氣象資料同化考古題

曾 忠 一

(2003 年 2 月 13 日更新)

1.氣象資料同化期末考題

1997.5.8

1. 試述衛星資料的特徵.
2. 解釋下面的名詞(以最短的句子表達):
   (a)重大誤差(gross error).
   (b)鄰近點檢驗(buddy check).
   (c)向前內插(forward interpolation).
   (d)代表性誤差(error of representativeness).
   (e)間歇資料同化(intermittent data assimilation).
3. 考慮下面的數位濾波器:

$$\overline{\varphi}_j = \frac{1}{4}(\varphi_{j-1} + 2\varphi_j + \varphi_{j+1})$$

試求出頻率反應函數 $H(k)$, 設濾波前後的變數φ_j和$\overline{\varphi}_j$具有下面形式的解:

$$\varphi_j = Ae^{ikx}, \qquad \overline{\varphi}_j = H(k)Ae^{ikx}, \qquad x = j\Delta x$$

其中 A 為振幅, k 為波數, j 為空間點指標. 試述這個濾波器的特性.

4. 若直接觀測到的量不是 **x**, 而是 **y**, 它們之間有下面的關係: **y**=**h**(**x**), 其中 **h** 稱為觀測算符. 試以氣象學中經常遇到的情況為例說明 **h** 的意義.
5. 統計內插格式為

$$\varphi_j^a = \varphi_j^b + \sum_{k=1}^{K} w_k(\varphi_k^o - \varphi_k^b)$$

其中上標 a, b, o 分別表示分析值、背景值和觀測值, j 和 k 分別表示格點和測站. w_k 為權重, 可令分析誤差的方差 $E_j^2 = \langle \varepsilon_j^a \varepsilon_j^a \rangle$ 為極小而得到. (a)試導出 E_j^2 的表達式. (b)將 E_j^2 對 w_k 微分, 並令結果等於零, 就可得到關於權重 w_k 的代數方程組, 寫出導出過程, 並說明所做的假設.

2.氣象資料同化期中考題

1999 年 11 月

1. 考慮下面的線性平流方程及其初始邊界條件:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad c>0. \tag{1a}$$

$$u(x, 0)=\text{已知}, \qquad u(0, t)=\text{已知}. \tag{1b}$$

這個方程的一個有限差分格式是向前時間上游格式(forward time upstream scheme):

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0, \qquad \begin{array}{l} n=1,2,\cdots,N-1 \\ j=2,3,\cdots,M \end{array} \tag{2a}$$

$$u_j^1=\text{已知}, \quad j=2,3,\cdots,M; \qquad u_1^n=\text{已知}, \quad n=1,2,\cdots,N \tag{2b}$$

(2a)式可改寫為

$$u_j^{n+1}=\mu u_{j-1}^n+(1-\mu)u_j^n, \qquad \begin{array}{l} n=1,2,\cdots,N-1 \\ j=2,3,\cdots,M \end{array} \tag{3}$$

這個格式的穩定條件是$\mu\equiv c\Delta t/\Delta x$在0到1之間. 若要由觀測資料$\tilde{u}_j^n$($j=2,3,\cdots,M$; $n=1,2,\cdots,N$)決定最佳的初始值u_j^1(j=2, 3,$\cdots$, M), 可令下面的代價函數J取極小值:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M}(u_j^n-\tilde{u}_j^n)^2 \tag{4}$$

將(3)式視為強勢約束條件, 則需要極小化的代價函數變為

$$J_1 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M}(u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 + \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}\lambda_j^n[u_j^{n+1} - \mu u_{j-1}^n - (1-\mu)u_j^n] \tag{5}$$

(a) 試導出共軛方程及其初始邊界條件.

(b) 試導出代價函數梯度 $\partial J / \partial u_j^1$ $(j = 2, 3, \cdots, M)$ 的表達式.

(c) 將 Courant 數 μ 視為控制變數, 試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式.

2. 試進行下面的微分:

(a) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}) = ?$ (b) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = ?$ (c) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}) = ?$

其中 **x** 為 $N \times 1$ 矩陣, **A** 為 $N \times N$ 矩陣, 星號*表示矩陣的轉置.

3. 閱讀下面一段文字, 然後回答 3 個問題:

(a)何謂 principle of minimum action?

(b)試導出(6)式.

(c)試導出(7)式.

6.2.1. Ray trajectory equations

The equations of the rays are derived from the principle of minimum action. If a refractivity field $n(\mathbf{x})$ is given, where $\mathbf{x}=(x^1, x^2, x^3)$ is a set of coordinates, then the rays minimize the functional:

$$\Phi = \int L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\, d\tau \tag{6}$$

$$L = n(\mathbf{x})\,|\,\dot{\mathbf{x}}\,|,$$

where τ is the parameter of the trajectory: $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\tau)$.

