氣象資料同化期中考

2007 年 5 月 2 日星期三下午 1:20~3:20

1. (20%)考慮下面二次多項式的極小化問題：

$$J(\mathbf{x}) = a + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + 0.5\mathbf{x}^T\mathbf{G}\mathbf{x}$$

其中 **b** 和 **G** 分別爲單行向量和對稱正定矩陣，它們都設爲與 **x** 無關。試證對 M 維問題來說，以牛頓下降法求解只要疊代 1 次就到達極小點。提示：首先求出解析解，然後列出牛頓下降法的疊代方案，看看是否 1 次就到達極小點。

2. (20%)考慮下面的目標函數：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\theta (v - \tilde{v})^2 dt$$

動力方程設爲 $v_t = f(v, c, t)$，其中 c 爲參數。現在要用觀測值 $\tilde{v}(t)$ 和動力模式決定最佳初始值 v_0 和參數 c。(a)試導出伴隨方程及其終端條件。(b)試導出目標函數關於初始值 v_0 和參數 c 的梯度。(c)說明求解步驟。

3. (20%)考慮下面的目標函數：

$$J = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(v_n - \tilde{v}_n)^2$$

動力方程爲 $v_n = f(v_{n-1})$。現在要用觀測值 $\tilde{v}_n$ 和動力模式決定最佳初始值 v_0。(a)試導出伴隨方程及其終端條件。(b)試導出目標函數關於初始值 v_0 的梯度。(c)說明求解步驟。

4. (20%)試用強約束和弱約束條件法求出 $J(x,u) = x^2 + u^2$ 的極小值，約束條件爲 $xu = 1$。試證這個極值的確是極小值。

5. (20%)試證下面 3 個矩陣恆等式：

(a) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}$（$\boldsymbol{\lambda}$ 和 **x** 無關）。

(b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta} + \cdots$（Taylor 級數展開）。

(c) $\delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}$（取變分）。

在上面三個式子中，$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 關於向量 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩陣，即 $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$。