

1.2 節補充//時間差分方案

爲了說明風杯方程（cup anemometer equation）

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = v_e \quad (1)$$

的時間差分方案，考慮下面的常微分方程：

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t) \quad (2)$$

在這裡只說明二時間層方案（two-level scheme）。將(2)式對 t 由 t_n 積到 t_{n+1} ，有

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(U, t) dt \quad (3)$$

上式中的積分式以不同的方法來近似，就得到不同的方案。最簡單的是下面 3 個：

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(U, t) dt \cong f(U^{(n)}, t_n) \Delta t$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(U, t) dt \cong f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) \Delta t$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(U, t) dt \cong \frac{\Delta t}{2} [f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) + f(U^{(n)}, t_n)]$$

其中 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 表示時間步長。由上面 3 個近似，得到了 3 個最簡單的時間差分方案：

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t f(U^{(n)}, t_n) \quad (\text{向前}) \quad (4)$$

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) \quad (\text{向後}) \quad (5)$$

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} [f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) + f(U^{(n)}, t_n)] \quad (\text{梯形}) \quad (6)$$

(4), (5)和(6)式分別稱爲 Euler 方案（向前時間差分，forward scheme）、

向後差分方案（backward scheme）和梯形方案（trapezoidal scheme）。它們可分別寫為

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} = f(U^{(n)}, t_n) + O(\Delta t) \quad (7)$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} = f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) + O(\Delta t) \quad (8)$$

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} = \frac{1}{2}[f(U^{(n+1)}, t_{n+1}) + f(U^{(n)}, t_n)] + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

Euler 方案和向後差分方案是一階準確的，梯形方案則是二階準確的。

風杯方程的梯形方案，根據(9)式，是

$$\tau \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + \frac{v_{n+1} + v_n}{2} = v_e \quad (10)$$

也可寫為

$$\tau \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t} + \frac{v_n + v_{n-1}}{2} = v_e \quad (11)$$

(10)式相當於將(1)式放在 $t_{n+1/2}$ ，即

$$\tau \left[\frac{dv}{dt} \right]_{n+1/2} + v_{n+1/2} = v_e \quad (12)$$

然後上式左邊第 1 項的時間導數項用中差分法來近似，第 2 項 $v_{n+1/2}$ 不在時間格點上，使用 v_n 和 v_{n+1} 的平均值來近似，因而得到(10)式。(11)式相當於將(1)式放在 $t_{n-1/2}$ 上。

其他時間差分格式，舉例說，見曾 1993 第 90 頁。