

## 4.3 補充//觀測算符

觀測算符的詳細分類	p.2
反問題	p.6
線性古典內插	p.7
一維網格系統的線性觀測模式	p.8
二維網格系統的線性觀測模式	p.10

在許多情況下能直接觀測到的量並不是  $M \times 1$  狀態向量  $\mathbf{x}$  本身，而是  $\mathbf{y}$ ，它和  $\mathbf{x}$  之間假設有被稱為觀測模式（向前模式）的關係：

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_F \quad (1)$$

其中可觀測量（observables） $\mathbf{y}$ ，觀測算符（observation operator） $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  以及向前模式誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_F$  都是  $L \times 1$  單行向量。在氣象學問題中，觀測算符  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  可能有三個意義：

- 把狀態變數所在的位置變換到觀測地點的運算。舉例說把格點上的狀態變數內插到測站上，此時觀測算符通常是水平內插或垂直內插，這些內插使用古典內插法就夠了。
- 把狀態向量變換到可觀測量的運算。舉例說把氣溫、溼度、臭氧含量變換為衛星輻射計所觀測到的亮度溫度的輻射傳遞方程，或者把氣溫、溼度及其它狀態變數變換為降雨率的對流方案（convection scheme）。在這兩個例子中，觀測算符是非線性的，而且非常複雜。
- 從波數域到物理域的變換。現在業務數值預報模式大都使用波譜法，狀態向量是展開係數，可觀測量則是物理域上的量。在這情況下，觀測值可寫為

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{y}_o - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_F + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_r$$

即

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (2)$$

其中觀測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  等於實際觀測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_o$  和向前模式誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_F$  的和：  
 $\boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_F$ ，在這裡將  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  稱為觀測誤差。換句話說狀態向量本身是可觀測量時，觀測誤差是指  $\boldsymbol{\varepsilon}_o$ ；狀態向量不是可觀測量時，則觀測誤差還包括向前模式誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_F$ ，此時觀測誤差是指  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 。

假如觀測模式是線性的，即  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$ ，則(2)式改寫為

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}_r \quad (3)$$

其中線性觀測算符  $\mathbf{H}$  為  $L \times M$  矩陣。由已知的狀態向量  $\mathbf{x}$  求可觀測量  $\mathbf{y}$  通常稱為正問題 (forward problem)。由已知的觀測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  的統計量和可觀測量  $\mathbf{y}$  的觀測值  $\mathbf{y}_o$  決定狀態向量  $\mathbf{x}$  的最佳分析值，則稱為反問題 (inverse problem)。

## 觀測算符的詳細分類

觀測模式是求解正問題的運算，但在求解反問題時也需先求解這個正問題。觀測算符可分為 3 類：

### 1. 數學內插或變換

- (a) 古典內插。這是將格點上的氣象變數  $\mathbf{x}$  內插到觀測點上，得到觀測點上的氣象變數  $\mathbf{y}$ ，後者才是可觀測量。相應的反問題是古典內插的逆變換，這種由觀測點到格點的變換通常稱為客觀分析 (objective analysis)。由於觀測點分布不規則，而且在某些地區根本沒有測站，因此這個反問題比較複雜。後面將說明最簡單的線性古典內插。
- (b) Fourier 逆變換和 Legendre 逆變換。現在數值預報模式大都採用波譜法，預報變數是波譜係數 (即展開係數)，但可觀測量是物理域上的變數，因此在進行變分同化時需要將波譜域的變數  $\mathbf{x}$  變換為物理域上的變數  $\mathbf{y}$ 。至於 Fourier 變換和 Legendre 變換，則為物理域到波譜域的變換。在這裡兩個變換和逆變換是精確的。舉例說，球面上的任何一個函數  $\xi(\lambda, \mu)$  都可表示為 (見曾 1993 第 430 頁)

$$\xi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-l}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \xi_l^m Y_l^m(\lambda, \mu) \quad (4)$$

