

大氣模式的數值方法考古題

曾 忠 一

(2000 年 6 月 24 日建構)

數值天氣預報

1. 考慮下面的平滑算符(smoothing operator):

$$\bar{J}_j = j_j + g(j_{j+1} - 2j_j + j_{j-1})$$

- (a) 求出反應函數(response function).
 - (b) 假如要濾除兩倍格距的波, g 要等於多少?
 - (c) 試證上述平滑算符不會改變波長, 也不會改變相位.
2. 解釋下面的名詞:
 - (a) image scale. (b) map scale. (c) wind law.
 3. 考慮下面的平衡方程

$$f \nabla^2 y + \nabla y \cdot \nabla f + 2(y_{xx}y_{yy} - y_{xy}^2) = \nabla^2 j$$

- (a) 上式是如何得來的?
 - (b) 若 j 為已知, 在何種情況下平衡方程才是橢圓型的? 試求出其橢圓型條件.
4. 詳細說明相當正壓模式的假設, 導出模式的方程, 並敘述其優點.
 5. 在數值預報模式中如何處理因地表摩擦而產生的垂直速度?

數值天氣預報

1. 試述一般客觀分析的步驟. 對高度場的分析要如何特別處理?
2. 試述正壓模式的預報步驟、所用的方程以及邊界條件.
3. 討論下面平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的有限差分格式的穩定性:

$$(a) \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2\Delta x}$$

$$(b) \frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\Delta t} = -c \frac{u_{j,n} - u_{j-1,n}}{\Delta x} \quad (\text{假設 } c > 0)$$

4. 解釋下面的名詞:
(a) wind law. (b) computational mode.
5. 說明靜力穩定度檢定的原理.

大氣動力學的數值方法

1. 解釋下面的名詞:

(a) von Neumann necessary condition for stability.

(b) CFL stability criterion.

(c) Arakawa Jacobian. (d) dispersion.

2. 試求出下面微分方程的特徵值 l 和特徵函數 u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = lx, \quad u(x) = u(x + 2p)$$

3. 若一波動的波長為 $5\Delta x/4$, 現在只知道它在格點上的值, 由於混淆誤差(aliasing)的結果, 我們會以為波長是多少?

4. 考慮下面的微分方程:

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t)$$

(a)寫出 Adams-Bashforth scheme.

(b)證明這種 scheme 為 second-order accurate.

5. 考慮下面的線性平流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c < 0$$

(a)寫出 upstream scheme, 並討論其穩定性.

(b)寫出 Lax-Wendroff scheme, 並討論其穩定性.

(c)寫出 Matsuno (Euler backward) scheme, 並討論其穩定性.

(d) Lax-Wendroff scheme 和 Matsuno scheme 有什麼不同?

6. 考慮下面的非線性平流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

初始條件和邊界條件分別為

$$u_j(0) = f(x_j) \equiv f_j, \quad u(x, t) = u(x + 2p, t)$$

假設解的形式為

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) e^{ikx}$$

試用 finite spectral method 導出 $a_k(t)$ 的微分方程.

7. 試述 nonlinear instability 的起因, 並討論在數值計算中如何防止它的產生.
8. 假如要用數值方法求解一維線性平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

現在設最大的 c 值為 10m/sec, 格距為 300km, 則時間步長 Δt 要多少才不會產生計算不穩定? 對於二維線性平流方程來說, Δt 要多少才可以?

高等應用數學

1. 考慮下面的平衡方程:

$$\nabla \cdot (f \nabla y) + 2(y_{xx}y_{yy} - y_{xy}^2) = \nabla^2 j$$

其中 f 是科氏參數, j 為重力位, 兩者皆為已知數; 流函數 y 為未知數. 試問在何種條件下這方程才是橢圓型的? 試求出橢圓型條件.

2. (a)考慮下面的振盪方程: $dU/dt = iwU$, 其中 w 為實數頻率. 現在把頻率分為兩部分: $w = a + b$, 其中一部分用 explicit scheme(如 leapfrog scheme), 另一部分用 implicit scheme(如 trapezoidal scheme), 我們得到下面的 semi-implicit scheme:

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n-1)}}{2\Delta t} = ia U^n + ib \frac{1}{2}(U^{(n+1)} + U^{(n-1)})$$

試問在何種條件下這個 semi-implicit scheme 才是穩定的? 請詳細導出穩定條件.

- (b)寫出下面線性化淺水方程的(穩定的)semi-implicit scheme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 c, g, H 都是常數, 而且 $gH \gg c^2$. 空間差分用中差分法.

