動力氣象學考古題

曾 忠 一

(2000年6月30日建構)

地球物理流體力學

民國66年4月18日

1. 試就下面各點說明Lamb波的特性:
   (a)垂直速度. (b)水平速度. (c)壓力 、密度. (d)相速度. (e)科氏力的影響.
2. 試述不可壓縮流體中內部重力波的反射定律.
3. 試述不可壓縮成層流體的幾個有名的不穩定定理.
4. 寫出下面各種波動的頻散關係式:
   (a) Rossby波. (b)外部重力波. (c)慣性重力波.
5. 寫出下面各種波動的相速度與群速度，並且比較這兩種速度的大小:
   (a)聲波. (b) Kelvin波. (c)淺水重力波. (d) Lamb波.
6. 不可壓縮成層流體中內部重力波的控制方程為

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right]+N^2(z)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

   其中N為Brunt-Vaisala頻率，y 為流函數.
   (a)解釋上式的意義，並說明所做的近似和假設.
   (b)什麼時候平面波會存在?
   (c)導出頻散關係式，並證明群速度垂直於相速度.
7. 非彈性方程組有深對流與淺對流兩種．試述導出這兩種方程組所做的假設和近似以及它們的特點.

流體穩定學

1. Use the Rayleigh-Ritz method to find the first approximation to the smallest eigenvalue of the problem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + lxy = 0$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)=0$$

assuming $y \approx c_1 x(1-x)$.

2. **解釋下面的名詞**:
   - principle of the exchange of stabilities. • overstability.
   - Benard**問題**. • Schmidt-Milverton principle for detecting the onset of thermal instability. • Rayleigh**判據**. • Brunt-Vaisala**頻率**.
3. **寫出**Rayleigh**數和**Prandtl**數的定義**, **並說明其中每一個符號的意義和單位**. **為什麼後來的臨界**Rayleigh**數** R_c, **臨界波數** a_c **和**Prandtl**數沒有關係**.
4. **為什麼在討論**circular vortex**的穩定時需要用到第二變分**, **而在說明變分學的原理時不需用到第二變分**?
5. **解釋慣性不穩定的物理原因**.

流體穩定學

1. 試述內部重力波和外部重力波的不同點, 並舉例說明.
2. 解釋下面的名詞:
   (a) Mile定理. (b) Howard半圓定理.
3. Rossby參數 b 對正壓不穩定有什麼影響?
4. 黏滯性對正壓不穩定有什麼影響?
5. 討論下面正壓不穩定波的特性以及在何種情況下它們才會存在:
   (a) neutral k-wave. (b) Rossby-Haurwitz波. (c)不穩定波. (d)奇異波 (singular wave).

流體穩定學

1. **試用兩種特徵長度表示**$e = f_0^2 L^2 / gDS$，**其中**$S = D\partial \ln q_s / \partial z$. **在從事大氣運動的尺度分析時有時會假設**$e \sim 1$，**若用特徵長度來表示則**$e \sim 1$**是什麼意思**?
2. **寫出下面各種物理量在大氣大尺度運動的數量級**:
   (a)$\partial T / \partial t$. (b)$\partial p / \partial x$. (c)$\partial y / \partial t$. (d)$\partial j / \partial t$. (e)d (**散度**). (f)z (**渦度**). (g) b (Rossby**參數**). (h)w (p**速度**). (i) w. (j)$\partial q / \partial x$.
3. **寫出下面輻散方程每一項的數量級，並說明平衡方程和線性平衡方程如何得到**:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla d + w \frac{\partial d}{\partial p} + d^2 + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} - fz + bu - 2J(u,v) + \nabla^2 j = 0$$

4. **試述**Ekman**層不穩定中**Class A**不穩定和**Class B**不穩定的特性**.
5. **流體穩定問題用初始值問題和正模分析**(normal mode analysis)**來處理有什麼區別**? **試詳細說明**Pedlosky**的結論**.

流體穩定學

1. **請用**summation convention**表示下面的方程**:

   (a) $d\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{M}\cdot d\,\mathbf{r} = d\,\mathbf{r}\cdot\nabla m^2(-\nabla c)\cdot d\,\mathbf{r} + d\,\mathbf{r}\cdot\nabla h(-a\nabla p)\cdot d\,\mathbf{r}$

   (b) $\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + 2\text{Ù}\times\mathbf{u} = -\dfrac{1}{r}\nabla p + n\nabla^2\mathbf{u}$

   (c) $d\nabla p = \nabla d\,p - \nabla d\,\mathbf{r}\cdot\nabla p$

2. **試用變分法證明**, **平面上兩點間距離最短的曲線為通過這兩點的直線**.
3. **試證由下面兩種觀念所得到的結果完全一樣**:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\substack{\text{closed}\\\text{system}\,\Omega}} j\,r\,dt = \frac{d}{dt}\iiint\limits_{\substack{\text{control}\\\text{volume}\,\Omega}} j\,r\,dt = \cdots$$

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\substack{\text{closed}\\\text{system}\,\Omega}} j\,r\,dt = \frac{D}{Dt}\iiint\limits_{\text{system}\,\Omega} j\,r\,dt = \cdots$$

   其中 r **為密度**, dt **為體積元**.