其中  $\mu \equiv \sin \phi$ ， $\phi$  為緯度， $\lambda$  為經度， $m$  和  $l$  分別表示緯向波數和經向指標。  $Y_l^m(\lambda, \mu) = P_l^m(\lambda, \mu)e^{im\lambda}$  稱為球面諧函數（spherical harmonics）， $P_l^m(\lambda, \mu)$  是連帶 Legendre 函數， $\xi_l^m$  是展開係數或稱為波譜分量。在進行波譜法預報時，狀態變數  $\mathbf{x}$  是波譜分量  $\xi_l^m$ ，而不是原來的物理變數  $\xi(\lambda, \mu)$ （如風速分量及其他熱力學變數），後者才可能是可觀測量  $\mathbf{y}$ 。

## 2. 大氣動力學

- (a) 當模式變數是渦度  $\zeta$  和散度  $D$ （用  $\mathbf{x}$  表示），可觀測量為水平速度分量  $(u, v)$  時（用  $\mathbf{y}$  表示），渦度散度和水平速度分量之間的變換為（見曾 1997 第 352 頁）

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{l} \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} ds \quad \text{在邊界上} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \chi = D, \quad \chi = 0 \quad \text{在邊界上} \quad (6)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (7)$$

(5)式中  $l$  表示邊界的周長，(7)式表示 Helmholtz 定律。已知渦度  $\zeta$  和散度  $D$ ，首先按(5)和(6)式分別求出流函數  $\psi$  和速度位  $\chi$ ，這個運算可用  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x})$  表示；最後按(7)式決定出水平速度分量  $(u, v)$ ，這個運算可用  $\mathbf{h}_2$  表示。因此在這裡觀測模式  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_2[\mathbf{h}_1(\mathbf{x})]$  可細分為兩部分。

- (b) 若要由微波的降雨觀測  $\mathbf{y}$  反演出氣溫和水汽的垂直分布  $\mathbf{x}$ ，則觀測模式  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  是對流方案，這是由氣溫和水汽垂直分布決定降雨率（見曾 2006 第 15.5 節）的運算。在這情況下降雨率被視為可觀測量，雖然它是由微波亮度溫度反演出來的量，而不是真正的可觀測量。
- (c) 數值預報模式

數值預報模式可寫為

$$\mathbf{x}_n = \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \quad (8)$$

上式中  $\mathcal{M}_{n,n-1}$  表示將狀態由  $t_{n-1}$  預報到  $t_n$  的算符。這個模式沒考慮模式誤差，此時初始條件  $\mathbf{x}_0$  唯一的決定了以後時刻的狀態變數  $\mathbf{x}_n$  ( $n > 0$ )，它是這個問題中的控制變數。因此觀測模式可寫為

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n[\mathcal{M}_{n,0}(\mathbf{x}_0)] \quad (9)$$

其中  $\mathcal{M}_{n,0}(\mathbf{x}_0)$  表示將狀態由  $t_0 = 0$  預報到  $t_n$  的算符。不過數值預報模式當做約束條件比較方便。

### 3. 遙測問題

(a) 空基 GPS 氣象學（見曾 2006 第 11 章）：

若以折射指數  $\mu$  為可觀測量，則

$$\mu = 1 + 77.6 \times 10^{-6} \frac{p}{T} + 0.373 \frac{e}{T^2} \quad (10)$$

此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為  $(p, T, e)$  的垂直分布，可觀測量  $\mathbf{y}$  為折射指數的垂直分布  $\mu$ 。若以彎角  $\alpha$  為被同化量，則觀測算符有兩部分：

$$\mu = 1 + 77.6 \times 10^{-6} \frac{p}{T} + 0.373 \frac{e}{T^2} \quad (11)$$

$$\alpha(a) = -2a \int_a^{r_0} \frac{d \ln \mu}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (12)$$

此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為  $(p, T, e)$  的垂直分布，可觀測量  $\mathbf{y}$  為彎角垂直分布  $\alpha(a)$ 。在(12)式中  $x$  和  $\alpha$  是一種垂直坐標。