The simplest form of ray trajectory equations may be obtained in cartesian coordinates when choosing the parameter τ so that $d\tau = ds/n$, where s is the ray arc length. Under this conditions

$$L = n(\mathbf{x})\sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}\ ,$$

and the Euler-Lagrange equation

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

takes the form

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = n\frac{\partial n}{\partial x^i}\,. \tag{7}$$

This equation may be rewritten as a system of the first order:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = u^i\,, \qquad \frac{du^i}{d\tau} = n\frac{\partial n}{\partial x^i}$$

3.氣象資料同化期末考題

2000 年 1 月

1. 化簡下面的表達式, 最後寫成矩陣形式:

   (a) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Ax})$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分別為 $N \times N$ 和 $N \times 1$ 矩陣.

   (b) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{Ax})$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分別為 $N \times N$ 和 $N \times 1$ 矩陣.

   (c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 為向量, 乘號表示向量積. 請記得 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$.

2. 假設在求解域 $\Omega \times \theta$ 中有兩個弱勢約束條件

$$P \simeq 0, \qquad Q \simeq 0$$

   在這情況下代價函數 J 可寫為

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\theta \int_\Omega (\alpha P^2 + \beta Q^2) d\tau dt$$

   其中 $d\tau$ 和 dt 分別表示體積元和時間元. 試問在 Zhang and Gal-Chen 1996 和 Liou 1999 這兩篇文章中他們選擇權重 α 和 β 的基本原則是什麼?

3. 試以簡短而清晰的文字解釋 Kalman 濾波器, 可以不必列出公式或繪出任何圖.

4. 考慮下面的擴散方程:

$$u_t = \kappa u_{xx}, \qquad t \geq 0, \qquad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{1}$$

   其中下標 t 和 x 分別表示關於 t 和 x 的導數. 擴散係數 κ 設為和 x, t 無關. 假設(1)式的定解條件為

$$u(x,0)=\text{給出} \qquad (\text{但不固定}) \tag{2}$$

$$u(x_1,t)=\text{已知且固定}, \qquad u_x(x_2,t)=\text{已知且固定} \tag{3}$$

其中(2)式是初始條件，(3)式是邊界條件．必須注意，在 $x=x_2$ 處的邊界條件是Neumann型的，即變數u的導數而不是u本身是給定的．

現在希望由$u(x, t)$的觀測值$\tilde{u}(x,t)$決定出最佳的初始值$u(x, 0)$，因而(2)式中的$u(x, 0)$是待求函數，那裡的"給出"兩字表示這個值要給，才能按(1)式解出$u(x, t)$來．在這情況下代價函數為

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\theta\int_{x_1}^{x_2}(u-\tilde{u})^2dxdt \tag{4}$$

將(1)式視為強勢約束條件，則(4)式可改寫為

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\theta\int_{x_1}^{x_2}\left[0.5(u-\tilde{u})^2+\lambda(u_t-\kappa u_{xx})\right]dxdt \tag{5}$$

將(5)式取變分，並做分部積分後，有

$$\begin{aligned}\delta J=&\int_0^\theta\int_{x_1}^{x_2}(-\lambda_t-\kappa\lambda_{xx}+u-\tilde{u})\,\delta u dxdt\\&+\int_{x_1}^{x_2}\left[\lambda(x,\theta)\delta u(x,\theta)-\lambda(x,0)\delta u(x,0)\right]dx\\&+\kappa\int_0^\theta\left[-\lambda(x_2,t)\delta u_x(x_2,t)+\lambda_x(x_2,t)\delta u(x_2,t)\right.\\&\left.+\lambda(x_1,t)\delta u_x(x_1,t)-\lambda_x(x_1,t)\delta u(x_1,t)\right]dt\end{aligned} \tag{6}$$

(a)請寫出共軛方程．

(b)試問 $\lambda(x,\theta)$, $\delta u(x,\theta)$, $\lambda(x,0)$ 和 $\delta u(x,0)$ 的值是否等於零，為什麼？

(c)試問下面7個量 $\lambda(x_2,t)$, $\delta u_x(x_2,t)$, $\lambda_x(x_2,t)$, $\delta u(x_2,t)$, $\lambda(x_1,t)$,

$\delta u_x(x_1,t)$, $\lambda_x(x_1,t)$ 和 $\delta u(x_1,t)$ 的值是否等於零，為什麼？

(d)寫出共軛方程的初始條件和邊界條件.

(e)寫出 $\partial J/\partial u(x,0)$ 的表達式.

