

4.2 節補充//Jacobi 矩陣（2007.4.29 修改）

本書中出現幾個 Jacobi 矩陣。所謂 Jacobi 矩陣是指一個向量關於另一個向量的導數。

例 1 流體力學方程中的非線性平流項可寫為 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ，在這裡 $\mathbf{u}$ 為三維速度向量。其中 $\nabla \mathbf{u}$ 這一項是一個矩陣，它的第 (i, j) 個元素是 $\partial u_i / \partial x_j$ 。因此平流項 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ 若用矩陣表示就是 $\mathbf{U}\mathbf{u}$ ， $\mathbf{U}$ 表示速度向量 $\mathbf{u}$ 關於位置向量 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩陣，即 $U_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ 。我們看一下 $\mathbf{U}\mathbf{u}$ 是不是正確的平流項的表達式：

$$\mathbf{U}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

顯然的，這個表達式是正確的。

例 2 求解非線性方程的 Newton-Raphson 疊代法（第 39 頁）。考慮非線性方程組 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的求解問題，其中 $\mathbf{x}$ 為待求向量。第 $m+1$ 次疊代值可寫為 $\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m + \boldsymbol{\delta}$ ，其中 $\boldsymbol{\delta}$ 為微小的修正向量。假設這個新的疊代值已滿足非線性方程組，即

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_m + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

將上式對 $\mathbf{x}_m$ 做 Taylor 級數展開，有

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_m + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) + \mathbf{F}(\mathbf{x}_m) \boldsymbol{\delta} + \cdots = \mathbf{0} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = [\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}]^T$ 為 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 對 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩陣，這個方形矩陣的第 (i, j) 個元素是 $\partial f_i / \partial x_j$ 。將(2)式中高階項省略掉，得到

$$\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_m) \mathbf{f}(\mathbf{x}_m)$$

於是 Newton-Raphson 法的疊代方案為

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_m) \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) \quad (3)$$

例 3 牛頓下降法。求目標函數 $J(\mathbf{x})$ 的極小值，相當於求解非線性方程 $\nabla J(\mathbf{x}) = 0$ 。令 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \nabla J(\mathbf{x})$ ，則有

$$F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j} \equiv G_{ij}$$

因此， $\mathbf{F}$ 就是目標函數的 Hesse 矩陣 $\mathbf{G}$ 。於是求解極小化問題的牛頓疊代方案為

$$\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_m - \mathbf{G}_m^{-1} \nabla J(\mathbf{x}_m) \quad (4)$$

1.3 節中已指出，若 $\mathbf{G}_m^{-1}$ 是對稱正定矩陣，則 $-\mathbf{G}_m^{-1} \nabla J(\mathbf{x}_m)$ 是下降方向。只要 Hesse 矩陣繼續保持非奇異（nonsingular），而且是正定的對稱矩陣，則牛頓疊代方案似乎沒有問題。

例 4 非線性觀測模式 $\mathbf{y}_o = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_r$ 。將 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 對背景值 $\mathbf{x}_b$ 做 Taylor 級數展開，有

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_b) + \mathbf{h}'(\mathbf{x}_b)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \cdots = \mathbf{h}(\mathbf{x}_b) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_b)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \cdots$$

其中 $\mathbf{H} \equiv \mathbf{h}'(\mathbf{x}_b)$ ，它的第 (i, j) 個元素是 $\partial h_i / \partial x_j$ ，其中 h_i 和 ∂x_j 分別為單行向量 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{x}$ 的第 i 個和第 j 個元素。令 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{x}$ 分別為 $L \times 1$ 和 $M \times 1$ 矩陣，將 $\mathbf{H}$ 完整寫出來，就是

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_M} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_L}{\partial x_1} & \frac{\partial h_L}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_L}{\partial x_M} \end{bmatrix}$$

例 5 非線性預報模式 $\mathbf{x}_n = \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1})$ 。將這個式子取變分，得到

$$\delta \mathbf{x}_n = \mathcal{M}'_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \delta \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1}) \delta \mathbf{x}_{n-1}$$

上式中 $\mathbf{M}_{n,n-1}$ 的第 (i, j) 個元素是 $\partial[\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1})]_i / \partial[\mathbf{x}_{n-1}]_j$ ，其中 $[\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1})]_i$ 和 $[\mathbf{x}_{n-1}]_j$ 分別表示單行向量 $\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbf{x}_{n-1})$ 和 $\mathbf{x}_{n-1}$ 的第 i 個和第 j 個元素。

下面 4 個有關 Jacobi 矩陣的關係式相當重要：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \quad (\boldsymbol{\lambda} \text{ 和 } \mathbf{x} \text{ 無關})} \quad (5)$$