(b) 地基 GPS 氣象學（見曾 2006 第 12 章）：

若以水汽積分量  $u$  為被同化量，則

$$u = \int_0^{\infty} \rho_v dz \quad (13)$$

此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為水汽密度  $\rho_v$  的垂直分布，可觀測量  $\mathbf{y}$  為水汽

積分量。若以天頂延遲  $\varphi_z$  為被同化量，則

$$\varphi_z = 77.6 \times 10^{-5} \frac{R_d p_s}{g} + 0.373 \int_0^{\infty} \frac{e}{T^2} dz \quad (14)$$

此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為地面氣壓  $p_s$  和氣溫、水汽的垂直分布  $(T, e)$ ，可觀測量  $\mathbf{y}$  則為天頂延遲  $\varphi_z$ 。

(c) 衛星紅外資料（見曾 2006 第 15 章）：

可觀測量為輻射強度時，觀測模式是由氣象變數計算輻射強度  $I_\nu$  的輻射傳遞方程：

$$I_\nu = B_\nu(T_s) e^{-\tau_s} + \int_0^{\tau_s} B_\nu(T) e^{-\tau} d\tau \quad (15)$$

這是曾 2006 第 1007 頁(39)式，其中  $B_\nu(T)$  表示溫度  $T$  下的 Planck 函數， $T_s$  為地面溫度， $\tau$  和  $\tau_s$  為光程和地面光程。(15)式的意義請參考曾 2006 第 15.1 節。此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為氣溫垂直分布  $T$ ，可觀測量  $\mathbf{y}$  為輻射強度  $I_\nu$ 。

(d) 雷達資料（見曾 2006 第 14.1 節和 14.5 節）：

Doppler 雷達的觀測模式有兩個。第一是速度分量  $(u, v, w)$  和徑向速度  $v_r$  之間的關係：

$$v_r = \frac{xu + yv + zw}{r} \quad (16)$$

第二是反射率因子  $\eta_r$  和雨水混合比  $q_r$  的關係：

$$\eta_r = 720 n_0 \left[ \frac{\rho q_r}{\pi \rho_w n_0} \right]^{1.75} \quad (17)$$

這是曾 2006 第 989 頁(49)式。雪、冰雹混合比  $(q_s, q_h)$  和反射率因子  $(\eta_s, \eta_h)$  之間的關係類似(17)式。於是跟反射率因子有關的觀測模式為  $\eta = \eta_r + \eta_s + \eta_h$ 。此時狀態變數  $\mathbf{x}$  為風速分量  $(u, v, w)$  和雨水、雪、冰雹混合比  $(q_r, q_s, q_h)$ ，可觀測量  $\mathbf{y}$  為徑向風速  $v_r$  和反射率因子  $\eta$ 。

- (e) 由微波觀測決定降雨率：  
在這情況下，(2)式可寫為

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}_3\{\mathbf{h}_2[\mathbf{h}_1(\mathbf{x})]\} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{x}$  表示降雨率， $\mathbf{h}_1$  表示雲模式， $\mathbf{h}_2$  表示輻射傳遞模式， $\mathbf{h}_3$  表示由亮度溫度計算可觀測量的迴歸模式。雲模式的目的是製造大量降雨率和其他水象垂直分布的統計樣本，輻射傳遞的模式則是計算衛星上微波輻射計所應觀測到的各頻道亮度溫度，迴歸模式  $\mathbf{h}_3$  是計算可觀測量的運算。可觀測量的觀測值可能是亮度溫度觀測值本身，或者由亮度溫度觀測值及其他觀測值計算出來的。上面已說過，在某些情況下，觀測模式可細分為好幾個，如(18)式所示。

## 反問題

必須指出，除了(4)式所示的波譜變換和(5)到(7)式所示的  $(\zeta, D)-(u, v)$  變換外，其他的都是反問題。也就是說，已知觀測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  的統計性質和觀測值  $\mathbf{y}_o$ ，我們要決定出  $\mathbf{x}$  的最佳分析值。有時我們已知狀態的背景值  $\mathbf{x}_b$ ，即