5. 考慮一維線性化淺水方程 $u_t + gh_x = 0$，$h_t + Hu_x = 0$，其中g和H分別為重力加速度和平均水深，它們設為與x, t無關. 這個方程的一個數值格式為

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + g\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{h_j^{n+1}-h_j^n}{\Delta t} + H\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \tag{8}$$

$$n = 1, 2, \cdots, N-1, \qquad j = 2, 3, \cdots, M-1$$

這個格式稱為向前向後格式(forward-backward scheme), 是一種省時顯式格式(economical explicit scheme). (7)和(8)式的初始、邊界條件設為

$$u_j^1,\ h_j^1 = \text{給定(但不固定, 因為它是未知數)} \tag{9}$$

$$u_1^n,\ h_1^n = \text{已知且固定}, \quad u_M^n,\ h_M^n = \text{已知固定}, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{10}$$

現在要由u_j^n，h_j^n的觀測值$\tilde{u}_j^n$，$\tilde{h}_j^n$決定出最佳的初始值u_j^1，h_j^1. 此時代價函數可設為

$$J = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-1}\left[\frac{\alpha}{2}(u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 + \frac{\beta}{2}(h_j^n - \tilde{h}_j^n)^2\right] \tag{11}$$

將(7)和(8)式當做強勢約束條件，引進Lagrange乘數λ和μ，則代價函數(11)式變為

$$J=\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-1}\left[\frac{\alpha}{2}(u_j^n-\widetilde{u}_j^n)^2+\frac{\beta}{2}(h_j^n-\widetilde{h}_j^n)^2\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M-1}\left\{\lambda_j^n\left[u_j^{n+1}-u_j^n+\frac{g\Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n)\right]+\mu_j^n\left[h_j^{n+1}-h_j^n+\frac{H\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})\right]\right\} \tag{12}$$

由(12)式我們得到下面兩個表達式:

$$\frac{\partial J}{\partial u_j^n}=\alpha(u_j^n-\widetilde{u}_j^n)+\lambda_j^{n-1}-\lambda_j^n+\frac{H\Delta t}{2\Delta x}(\mu_{j-1}^{n-1}-\mu_{j+1}^{n-1}) \tag{13}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_j^n}=\beta(h_j^n-\widetilde{h}_j^n)+\frac{g\Delta t}{2\Delta x}(\lambda_{j-1}^n-\lambda_{j+1}^n)+\mu_j^{n-1}-\mu_j^n \tag{14}$$

(a)試由(13)式和(14)式決定兩個共軛方程, 必須寫出j和n的範圍.

(b)試由(13)式和(14)式決定兩個共軛方程的初始、邊界條件, 必須寫出j和n的範圍.

(c)試由(13)式和(14)式寫出$\partial J/\partial u_j^1$和$\partial J/\partial h_j^1$的表達式, 其中若有等於零的項必須指明, 或乾脆不寫.

(d)本題有兩個共軛方程, 試問以寫程式的觀點來看, 哪一個先求解比較恰當? 為什麼? 在求解這兩個共軛方程時, 要不要用到求解線性代數方程組(linear system)的副程式? 為什麼?

(e)試述如何決定最佳的初始值u_j^1和h_j^1 ($j=2,3,\cdots,M-1$), 請寫出步驟.

4.氣象資料同化期中考題

2000.12.6

1.考慮下面的線性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

這個方程的一個差分格式是隱式格式(implicit scheme)：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{c}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right]=0 \tag{2}$$

其中平流速度 c 為常數。在(2)式中時間差分用梯形格式，空間差分用中差分法。(2)式可改寫為

$$\Gamma_j^n=\mu\, u_{j+1}^{n+1}+u_j^{n+1}-\mu\, u_{j-1}^{n+1}+\mu\, u_{j+1}^n-u_j^n-\mu\, u_{j-1}^n=0 \tag{3}$$

其中 $\mu=c\Delta t/4\Delta x$。求解(3)式時必須使用的初始、邊界條件為

$$u_j^1=\text{已知},\qquad j=2,3,\cdots,M-1 \tag{4a}$$

$$u_1^n=\text{已知},\qquad u_M^n=\text{已知},\qquad n=1,2,\cdots,N \tag{4b}$$

若要由觀測資料 $\tilde{u}_j^n\ (j=2,3,\cdots,M-1;n=1,2,\cdots,N)$ 決定出最佳的初始值 $u_j^1\ (j=2,3,\cdots,M-1)$，可令下面的代價函數取極小值：

$$J=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-1}(u_j^n-\tilde{u}_j^n)^2+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M-1}\lambda_j^n\,\Gamma_j^n \tag{5}$$

將(5)式對 u 微分，得到下面的表達式：

$$\frac{\partial J}{\partial u_j^n}=u_j^n-\tilde{u}_j^n+\mu\,\lambda_{j-1}^{n-1}+\lambda_j^{n-1}-\mu\,\lambda_{j+1}^{n-1}+\mu\,\lambda_{j-1}^n-\lambda_j^n-\mu\,\lambda_{j+1}^n \tag{6}$$