3. 試求出下面差分方程的 analytic solution:

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j+1}^n, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad r=\text{const.}$$

邊界條件: $u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0, \quad n \geq 0$

初始條件: $u_j^0 = f_j, \quad j=1, 2, \dots, N-1$

此外討論在何種條件下解才是穩定的.

4. 試求出下面矩陣 $\mathbf{A}$ 的特徵值 l 和特徵向量 $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

5. 試證下面擴散方程 $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ 的差分格式是不穩定的:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

6. 考慮下面的擴散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- (a) 寫出 Matsuno scheme. (b) 寫出 Heun scheme. (c) 寫出 Adams-Bashforth scheme. (d) 寫出 Crank-Nicolson scheme. 空間差分全用中差分法.

氣象應用數學

1. 考慮下面的 Poisson 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y), \quad \text{在 } \Omega \text{ 內}$$

$$u=0, \quad \text{在 } C_1 \text{ 上}; \quad \partial u / \partial n = g, \quad \text{在 } C_2 \text{ 上}$$

使用線性三角形元素, 對邊界上 C_2 上的一個三角形元素(即這個三角形有一邊在 C_2 上), 導出其局地有限元素方程. $C_1 + C_2$ 構成求解域 Ω 的邊界.

2. 考慮線性平流方程 $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$, 其中 c 為常數. 使用一維線性元素, 導出局地有限元素方程. 然後進行節點組合, 得到空間差分格式.
3. 考慮下面的常微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + x = 0, \quad u(-1) = 0, \quad u(1) = 0$$

假設解的形式為 $\tilde{u} = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x)$, 其中 $T_k(x)$ 為 k 次 Chebyshev 多項式. 試用 t 近似決定關於展開係數的線性代數方程, 並求出 a_0 , a_1 和 a_2 三個展開係數的值.

4. 考慮下面的擴散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1; \quad u(x, 0) = x$$

試用波譜 Galerkin 法求出近似解.

氣象應用數學

1. 考慮下面的微分方程:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + xu = -x, \quad u = 0 \quad \text{在 } x = 0, 1 \text{ 處}$$

試用下面兩種方法求出近似解, 假設解的形式為 $\tilde{u} = a x(1-x)$:

(a) Rayleigh-Ritz method. (b) collocation method.

2. 考慮下面的線性平流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, t) = u(x + 2p, t), \quad c = \text{const.}$$

(a) 將 $x=0$ 至 $x=2p$ 分為四個元素. 利用 Galerkin 法導出 element stiffness matrix 和 element force vector.

(b) 用 assemblage by elements 的方法, 求出 global stiffness matrix 和 global force vector. 引進邊界條件, 試求出 $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ 和 $\dot{u}_4$ 的聯立方程. 注意周期邊界條件.

(c) 用 assemblage by nodes 的方法, 得到一種 finite difference scheme. 這種 scheme 和一般的 finite difference scheme 有什麼不同? 試以相速度的誤差和 $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4$ 的解法互做比較.

3. 考慮下面的非線性平流方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(a) 將 $x=0$ 到 $2p$ 的區間分為若干元素, 求出 element stiffness matrix 和 element force vector.

(b) 用 assemblage by nodes 的方法, 得到一種 finite difference scheme.

大氣模式的數值方法

1. 考慮振盪方程 $dU/dt = iwU$ ，其中頻率 w 是實數。現在把頻率分為兩部分 $w = a + b$ ，則振盪方程變為 $dU/dt = iaU + ibU$ 。若其中一部分用 explicit scheme(如跳蛙式)，另一部份用 implicit scheme(如梯形格式)，我們得到下面的格式：

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n-1)}}{2\Delta t} = iaU^n + i\frac{b}{2}(U^{(n+1)} + U^{(n-1)})$$