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_b - \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (19)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  表示背景誤差，此時我們的反問題是由已知的觀測誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$  和背景誤差  $\boldsymbol{\varepsilon}_b$  的統計性質以及觀測值  $\mathbf{y}_o$  和背景值  $\mathbf{x}_b$  決定出  $\mathbf{x}$  的最佳分析值。最簡單的反問題求解法是使下面的目標函數  $J$  取極小值（見曾 2006 第 20 頁(53)式）：

$$J = \frac{1}{2}[\mathbf{y}_o - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y}_o - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) \quad (20)$$

其中  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{B}$  分別為觀測誤差和背景誤差的協方差矩陣。這稱為三維變分同化。(4)式所示的波譜變換和(5)到(7)式所示的  $(\zeta, D)-(u, v)$  變換可能是反問題的一部分，但它們在反問題中不能單獨存在。

## 線性古典內插 (Lagrange 內插法)

下面將說明線性古典內插，即 Lagrange 內插法。首先考慮一維線性內插。如圖 1(a)所示，已知 1 點和 2 點的  $\varphi$  值，現在要以線性內插法決定  $k$  點的  $\varphi$  值，寫為  $\psi$ 。顯然的，

$$\psi_k = \varphi(x_k) = (1-p)\varphi_1 + p\varphi_2 \quad (21)$$

其中

$$p = \frac{x_k - x_1}{x_2 - x_1} \quad (22)$$

(21)式是最簡單的一維內插。

對圖 1(b)所示的二維網格來說，A 點和 B 點的  $\varphi$  值，寫為  $\psi_A$  和  $\psi_B$ ，可藉由  $x$  方向的線性內插而得到：

$$\psi_A = (1-p)\varphi_1 + p\varphi_2, \quad \psi_B = (1-p)\varphi_3 + p\varphi_4 \quad (23)$$