(a)試述如何由給定的初始、邊界條件決定出每個時空格點上的 u 值。

(b)試導出共軛方程及其初始、邊界條件。

(c)試導出代價函數梯度 $\partial J / \partial u_j^1 \ (j = 2, 3, \cdots, M-1)$ 的表達式。

(d)將 μ 視為控制變數，試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式。

(e)試述如何由給定的初始、邊界條件決定出每個時空格點上的 λ 值。

注意事項：

* 對差分格式(3)來說，j=1 和 j=M 的邊界上 u 值都要給定，才能進行向前積分。

* 時間指標 n 和空間指標 j 的範圍在答案中一定要寫出。

2. 假想有 120 個測站上 500mb 氣壓層的高度，現在要用變分同化法進行客觀分析，將這些資料內插到 20×19 個規則分布的格點上。在這情況下代價函數可寫為

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_o - \mathbf{Hx})^* \mathbf{O}^{-1} (\mathbf{y}_o - \mathbf{Hx}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^* \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)$$

(7)

其中下標 o 和 b 分別代表觀測值和背景值，**x**, **y** 和 **H** 分別為控制變數和可觀測的量。

(a)試述這個客觀分析問題中 **x** 的意義和維數。

(b)詳細列出求解步驟。

3. 說明或解釋下面的陳述：

(a)(7)式中的代價函數一定是正值的純量。

(b)若要求解反問題，一定要先求解正問題。

4. 解釋下面的名詞：

(a)下降算法(descent algorithm)。

(b)平穩函數(stationary function)。

(c)矩陣的正定性(positive-definiteness)。

(d)等周長問題(isoperimetric problem)。

5.氣象資料同化期末考題
2001 年 1 月

1. 解釋下面的名詞：
   (a)Fermat 原理。
   (b) Bouguer 定律。
   (c)衝擊參數(impact parameter)。

2. 試寫出下面物理量的大小或數量級：
   (a)彎角(bending angle) α。
   (b)折射率(refractivity) N。
   (c)衝擊參數(impact parameter) a。

3. 極小方差估計值(minimun variance estimate)
   (a)極小方差估計值有何特點？
   (b)在何種情況下極大似然估計值(maximun likelihood estimate)才會和極小方差估計值一樣？

4. 試用簡單的文字說明什麼是 Kalman 濾波器。

5. 試用指標符號表達下面的向量方程：

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V} + \mathbf{2\Omega}\times\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho\,\nabla\cdot\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

6.氣象資料同化期中考題

2001.12.6.

1. 解釋下面的名詞：
   (a)調諧問題（tuning problem）。
   (b)適定問題（well-posed problem）。
   (c)平穩函數（stationary function）。
   (d)切線性方程（tangent linear equation）。
   (e)Fermat 原理。
2. 假設目前 NOAA 衛星上 HIRS 輻射計有 7 個測溫頻道，對地面上某一點進行觀測時，可得到 7 個頻道的輻射強度值。另外，在這一點上有 10 個氣壓層的氣溫預報值。現在要用變分同化法進行氣溫垂直分布的反演，此時代價函數可寫爲

$$J=\frac{1}{2}[\mathbf{y}_o-\mathbf{h}(\mathbf{x})]^*\mathbf{O}^{-1}[\mathbf{y}_o-\mathbf{h}(\mathbf{x})]+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_b)^*\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_b)$$

   其中下標 o 和 b 分別表示觀測值和背景值。$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 則分別爲控制變數和可觀測量。
   (a)試述在這反演問題中 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{h}$ 的物理意義和維數。
   (b)列出求解步驟。
3. 考慮下面的線性平流方程及其初始和邊界條件：

$$u_t+cu_x=0,\qquad c>0. \tag{1a}$$

$$u(x,0)=\text{已知},\qquad u(0,t)=\text{已知} \tag{1b}$$

   這個方程的一個差分格式是中差分格式：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+c\,\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0,\qquad \begin{array}{l} n=2,3,\cdots,N-1 \\ j=2,3,\cdots,M-1 \end{array} \tag{2}$$

$$u_j^1 = \text{已知}, \qquad u_j^2 = \text{已知}, \qquad j = 2, 3, \cdots, M \tag{3a}$$

$$u_1^n = \text{已知}, \qquad u_M^n = \text{已知}, \qquad n = 1, 2, \cdots, N \tag{3b}$$

(2)式可改寫爲

$$\Gamma_j^n = u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + \mu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0, \qquad \begin{array}{l} n = 2, 3, \cdots, N-1 \\ j = 2, 3, \cdots, M-1 \end{array} \tag{4}$$

這個格式的穩定條件是 Courant 數 $\mu \equiv c\Delta t / \Delta x$ 在 0 到 1 之間。若要由觀資料 $\tilde{u}_j^n$ 決定最佳的初始值 $u_j^1 \quad (j = 2, 3, \cdots, M-1)$，可令下面的代價函數取極小值:

$$J_1 = \frac{1}{2}\sum_n \sum_j (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 + \sum_{n=2}^{N-1}\sum_{j=2}^{M-1} \lambda_j^n \Gamma_j^n \tag{5}$$