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta} + \cdots \quad (\text{Taylor 級數展開})} \quad (6)$$

$$\boxed{\delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x} \quad (\text{取變分})} \quad (7)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x})] = 2 \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{A} \text{ 對稱矩陣})} \quad (8)$$

上面三個式子中 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 關於向量 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩陣，即 $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ 。

這幾個式子的證明很簡單：

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial x_m} (\lambda_i f_i) = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_m} = F_{im} \lambda_i \Rightarrow \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}) \Rightarrow f_i(x_1 + \eta_1, x_2 + \eta_2, \cdots) = f_i(x_1, x_2, \cdots) + \frac{\partial f_i}{\partial \eta_1} \eta_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \eta_2} \eta_2 + \cdots$$

$$= f_i(x_1, x_2, \cdots) + \frac{\partial f_i}{\partial \eta_j} \eta_j + \cdots = f_i(x_1, x_2, \cdots) + F_{ij} \eta_j + \cdots$$

$$\Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta} + \cdots$$

$$\delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \cdots = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j = F_{ij} \delta x_j \Rightarrow \mathbf{F} \delta \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} \mathbf{f}(\mathbf{x})] &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_m} (f_i A_{ij} f_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_m} A_{ij} f_j + f_i A_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_m} \\ &= F_{im} A_{ij} f_j + F_{jm} A_{ij} f_i \Rightarrow \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{f} + \mathbf{F}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} = 2\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{f}\end{aligned}$$

Jacobi 行列式

若以直角坐標系 (x_1, x_2, x_3) 表示，一條曲線可寫為

$$C: \quad x_1 = x_1(\tau), \quad x_2 = x_2(\tau), \quad x_3 = x_3(\tau) \quad (9)$$

其中 τ 是參數，這種表示法稱為參數表示法。也可用另外兩種方法來表示一條曲線：

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = g(x_1) \quad (10)$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (11)$$

曲線 C 上任一點的切線方向按下面方法求得。令 $\mathbf{r}(\tau)$ 為曲線 C 上某一點 P 的位置向量：

$$\mathbf{r}(\tau) = x_1(\tau)\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2(\tau)\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3(\tau)\hat{\mathbf{e}}_3 = x_i(\tau)\hat{\mathbf{e}}_i$$

其中 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 為沿直角坐標 x_i 的單位向量。設 Q 為 P 附近的一點， P 和 Q 兩點的參數分別為 τ 和 $\tau + \Delta\tau$ ，如圖 1 所示，則線段 PQ 的方向為：

$$\frac{\mathbf{r}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{r}(\tau)}{\Delta\tau}$$

當 $\Delta\tau$ 趨近於零時， Q 點趨近於 P 點，這個方向就是 P 點上的切線方向。因此，切線方向就是

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{r}(\tau)}{\Delta\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad (12)$$

換句話說，曲線 C 上 P 點的切線方向為 $\dot{x}_i(\tau) \equiv \partial x_i / \partial \tau$ 。至於切線方向

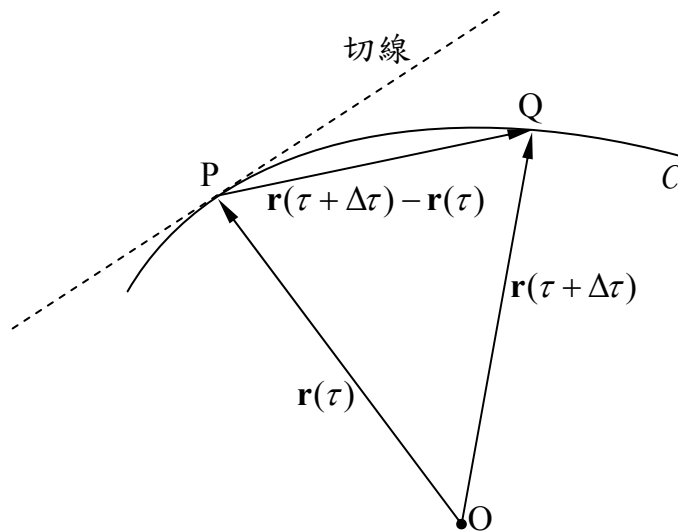


圖 1

的單位向量，即單位切線向量，就是

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{|\dot{\mathbf{r}}|}} = \frac{\dot{x}_i \hat{\mathbf{e}}_i}{\sqrt{\dot{x}_j \dot{x}_j}} \quad (13)$$

假設方程

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3), \quad x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3), \quad x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \quad (14)$$

可解釋為定義空間中曲線坐標 (q_1, q_2, q_3) 的方程。令 P 點的直角坐標為 (x_1, x_2, x_3) ，則它的位置向量 $\mathbf{r}$ 為