$k$  點的  $\psi_k$  值則可藉由  $y$  方向的線性內插而得到：

$$\psi_k = \varphi(x_k, y_k) = (1-q)\psi_A + q\psi_B \quad (24)$$

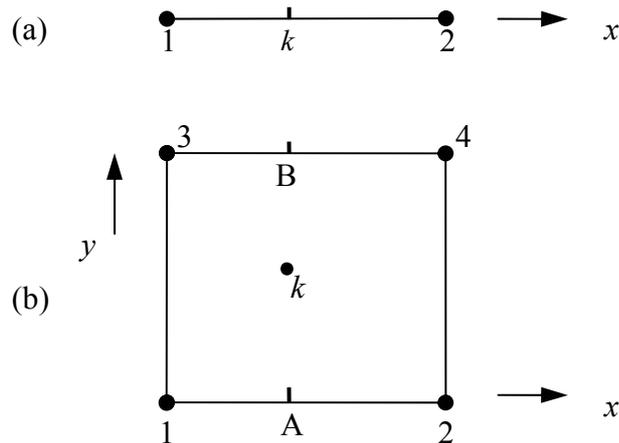


圖 1 一維(a)和二維(b)線性內插。

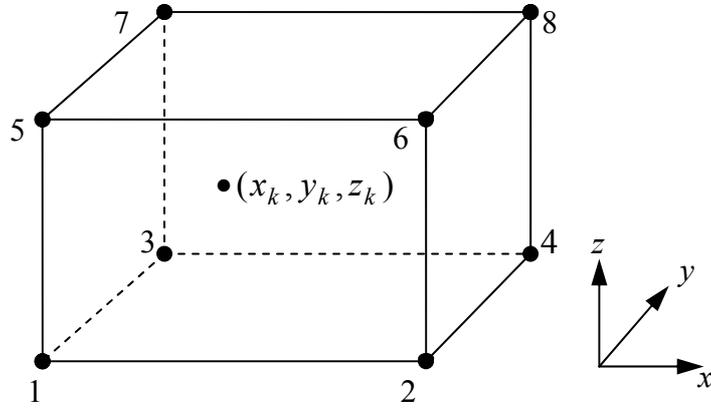


圖 2 三維網格的編號。

其中

$$q = \frac{y_k - y_1}{y_3 - y_1} \quad (25)$$

將(23)式所示的 $\psi_A$ 和 $\psi_B$ 代入(24)式，得到二維內插公式如下：

$$\psi_k = (1-q)[(1-p)\varphi_1 + p\varphi_2] + q[(1-p)\varphi_3 + p\varphi_4] \quad (26)$$

同理，三維的內插公式為

$$\begin{aligned} \psi_k = (1-r) \{ & (1-q)[(1-p)\varphi_1 + p\varphi_2] + q[(1-p)\varphi_3 + p\varphi_4] \} \\ & + r \{ (1-q)[(1-p)\varphi_5 + p\varphi_6] + q[(1-p)\varphi_7 + p\varphi_8] \} \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$r = \frac{z_k - z_1}{z_5 - z_1} \quad (28)$$

三維格點的編號如圖 2 所示。

必須指出，內插到觀測點上的 $\varphi$ 值寫為 $\psi$ 比較方便。

### 一維網格系統的線性觀測模式

下面將寫出線性觀測算符的明確形式。接著考慮圖 3 所示的一維

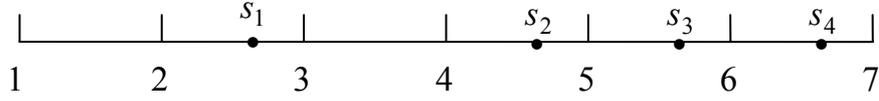


圖 3 一維網格系統

網格系統，這個網格系統有 7 個格點和 4 個測站，測站  $s_1$  在格點 2 和 3 之間，測站  $s_2$  在格點 4 和 5 之間，測站  $s_3$  在格點 5 和 6 之間，測站  $s_4$  在格點 6 和 7 之間。令  $p_k$  表示測站  $s_k$  到左邊格點的距離和格距的比值（見 (22) 式），再令  $\psi_k$  表示測站  $s_k$  上的  $\varphi$  值，則根據 (21) 式有

$$\psi_1 = (1 - p_1)\varphi_2 + p_1\varphi_3, \quad \psi_2 = (1 - p_2)\varphi_4 + p_2\varphi_5 \quad (29)$$

$$\psi_3 = (1 - p_3)\varphi_5 + p_3\varphi_6, \quad \psi_4 = (1 - p_4)\varphi_6 + p_4\varphi_7 \quad (30)$$

上面兩個式子寫成矩陣形式，就是

$$\Psi = \mathbf{H}\Phi$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi &= [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4]^T \\ \Phi &= [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6 \quad \varphi_7]^T \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{p}_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{p}_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{p}_3 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{p}_4 & p_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

上式中  $\hat{p}_k = 1 - p_k$ 。

在導出 (29) 和 (30) 式時，可先建立局部編號和全域編號之間的對照表，如表 1 所示，然後 (31) 式所示的矩陣  $\mathbf{H}$  的所有元素就可以計算機程

表 1 局部編號和全域編號之間的關係。

局部編號		1	2
測站 1	全 域 編 號	2	3
測站 2		4	5
測站 3		5	6
測站 4		6	7

式產生。不過事實上在進行資料同化時並不需要把整個線性觀測算符  $\mathbf{H}$  產生出來。所謂局部編號是圖 1(a)所示的編號，測站左邊的格點編成 1，右邊的編成 2；所謂全域編號是指圖 3 所示的編號。