(a)試導出共軛方程及其初始和邊界條件。

(b)試導出代價函數梯度 $\partial J / \partial u_j^1$ 和 $\partial J / \partial u_j^2 \quad (j = 2, 3, \cdots, M)$ 的表達式。

(c)將 Courant 數 μ 視爲控制變數，試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式。

4. 解釋或說明下面的陳述:

(a) 總地心角（這是指掩星事件發生時射線和大氣層頂的兩個交點在地心處所張的角度）通常隨高度而減小。

(b) 相位超出量（phase excess）通常隨高度而減小。

(c)共軛方程對共軛變數來說，總是線性的，不論原來的動力方程是否線性的。

7.氣象資料同化期末考題

2002.1.17

1. 化簡下面的表達式，最後寫成矩陣形式：(20%)

   (a) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Ax})$，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分別爲 $N \times N$ 和 $N \times 1$ 矩陣。

   (b) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{Ax})$，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 分別爲 $N \times N$ 和 $N \times 1$ 矩陣。

2. 試以簡短而清晰的文字（約 100 字）解釋 Kalman 濾波器，不要列出公式或繪出任何圖。(20%)

3. 簡答：（20% ）

   (a)何謂極小方差估計值？

   (b)在何種情況下極大似然估計值（maximum likelihood estimate）才會和極小方差估計值一樣？

4. 考慮下面的代價函數：（20% ）

$$J = \frac{1}{2}\int_{\theta}\int_{\Omega}(\eta_t + u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3)^2\, d\tau dt$$

   其中 $d\tau$ 爲體積元，Ω 爲求解域，η_t，η_1，η_2，η_3 爲時間和空間的已知函數，u_1，u_2，u_3 爲未知數，即這個問題的控制變數。現在令代價函數取極小值，試就下面四種情況列出 u_1，u_2，u_3 的聯立方程：

   (a) u_1，u_2，u_3 只是空間的函數。

   (b) u_1，u_2，u_3 是時間、空間的函數。

   (c) u_1，u_2，u_3 只是時間的函數。

   (d) u_1，u_2，u_3 和時間、空間無關。

5.4 試述 GPS 臨邊探測（limb sounding）如何達到高垂直分辨率（vertical resolution）、高水平分辨率（horizontal resolution）和高時

間分辨率（time resolution）的目標。(20%)

8.氣象資料同化期末考

2003.1.16 下午 15:00~17:00

1.試證 20%

(a) $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{A}}(\mathrm{tr}\,\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^T$,

(b) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}/2)$

2.試各以 100 字左右的文字解釋下面的名詞：30%

(a)Kalman 濾波器。

(b)擴張 Kalman 濾波器。

(c)系集 Kalman 濾波器。

3.考慮下面的擴散方程：20%

$$u_t = \kappa u_{xx}, \qquad t \geq 0, \qquad x_1 \leq x \leq x_2 \tag{1}$$

擴散係數 κ 設爲和 x, t 無關. 假設(1)式的定解條件爲

$$u(x, 0)=\text{給出} \qquad (\text{但不固定}) \tag{2}$$

$$u(x_1, t) = \text{已知且固定}, \qquad u_x(x_2, t) = \text{已知且固定} \tag{3}$$

必須注意, 在 $x = x_2$ 處的邊界條件是 Neumann 型的，即變數 u 的導數而不是 u 本身是給定的。現在希望由 $u(x,\ t)$的觀測值 $\tilde{u}(x, t)$ 決定出最佳的初始值 $u(x, 0)$，在這情況下代價函數可寫爲

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\int_{x_1}^{x_2} [0.5(u - \tilde{u})^2 + \lambda(u_t - \kappa u_{xx})]\, dxdt \tag{4}$$

將(4)式取變分, 並做分部積分後, 有

$$\delta J=\int_0^{\theta}\int_{x_1}^{x_2}(-\lambda_t-\kappa\lambda_{xx}+u-\widetilde{u})\,\delta u dxdt$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\lambda(x,\theta)\delta u(x,\theta)-\lambda(x,0)\delta u(x,0)\right]dx$$
$$+\kappa\int_0^{\theta}\left[-\lambda(x_2,t)\delta u_x(x_2,t)+\lambda_x(x_2,t)\delta u(x_2,t)\right.$$
$$\left.+\lambda(x_1,t)\delta u_x(x_1,t)-\lambda_x(x_1,t)\delta u(x_1,t)\right]dt$$

(a)請寫出共軛方程.

(b)試問 $\lambda(x,\theta)$, $\delta u(x,\theta)$, $\lambda(x,0)$ 和 $\delta u(x,0)$ 的值是否等於零，爲什麼?

