陣的表達式有何差異：(20%)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{B} \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} \quad (4)$$

(b) 試述如何由(1)式導出(2)式（不必詳細導出）。

(c) 試述如何由(2)式導出(3)式。

(d) 試述如何由(4)式導出(3)式（不必詳細導出）。

2. 已知  $\mathbf{A}_{n-1}$ ,  $\mathbf{Q}_{n-1}$ ,  $\mathbf{M}_{n-1}$ , 試述 Schmidt 時間更新的步驟。(20%)
3. Kalman 濾波器和擴張 Kalman 濾波器的誤差協方差的觀測和時間更新方程都可寫為 (20%)

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{H}_n^T (\mathbf{H}_n \mathbf{B}_n \mathbf{H}_n^T + \mathbf{R}_n)^{-1}$$

$$\mathbf{A}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{B}_n, \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{M}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{M}_{n-1}^T + \mathbf{Q}_{n-1}$$

由上面的式子可知，已知初始值  $\mathbf{B}_0$  和所有時刻的  $\mathbf{Q}_n$ ,  $\mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{M}_{n-1}$ , 就可完全決定  $\mathbf{K}_n$ ,  $\mathbf{A}_n$  和  $\mathbf{B}_n$ , 因此這三個矩陣可事先計算出來備用。試問在什麼情況下無法這樣做，為什麼？

4. 考慮下面的後驗機率  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}_o) \propto e^{-J}$ , 其中 (20%)

$$J = 0.5[\mathbf{y}_o - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y}_o - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + 0.5(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$$

假如觀測算符是輕微非線性的，試證後驗機率  $p(\mathbf{y}_o|\mathbf{x})$  的平均數，即極小方差解，為  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{A}\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y}_o - \mathbf{h}(\mathbf{x}_b)]$ , 其中分析誤差的協方差矩陣為  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{B}^{-1}$ 。

5. 試述系集 Kalman 濾波器相對於標準 Kalman 濾波器優點。(20%)