

氣象資料同化期末考

2007 年 6 月 21 日星期四下午 3:30~5:30 Open-Book

1. (20%) 假設可觀測量是狀態變數本身，則觀測模式為 $\mathbf{\varepsilon}_o = \mathbf{x}_o - \mathbf{x}$ 。再設觀測誤差 $\mathbf{\varepsilon}_o$ ($M \times 1$ 向量) 和背景誤差 $\mathbf{\varepsilon}_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}$ ($M \times 1$ 向量) 都是無偏的，但它們之間彼此是相關的。試重新定義一個新的觀測值 $\hat{\mathbf{x}}_o = \mathbf{x}_o + \mathbf{P}(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_b)$ ，使它的誤差和背景誤差彼此不相關，也就是說導出 $M \times M$ 矩陣 $\mathbf{P}$ 的表達式 (書上習題 4.3)。
2. (20%) 爲了要由已知的觀測 $\mathbf{y}_o \in \mathfrak{R}^L$ 按觀測模式 $\mathbf{y}_o - \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{\varepsilon}_r$ 求最佳的狀態變數值 $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^M$ ，在沒有背景值和觀測誤差統計量的情況下，考慮下面的目標函數

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_o - \mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y}_o - \mathbf{H}\mathbf{x}) + \frac{\gamma}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{L \times M}$ 。

- (a) 試決定最佳的狀態變數值。
 - (b) 試分別以 $L > M$ (超定情況) 和 $L < M$ (欠定情況) 這兩個情況說明這個 Tikhonov 控制法的特點。
 - (c) 當 $\gamma = 0$ 時分別寫出超定情況和欠定情況下的解。
3. (30%) 已知最佳增益矩陣 $\mathbf{K}$ 可用下面兩個形式表示：

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (2)$$

考慮下面 4 個分析誤差協方差矩陣的表達式：

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{K}\mathbf{H}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{B} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} \quad (6)$$

- (a) 試述如何由(3)式導出(4)式。
- (b) 試述如何由(4)式導出(5)式。

(c)試由(4)式導出(6)式。

(d)試問哪一個表達式對增益矩陣 $\mathbf{K}$ 的計算誤差最勇健(robust)？

4. (30%)已知 $\mathbf{Z}_b$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{R}^{-1}$, 試說明系集變換 Kalman 濾波器(ensemble transform Kalman filter, ETKF)的執行步驟，也就是說明由 $\mathbf{Z}_b$ 求出 $\mathbf{Z}_a$ 的方法（見書上 448 頁）。提示：不需說明如何得到。