(c)試問下面7個量 $\lambda(x_2,t)$, $\delta u_x(x_2,t)$, $\lambda_x(x_2,t)$, $\delta u(x_2,t)$, $\lambda(x_1,t)$, $\delta u_x(x_1,t)$, $\lambda_x(x_1,t)$ 和 $\delta u(x_1,t)$ 的值是否等於零，爲什麼?

(d)寫出共軛方程的初始條件和邊界條件.

4.考慮兩個分析點之間有一個觀測點的情況，這兩個分析點各有它們的背景值，分別以 x_1^b 和 x_2^b 表示，而觀測點的背景值可用線性內插得到：30%

$$\mathbf{Hx}_b=\alpha x_1^b+(1-\alpha)x_2^b$$

其中 $0\le\alpha\le 1$。觀測誤差和背景誤差的協方差矩陣分別設爲

$$\mathbf{R}=\sigma_r^2,\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\sigma_b^2 & \sigma_b^2\rho\\ \sigma_b^2\rho & \sigma_b^2\end{bmatrix}=\sigma_b^2\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$$

上式中 ρ 爲背景誤差的相關係數。必須指出，在上式中已設兩個地點背景誤差的方差式鄉等的。

(a) 試寫出觀測算符 $\mathbf{H}$ 的表達式。

(b) 假如觀測點位於分析點 1 上（$\alpha=1$），而且背景誤差是不相關的（$\rho=0$），試證分析值爲

$$x_1^a = x_1^b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b), \qquad x_2^a = x_2^b$$

此外說明這個解的意義。

(c)假如觀測點位於格點 1 處（$\alpha = 1$），但兩個格點背景誤差是相關的（$\rho \neq 0$），試證兩個分析值爲

$$x_1^a = x_1^b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b), \qquad x_2^a = x_2^b + \frac{\rho\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_r^2}(y_o - x_1^b)$$

試說明爲何分析點 2 雖然沒有觀測，但其分析值不等於背景值。

9.氣象資料同化期末考

2003.01.06

1. 令狀態變數 $\mathbf{x}$ 爲 $M\times 1$ 向量，觀測值 $\mathbf{y}$ 爲 $L\times 1$ 向量，試寫出下面各物理量的維數：30%
   (a)線性觀測算符 $\mathbf{H}$。
   (b)非線性觀測算符 $\mathbf{h}$ 。
   (c)觀測誤差的協方差矩陣 $\mathbf{R}$。
   (d)增益矩陣 $\mathbf{K}$。
   (e)背景誤差的協方差矩陣 $\mathbf{B}$。
   (f)線性預報算符 $\mathbf{M}_n$ 。
   (g)非線性預報算符 $\mathcal{M}_n$ 。
2. 試述系集卡爾曼濾波器相對於標準卡爾曼濾波器的優點。20%
3. 試證 15%
   (a) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ ，其中 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 爲向量，乘號表示向量積。請記得 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs}=\delta_{jr}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{kr}$ 。
   (b) $\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\mathbf{x}$ ，其中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 分別爲 $M\times 1$ 和 $M\times M$ 矩陣。
4. 假設在時空求解域 $\theta\times\Omega$ 中有兩個弱約束條件 20%

$$P\simeq 0,\qquad Q\simeq 0$$

在這情況下代價函數 J 可寫爲

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\theta\int_\Omega(\alpha P^2+\beta Q^2)d\tau dt$$

其中$d\tau$和dt分別表示體積元和時間元。試問在 Zhang and Gal-Chen 1996 和 Liou 1999 這兩篇文章中他們選擇權重α和β的基本原則是什麼?

5.考慮下面的線性平流方程$u_t + cu_x = 0$的一個差分格式：15%

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{c}{2}\left[\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x}\right] = 0 \qquad (1)$$

其中平流速度 c 爲常數。在(1)式中時間差分用梯形格式，空間差分用中差分法，這是隱式格式（implicit scheme）。(1)式可改寫爲

$$\Gamma_j^n = \mu\, u_{j+1}^n + u_j^n - \mu\, u_{j-1}^n + \mu\, u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1} - \mu\, u_{j-1}^{n-1} = 0 \qquad (2)$$

$$n = 1, 2, \cdots, N, \qquad j = 2, 3, \cdots, M-1$$

其中$\mu = c\Delta t / 4\Delta x$。求解(2)式時必須使用的初始、邊界條件爲

$$u_j^0 = \text{已知}, \qquad j = 2, 3, \cdots, M-1 \qquad (3)$$

$$u_1^n = \text{已知}, \qquad u_M^n = \text{已知}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N \qquad (4)$$