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (15)$$

於是(14)式可改寫為

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \quad (16)$$

令上式中 q_2 和 q_3 固定，而 q_1 變動，這樣就描繪出一條曲線，這條曲線稱為 q_1 曲線，如圖 2 所示。此時 q_1 相當於(12)式中的 τ ，根據(12)式 P 點上 q_1 曲線的切線方向為 $\partial \mathbf{r} / \partial q_1$ ，而單位切線向量就是

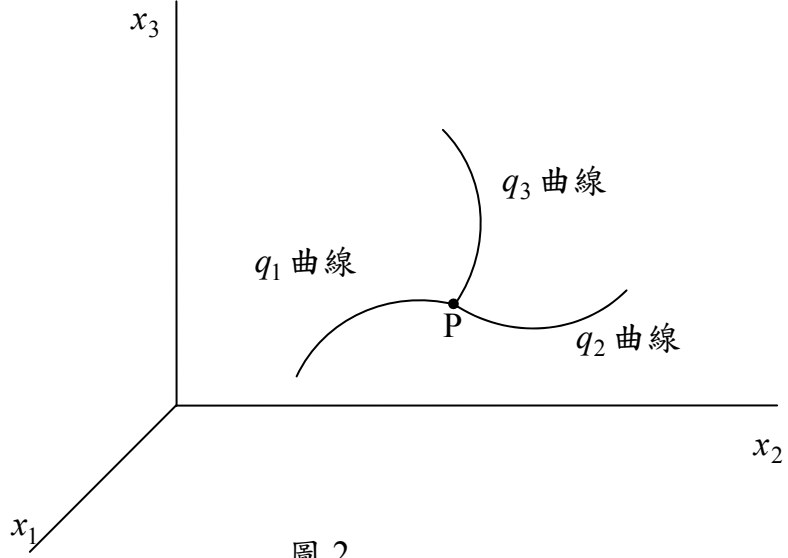


圖 2

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial q_1}{|\partial \mathbf{r} / \partial q_1|}$$

上式也可改寫為

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = h_1 \hat{\mathbf{a}}_1, \quad h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right|$$

同理，令 $\hat{\mathbf{a}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_3$ 分別為 P 點上 q_2 曲線和 q_3 曲線的單位切線方向，則有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} &= h_2 \hat{\mathbf{a}}_2, & h_2 &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right| \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} &= h_3 \hat{\mathbf{a}}_3, & h_3 &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right| \end{aligned}$$

h_1 , h_2 和 h_3 稱為比例尺因子 (scale factor)。單位向量 $\hat{\mathbf{a}}_1$, $\hat{\mathbf{a}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_3$ 分別指向 q_1 , q_2 和 q_3 增加的方向。

將(16)式取微分，有

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \hat{\mathbf{a}}_1 + h_2 dq_2 \hat{\mathbf{a}}_2 + h_3 dq_3 \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (17)$$

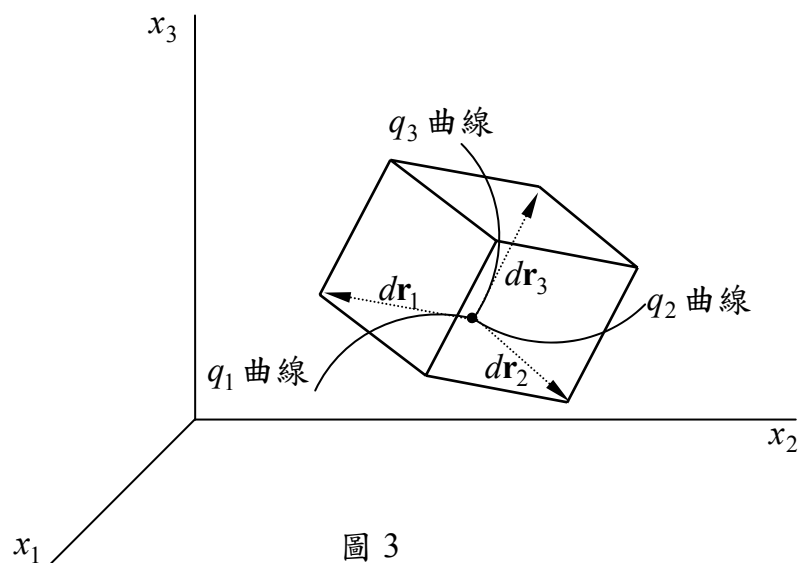


圖 3

沿著 q_1 曲線， q_2 和 q_3 是常數，故由上式有

$$d\mathbf{r}_1 = h_1 dq_1 \hat{\mathbf{a}}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 \quad (18)$$