試求出這個 semi-implicit scheme 的穩定條件。

2. 考慮擴散方程 $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ 。(a)寫出 Matsuno scheme。(b)寫出 Heun scheme。(c)寫出 Adams-Bashforth scheme。(d)寫出 Crank-Nicolson scheme。空間差分都用中差分法。
3. 若一波動的波長為 $3\Delta x/10$ ，現在只知道這個波在格點上的值，由於混淆誤差的結果，我們會以為波長是多少？
4. 寫出線性平流方程 $\partial u / \partial t + c\partial u / \partial x = 0$ 的 Matsuno scheme 和 Lax-Wendroff scheme。討論這兩個格式的相似點和相異點。
5. 寫出 $J(y, z)$ 的 Arakawa Jacobian。Arakawa Jacobian 有什麼特點？在進行預報時可防止什麼現象的發生？
6. 試以振盪方程 $dU/dt = iwU$ 為例，寫出 Robert 時間濾波器的演算法，要解釋各符號的意義。
7. 解釋下面的名詞：(a) CFL criterion。(b) 頻散和計算性頻散。
8. 試求出 Laplace 算符 ∇^2 的特徵函數 y 和特徵值 $-l^2$ ，即 $\partial^2 y / \partial x^2 + \partial^2 y / \partial y^2 = -l^2 y$ ，邊界條件用 $y = 0, x = 0, a, y = 0, b$ 。

大氣模式的數值方法

1. 考慮下面的一維重力波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

(a)寫出省時顯式格式. (b)決定穩定條件. (c)說明這種格式的優點.

2. 考慮下面的一維線性化淺水方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

(a)寫出一個合理的半隱式格式. (b)決定穩定條件, 並加以討論. (c)說明這個格式的優點. (d)若要用超鬆弛法求解這個半隱式格式, 試問超鬆弛參數是多少? (使用 Dirichlet 型邊界條件).

3. 試證拉普拉斯方程 $\nabla^2 j = 0$ 的 Jacobi 疊代格式

$$j_{i,j}^{m+1} = j_{i,j}^m + \frac{1}{4}(j_{i+1,j}^m + j_{i-1,j}^m + j_{i,j+1}^m + j_{i,j-1}^m - 4j_{i,j}^m)$$

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, q$$

是收斂的. j 的邊界條件為

$$j_{0,j} = j_{p,j}, \quad j_{1,j} = j_{p+1,j}, \quad j=0, 1, 2, \dots, q$$

$$j_{i,0} = \text{已知}, \quad j_{i,q} = \text{已知}, \quad i=0, 1, \dots, p-1$$

4. 試述Fourier分析法求解拉普拉斯方程 $\nabla^2 j = 0$ 的步驟, 仍用第3題的邊界條件.

大氣模式的數值方法

1. 若一波動的波長為 $3\Delta x/10$, 其中 Δx 為格距, 現在只知道這個波在格點上的值, 由於混淆誤差的結果, 我們會以為波長是多少?
2. 考慮下面的離散 Poisson 方程:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = F_{i,j}$$

$$i=1, 2, \dots, M-1; \quad j=1, 2, \dots, N-1$$

$$u_{0,j}, u_{M,j}, u_{i,0}, u_{i,N} \text{ 皆為已知}$$

(a)寫出超鬆弛格式(點疊代法). (b)寫出最佳的超鬆弛參數值.

3. (a)試決定下面問題的特徵解 v_j 和特徵值 l :

$$v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1} = lv_j, \quad j=1, 2, \dots, N$$

$$v_0 = v_N, \quad v_{N+1} = v_1 \quad (\text{周期條件})$$

(b)考慮下面的差分方程:

$$u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} = f_j, \quad u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1$$

試問若用 Jacobi 疊代法(聯立鬆弛法)去求解, 解會不會收斂?

4. 考慮下面的線性平流方程:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 c 為常數, 並設為正數.

(a)令 $j-p$ 點為最靠近出發點 Q 的格點, 試寫出免內插法的半拉格朗日格式.

(b)假設 p 為偶數, 試證這個格式是無條件穩定的.

大氣模式的數值方法

1. 考慮下面關於 D 和 j 的一階常微分方程組:

$$\frac{dD}{dt} = bj, \quad \frac{dj}{dt} = -\Phi D$$

其中 $b > 0$, $\Phi > 0$. (a)寫出跳蛙式時間差分格式, 並決定穩定條件. (b)寫出一個合理的省時顯式格式(向前向後格式), 討論其穩定性, 並說明其優點. (c)寫出隱式格式, 證明這個格式是絕對穩定的. 在這裏隱式格式指梯形格式.

2. 考慮下面的一維線性化淺水方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 $g > 0$, $H > 0$. 寫出半隱式格式, 導出穩定條件, 並說明其優點和缺點.

3. 考慮下面的擴散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a)寫出 Matsuno 格式(即 Euler 向後格式). (b)寫出 Heun 格式. (c)寫出 Adams-Bashforth 格式. 空間導數項都用中差分來近似.

4. 平流方程 $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$ 的一個空間差分近似是

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial u_{j-1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_{j+1}}{\partial t} \right] + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

時間差分格式用跳蛙式, 試求出穩定條件.