若要由觀測資料$\tilde{u}_j^n$決定出最佳的初始值u_j^0 $(j = 2, 3, \cdots, M-1)$，可令下面的代價函數取極小值：

$$J = \frac{1}{2}\sum_n \sum_j (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=2}^{M-1} \lambda_j^n\, \Gamma_j^n \qquad (5)$$

將(5)式對 u 微分，得到下面的表達式：

$$\frac{\partial J}{\partial u_j^n} = u_j^n - \tilde{u}_j^n + \mu\,\lambda_{j-1}^n + \lambda_j^n - \mu\,\lambda_{j+1}^n + \mu\,\lambda_{j-1}^{n+1} - \lambda_j^{n+1} - \mu\,\lambda_{j+1}^{n+1} \qquad (6)$$

(a)試述如何由給定的初始、邊界條件(3)和(4)式按(2)式決定出每個時空格點上的 u 值。必須記得，這是隱式格式。

(b)試導出共軛方程及其終端、邊界條件。

(c)試導出代價函數梯度 $\partial J / \partial u_j^0$ $(j = 2, 3, \cdots, M-1)$ 的表達式。

(d)將 μ 視爲控制變數，試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式。

(e)試述如何由給定的終端、邊界條件決定出每個時空格點上的 λ 值。必須記得，這也是隱式格式。

注意事項：

* 時間指標 n 和空間指標 j 的範圍在答案中一定要寫出。

10.氣象資料同化期中考

2002.12.12

1. 說明或解釋下面的陳述：20%

   (a)代價函數一定是正值的純量。

   (b)若要求解反問題，一定要先求解正問題。

   (c)在導出共軛方程時，在代價函數的表達式中觀測資料的範圍可以不必完整的寫出來。

2. 試述共軛方程及其初始、邊界條件的幾個特性。20%

3. 考慮下面的 Poisson 方程：20%

$$\nabla^2 \varphi = f$$

這個方程的邊界條件設定和擴散方程一樣。現在若有觀測值$\tilde{\varphi}$，試導出決定最佳f值所需用到的共軛方程及其邊界條件。此外就下面幾個情況寫出代價函數關於f的梯度：

(a) f與 x, y, z 無關。

(b) f 是 x 的函數。

(c) f 是 x, y 的函數。

(d) f 是 x, y, z 的函數。

4. 線性平流方程$u_t + cu_x = 0$的 Lax-Wendroff 格式如下：40%

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{2}c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (1)$$

$$n = 1, 2, \cdots, N; \qquad j = 2, 3, \cdots, M-1$$

$$u_j^0 = \text{已知}, \quad j = 2, 3, \cdots, M \quad (2a)$$

$$u_1^n = \text{已知}, \qquad u_M^n = \text{已知}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N \quad (2b)$$

(1)式可改寫爲

$$\Gamma_j^n = u_j^n + au_{j+1}^{n-1} + bu_j^{n-1} + cu_{j-1}^{n-1} = 0 \quad (3)$$

其中

$$a = 0.5\mu - 0.5\mu^2, \qquad b = -1 + \mu^2, \qquad c = -0.5\mu - 0.5\mu^2$$

這個格式的穩定條件是 Courant 數 $\mu \equiv c\,\Delta t / \Delta x$ 在 0 到 1 之間。

若要由觀資料 $\tilde{u}_j^n$ 決定最佳的初始值 u_j^0 $(j = 2, 3, \cdots, M-1)$，則需要極小化的代價函數變爲

$$J = \frac{1}{2}\sum_n \sum_j (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-1} \lambda_j^n \Gamma_j^n \qquad (5)$$

(a)試導出共軛方程及其終端、邊界條件。

(b)試導出代價函數的梯度 $\partial J / \partial u_j^0$ $(j = 2, 3, \cdots, M-1)$ 的表達式。

(c)將 Courant 數 μ 視爲控制變數，試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式。

(d)試述求解步驟。

11.氣象資料同化期中考

2002.12.2

1. 考慮下面的代價函數：$\boxed{20\%}$

$$J=\frac{1}{2}[\mathbf{y}_o-\mathbf{h}(\mathbf{x})]^T\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y}_o-\mathbf{h}(\mathbf{x})]+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_b)^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_b)$$

其中下標 o 和 b 分別表示觀測值和背景值。$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 則分別爲控制變數和可觀測量。

(a)對四維（含有時間）同化問題來說，上式應該如何改寫？

(b)對三維變分分析問題來說，例如由各視點上的各測溫頻道輻射強度觀測值決定出各格點上的各氣壓層的溫度，則向前模式 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$應該包括哪些運算？