同理，沿著 q_2 和 q_3 曲線，由(17)式分別有

$$d\mathbf{r}_2 = h_2 dq_2 \hat{\mathbf{a}}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 \quad (19)$$

$$d\mathbf{r}_3 = h_3 dq_3 \hat{\mathbf{a}}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (20)$$

因此如圖 3 所示，曲線坐標系統中的體積元就是

$$d\tau = d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (21)$$

即

$$d\tau = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| dq_1 dq_2 dq_3 \quad (22)$$

其中

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial q_1 & \partial x_1 / \partial q_2 & \partial x_1 / \partial q_3 \\ \partial x_2 / \partial q_1 & \partial x_2 / \partial q_2 & \partial x_2 / \partial q_3 \\ \partial x_3 / \partial q_1 & \partial x_3 / \partial q_2 & \partial x_3 / \partial q_3 \end{vmatrix} \quad (23)$$

稱為變換 **Jacobi** 行列式。這個行列式必須是正值，因而必須取絕對值。導出(22)式時已用到了下面向量分析的關係式：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

例 1 積分式中的變數更換

考慮下面的積分式

$$I = \iint f(x, y) dx dy$$

若要將這個式子變換成極坐標，有

$$I = \iint f[x(r, \theta), y(r, \theta)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

顯然的，

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$$

根據下面直角坐標和極坐標之間的變換：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

得到

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

例 2 機率密度函數的變數更換：

考慮下面的機率分布函數：

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,y}(x,y) dx dy = 1$$

若要將這個式子中隨機變數 (x,y) 變換成 (ξ,η) ，則有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,y}(x,y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty p_{x,y}[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| d\xi d\eta \end{aligned}$$

其中 $p_{x,y}(x,y)$ 表示隨機變數 (x,y) 的聯合機率密度。因此，隨機變數 (ξ,η) 的聯合機率密度函數 $p_{\xi,\eta}(\xi,\eta)$ 為

$$p_{\xi,\eta}(\xi,\eta) = p_{x,y}[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right|$$

當然上式只有在 (x,y) 和 (ξ,η) 為一對一變換時才是正確的，否則必須根據機率密度函數的變換規則加以變換。

例 3 輻射強度之間的變換

單色輻射強度（radiance）可用波長 λ 、波數 ν 或頻率 $\tilde{\nu}$ 表示，分別寫為 I_λ 、 I_ν 和 $I_{\tilde{\nu}}$ 表示，它們之間的關係為

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu}$$

其中 I 表示總輻射強度，單位為 energy/area-time-sr，在這裡 sr 是 steradian（球面度）的簡寫。至於 I_λ 、 I_ν 和 $I_{\tilde{\nu}}$ 的單位分別為

$$\begin{aligned} I_\lambda &: \text{energy/area-time-wavelength-sr} \\ I_\nu &: \text{energy/area-time-wavenumber-sr} \\ I_{\tilde{\nu}} &: \text{energy/area-time-frequency-sr} \end{aligned}$$

3 個單色輻射強度之間的關係為

$$I_\lambda |d\lambda| = I_\nu |d\nu| = I_{\tilde{\nu}} |d\tilde{\nu}|$$

其中波長 λ 、波數 ν 和頻率 $\tilde{\nu}$ 之間的關係如下：

$$c = \lambda \tilde{\nu} = \tilde{\nu} / \nu$$

上式中 c 爲光速。因此

$$I_\lambda = I_\nu \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = I_{\tilde{\nu}} \left| \frac{d\tilde{\nu}}{d\lambda} \right|$$

其中 $|d\nu/d\lambda|$ 和 $|d\tilde{\nu}/d\lambda|$ 是變換 Jacobi 行列式。

例 4 正壓渦度方程

考慮下面的正壓渦度方程：

$$\zeta_t + u\zeta_x + v\zeta_y + v\beta = 0 \quad (24)$$

上式中已設 $f_x = 0$ ，Rossby 參數 $\beta = df/dy$ 爲常數。根據無散度方程 $u_x + v_y = 0$ ，我們引進流函數 ψ ，即

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x \quad (25)$$

則(24)式可寫爲

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (f + \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (f + \zeta)}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

上式改寫爲

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (\psi, f + \zeta)}{\partial (x, y)} = 0 \quad (27)$$

其中 $\partial(\psi, f + \zeta)/\partial(x, y)$ 表示 Jacobi 行列式，但不需取絕對值。這個 Jacobi 行列式的差分方案在早期數值預報中相當重要。(24)式所示的正壓渦度方程具有總能量、總渦度平方和總渦度的守恆律。要如何設計一個 Jacobi 行列式的差分方案，使得這 3 個守恆性質仍然成立，對正壓模式的預報相當重要。