5. 什麼是 Eliassen 網格, 什麼是 Richardson 網格? 試用連續三個時步 u, v, h 的分布來說明, 並敘述其優點.

大氣模式的數值方法

1. 考慮下面的一維重力波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 g 和 H 為常數. 寫出一個合理的省時顯式格式, 討論其穩定性, 並說明其優點.

2. 考慮下面的一維線性化淺水方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = -H \frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 c , g , H 為常數. 上式兩邊加上 $(p\Delta x/2\Delta t)\partial u/\partial x$, 得到
($c' = c - p\Delta x/2\Delta t$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p\Delta x}{2\Delta t} \frac{\partial u}{\partial x} = -c' \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{p\Delta x}{2\Delta t} \frac{\partial h}{\partial x} = -c' \frac{\partial h}{\partial x} - H \frac{\partial u}{\partial x}$$

令 $j-p$ 點為最靠近出發點的格點. 若上二式左邊用半拉格朗日法, 右邊剩餘平流項用跳蛙式, 重力波項用隱式格式, 則有(p 設為奇數)

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-p}^{n-1}}{2\Delta t} = & -c' \frac{u_{j-(p-1)/2}^n - u_{j-(p+1)/2}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\frac{h_{j-(p-1)/2}^{n+1} - h_{j-(p+1)/2}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\ & \left. + \frac{h_{j-(p-1)/2}^{n-1} - h_{j-(p+1)/2}^{n-1}}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{h_j^{n+1} - h_{j-p}^{n-1}}{2\Delta t} = -c' \frac{h_{j-(p-1)/2}^n - h_{j-(p+1)/2}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j-(p-1)/2}^{n+1} - u_{j-(p+1)/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{j-(p-1)/2}^{n-1} - u_{j-(p+1)/2}^{n-1}}{\Delta x} \right]$$

試討論這個格式的穩定性.

3. 平流方程 $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$ 的一個差分近似是

$$\frac{1}{6} \left[\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta t} + 4 \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

(a) 討論這個格式的穩定性, 求出穩定性判據.

(b) 這是一種隱式格式, 試問可否用鬆弛法求解, 超鬆弛參數應為多少? 提示: 令 $v_j = u_j^{n+1}$, 得到

$$v_{j-1} + 4v_j + v_{j+1} = f$$

其中 f 為已知數, 只和 n , $n-1$ 這兩個時刻的 u 值有關.

大氣模式的數值方法

1. (a)考慮下面兩個 Taylor 級數展開:

$$u_{j\pm1} = u_j \pm \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx} \pm \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{4!} u_{xxxx} \pm O(\Delta x^5)$$

將這兩個級數相減，然後令 $w = u_x$ ，並將 w_{xx} 用二階準確的中差分來近似，試證可以得到

$$\frac{w_{j+1} + 4w_j + w_{j-1}}{6} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

這是一階導數 $w = u_x$ 的差分近似，但它是隱式格式。試問這個格式是幾階準確的？

- (b)根據(a)，常係數平流方程 $u_t + cu_x = 0$ 的一個空間差分格式是

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial u_{j+1}}{\partial t} + 4 \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_{j-1}}{\partial t} \right] + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0$$

若使用跳步法時間差分格式，試求出穩定性判據。

2. 考慮下面的一維擴散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(a)寫出 Matsuno 格式(即 Euler 向後格式). (b)寫出 Heun 格式. (c)寫出 Adams-Bashforth 格式. (d)寫出 Euler 格式(即向前時間差分). 決定這四個格式的穩定性判據. 空間導數項都用中差分來近似.

3. 寫出常係數平流方程 $u_t + cu_x = 0$ 的 Matsuno 格式和 Lax-Wendroff 格式. 討論這兩個格式的相似點和相異點.
4. 常係數平流方程 $u_t + cu_x = 0$ 的半拉格朗日格式可寫為

$$u_j^{n+1} = u_Q$$

其中 u_Q 為出發點 Q 處的 u 值, 即 $u_Q \equiv u(j\Delta x - a, n\Delta t)$, 這裏 a 為位移, 即 j 和 Q 點間的距離. 設 Q 點在 $(j-p-1)$ 和 $(j-p)$ 這兩個格點之間, Q 點上的 u 值可用這兩格點上的值來內插:

$$u_Q = (1 - \hat{m}) u_{j-p} + \hat{m} u_{j-p-1}$$

其中 $\hat{m} = c\Delta t / \Delta x - p$. 試證這個半拉格朗日格式是絕對穩定的.