2. 試問連續情況和離散化情況下共軛方程的初始、邊界條件分別是如何選定的？$\boxed{20\%}$

3. 考慮下面的波動方程及其初始、邊界條件：$\boxed{20\%}$

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\qquad x_1<x<x_2,\quad 0<t<\theta$$

$$u(x,0)=\text{已知},\qquad u_t(x,0)=\text{已知}$$

$$u(x_1,t)=\text{已知且固定},\qquad u(x_2,t)=\text{已知且固定}$$

其中相速度 c 爲常數。現在若有 u 的觀測值$\tilde{u}(x,t)$，試導出資料同化需要用到的共軛方程及其終端、邊界條件，並說明代價函數關於初始值的梯度要如何決定。本題不必加以離散化，直接以連續情況導出式子。

4. 考慮下面的差分方程：$\boxed{40\%}$

$$\frac{u_j^n-u_j^{n-2}}{2\Delta t}+c\,\frac{u_{j+1}^{n-1}-u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x}=0,\qquad \begin{array}{l}n=2,3,\cdots,N\\ j=2,3,\cdots,M-1\end{array}\qquad(1)$$

其中 c 爲常數，Δt 爲時間步長，Δx 爲格距。兩個初始條件和兩端的邊界條件設爲

$$u_j^0 = 已知, \qquad u_j^1 = 已知, \qquad j = 2, 3, \cdots, M \tag{2}$$

$$u_1^n = 已知, \qquad u_M^n = 已知, \qquad n = 0, 1, \cdots, N \tag{3}$$

(1)式可改寫爲下面較簡便的形式

$$\Gamma_j^n = u_j^n - u_j^{n-2} + \mu(u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}) = 0, \qquad \begin{matrix} n = 2, 3, \cdots, N \\ j = 2, 3, \cdots, M-1 \end{matrix} \tag{4}$$

其中 $\mu = |c|\Delta t / \Delta x$ 爲 Courant 數。若要由觀測資料的時間序列 $\tilde{u}_j^n$ 決定最佳的初始值 u_j^0 和 u_j^1 $(j = 2, 3, \cdots, M-1)$，則需要取極小值的代價函數爲

$$J = \frac{1}{2}\sum_n \sum_j (u_j^n - \tilde{u}_j^n)^2 - \sum_{n=2}^{N} \sum_{j=2}^{M-1} \lambda_j^n \Gamma_j^n \tag{5}$$

(a)試導出共軛方程及其終端、邊界條件。

(b)試導出代價函數梯度 $\partial J / \partial u_j^0$ 和 $\partial J / \partial u_j^1$ $(j = 2, 3, \cdots, M)$ 的表達式。

(c)將 Courant 數 μ 視爲控制變數，試導出代價函數關於 μ 的梯度的表達式。

(d)試述求解步驟。

12.氣象資料同化期中考

2002.11.28

1. 解釋名詞：

   (a)切線性方程（tangent linear equation）。

   (b)共軛變數。

   (c)自共軛算符。

2. 考慮下面代價函數的求極值問題：

$$J=\frac{1}{2}[(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+(x_3-0.5)^2+(x_4-0.2)^2]$$

   但受到約束條件的限制：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4.0$$

   (a) 使用強約束條件法，選用x_1，x_2，x_3爲控制變數，試導出共軛方程。

   (b) 試導出代價函數關於這三個控制變數的梯度。

3. 擴散方程$u_t-\kappa u_{xx}=0$的 Crank-Nicholson 格式如下：

$$\Gamma_j^n=u_j^n-r\,u_{j-1}^{n-1}-(1-2r)\,u_j^{n-1}-r\,u_{j+1}^{n-1}=0,\qquad \begin{array}{l} j=1,2,\cdots,M-1 \\ n=2,3,\cdots,N-1 \end{array} \quad (1)$$

   其中$r=\kappa\,\Delta t/\Delta x^2$。初始條件和邊界條件分別爲

$$u_j^0=\text{已知},\qquad u_M^n=u_0^n \quad (2)$$

   必須指出，(2b)式表示週期邊界條件。在這情況下需極小化的代價函數變爲

$$J=\frac{1}{2}\sum_{n}\sum(u_j^n-\tilde{u}_j^n)^2-\sum_{n=2}^{N}\sum_{j=1}^{M}\lambda_j^n\Gamma_j^n \quad (3)$$

   (a) 試導出這個問題的共軛方程及其終端、邊界條件。

   (b)試導出代價函數關於初始值的梯度。

4. 考慮下面的平流擴散方程及其初始、邊界條件：

$$u_t + c\,u_x = \kappa\,u_{xx}, \qquad x_1 < x < x_2, \quad 0 < t < \theta$$

$$u(x,0) = \text{已知}$$

$$u(x_1,t) = \text{已知且固定}, \qquad u(x_2,t) = \text{已知且固定}$$

其中平流速度 c 和擴散係數 κ 都是常數，而 κ 是正數。現在若有 u 的觀測值 $\tilde{u}(x,t)$，試導出資料同化需要用到的共軛方程及其終端、邊界條件，並說明代價函數關於初始值的梯度要如何決定。