## 二維網格系統的線性觀測模式

考慮圖 4 所示的二維網格系統，這裡有 16 個格點和 4 個測站。二維內插公式(26)式可改寫為

$$\begin{aligned}\psi_k &= (1-p)(1-q)\varphi_1 + p(1-q)\varphi_2 + (1-p)q\varphi_3 + pq\varphi_4 \\ &= \hat{p}\hat{q}\varphi_1 + p\hat{q}\varphi_2 + \hat{p}q\varphi_3 + pq\varphi_4\end{aligned}\quad (32)$$

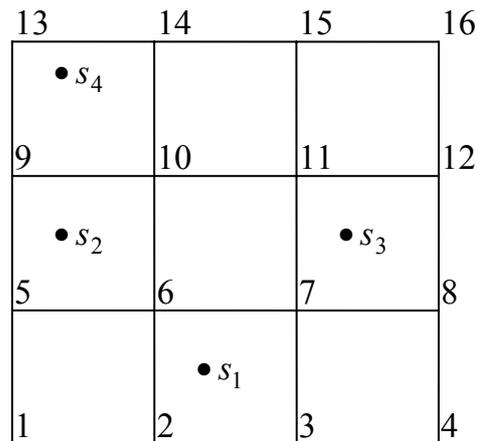


圖 4 二維網格系統。

表 2 局部編號和全域編號之間的關係。

局部編號		1	2	3	4
測站 1	全域 編號	2	3	6	7
測站 2		5	6	9	10
測站 3		7	8	11	12
測站 4		9	10	13	14

然後建立一個如表 2 所示的局部編號和全域編號的對照表，就可寫出測站上  $\psi$  值和格點上  $\varphi$  值的關係如下：

$$\psi_1 = \hat{p}_1 \hat{q}_1 \varphi_2 + p_1 \hat{q}_1 \varphi_3 + \hat{p}_1 q_1 \varphi_6 + p_1 q_1 \varphi_7$$

$$\psi_2 = \hat{p}_2 \hat{q}_2 \varphi_5 + p_2 \hat{q}_2 \varphi_6 + \hat{p}_2 q_2 \varphi_9 + p_2 q_2 \varphi_{10}$$

$$\psi_3 = \hat{p}_3 \hat{q}_3 \varphi_7 + p_3 \hat{q}_3 \varphi_8 + \hat{p}_3 q_3 \varphi_{11} + p_3 q_3 \varphi_{12}$$

$$\psi_4 = \hat{p}_4 \hat{q}_4 \varphi_9 + p_4 \hat{q}_4 \varphi_{10} + \hat{p}_4 q_4 \varphi_{13} + p_4 q_4 \varphi_{14}$$

上面 4 個式子寫成矩陣形式，就是

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} \quad (33)$$

其中

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4 \quad \varphi_5 \quad \varphi_6 \quad \varphi_7 \quad \varphi_8 \quad \varphi_9 \quad \varphi_{10} \quad \varphi_{11} \quad \varphi_{12} \quad \varphi_{13} \quad \varphi_{14} \quad \varphi_{15} \quad \varphi_{16}]^T$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_3 \quad \mathbf{H}_4]$$

在這裡

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{p}_1 \hat{q}_1 & p_1 \hat{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{p}_1 q_1 & p_1 q_1 & 0 \\ \hat{p}_2 \hat{q}_2 & p_2 \hat{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{p}_3 \hat{q}_3 & p_3 \hat{q}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{p}_2 q_2 & p_2 q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{p}_3 q_3 & p_3 q_3 \\ \hat{p}_4 \hat{q}_4 & p_4 \hat{q}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{p}_4 q_4 & p_4 q_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

事實上在進行資料同化時也不需要把整個這個線性觀測算符  $\mathbf{H}$  產生出來。

### 參考文獻

- 曾忠一, 1993: 大氣模式的數值方法. 國立編譯館主編, 渤海堂出版, 台北市, 695 頁.
- 曾忠一, 1997: 氣象資料同化. 國立編譯館主編, 渤海堂出版, 台北市, 594 頁.
- 曾忠一, 2006: 大氣科學中的反問題. 國立編譯館主編出版, 台北市, 1288 頁.