4. **設**Γ**為氣溫遞減率**, g_d **為乾絕熱遞減率**, **在什麼情況下大氣是靜力穩定的**?
5. **請寫出**barotropic vortex**的穩定性判據**.
6. **解釋慣性不穩定的原因**.
7. **試討論下面兩種**vortex**的慣性穩定**:

   (a) $v = 1/R$. (b) $v = R\Omega$, Ω**為常數**.

8. **試討論北半球噴射氣流的慣性穩定**.

大氣動力學

1. **綜觀尺度大氣運動的尺度分析**.

   (a)**寫出下面無因次量的數量級**:

   - Rossby**數** Ro . • **靜力穩定度參數** $S = D\partial \ln q_s / \partial z$.
   - Froude**數**F. • Richardson**數**.

   (b)**寫出下面物理量的數量級**(**必須寫出單位**):

   - **垂直速度**w • p**速度**w • Rossby**參數** b
   - **流函數**y • **渦度**z • **散度**d
   - Rossby**變形半徑** L_D • Brunt-Vaisala**頻率**N

   (c)**準地轉近似的五個假設是什麼**?

   (d)**試對下面的渦度方程進行尺度分析**:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} + w\frac{\partial z}{\partial p} + vb = -(f + z)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}$$

   並寫出最大的各項.

2. **斜壓不穩定**.

   (a)**寫出斜壓不穩定波成長率的上限**, **並討論其意義**.

   (b)**試討論斜壓不穩定中基本場與擾動場能量交換的情形**.

   (c)**寫出斜壓不穩定的基本方程和邊界條件**, **並解出**Eady**問題**.

大氣動力學

1. **中緯度綜觀尺度運動的尺度分析**.

   (a) **寫出下面中緯度綜觀尺度大氣運動中各物理量的數量級**(**記得附上單位**):

   •**垂直速度**$w \equiv dp/dt$, p**為氣壓**. •**渦度**z . • Rossby**參數**$b = df/dy$.

   •**水平風速分量**u, v. •**科氏參數** $f \equiv 2\Omega \sin f$. •**散度**d .

   (b) **對下面的渦度方程進行尺度分析**, **並且寫出其中最大各項**:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} + w\frac{\partial z}{\partial p} + vb = -(f+z)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}$$

   其中x**和**y**是局地坐標**, x**指向東方**, y**指向北方**.

2. **試述觀測到的年平均大氣能量循環**. **也就是說**, **討論中緯度大氣中平均緯向有效位能**(mean zonal available potential energy), **渦動有效位能**(eddy available potential energy), **渦動動能**(eddy kinetic energy) **以及緯向動能**(zonal kinetic energy)**的來源和去處**.

3. **大氣中的波動**.

   (a)**試述**Rossby**波的特性**.

   (b)**準地轉近似可濾除哪些波動**?

   (c)**流體靜力近似可濾除哪些波動**?

數值天氣預報

1. Lamb波.
   (a)估計Lamb波的相速度.
   (b)討論Lamb波的特性.
   (c) Lamb波在數值天氣預報中佔有什麼角色?
2. 簡述各種濾除聲波的方法.
3. 試述Cressman客觀分析的步驟.
4. 設$\bar{u}_j = u_j + g(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$為一簡易濾波器. 令

$$u_j = Ae^{ikj\Delta x}, \qquad \bar{u}_j = H(k)u_j$$

   其中H為反應函數. 決定g 的值使波長$L = 2\Delta x$ 的波動完全被濾掉.
5. 寫出大尺度大氣運動中下面氣象變數或無因次量的數量級, 有因次的變數要加上單位:
   (a) d (散度).
   (b) f (科氏參數).
   (c) z (渦度).
   (d) $b (\equiv df/dy)$.
   (e) $\partial z/\partial y$.
   (f) $w (\equiv dp/dt)$.
   (g) $(\partial z/\partial t)_{500\,\mathrm{mb}}$.
   (h) $\partial p/\partial x$.
   (i) $\partial T/\partial y$.
   (j) y (流函數).
   (k) c (速度位).
   (l) Ro (Rossby數).
   (m) Ri (Richardson數).
   (n) S (靜力穩定度參數, $= D\partial \ln q_s/\partial z$).
   (o) Fr (Froude數).

數值天氣預報

1. 考慮下面的平衡方程:

$$\nabla\cdot(f\nabla y)+2(y_{xx}y_{yy}-y_{xy}^{2})=\nabla^{2}j$$

其中科氏參數 f 和重力位 j 為已知數, 流函數 y 為未知數. 在何種情況下這方程才是橢圓型方程? 試詳細求出橢圓型條件.

2. 試求出等溫大氣中氣壓、密度、位溫、音速以及Brunt-Vaisala頻率等物理量的垂直分布.

3. 考慮下面的平滑算符:

$$\bar{j}_{i,j}=j_{i,j}+g(j_{i+1,j}+j_{i-1,j}+j_{i,j+1}+j_{i,j-1}-4j_{i,j})$$

(a)求出反應函數(虛數單位 $\sqrt{-1}$ 用I表示以免混淆).
(b)若要濾除兩倍格距(包括x方向和y方向)的雜波, g 要等於多少?
(c)試證這個平滑算符不會改變波長, 也不會改變相位.

4. 寫出大氣大尺度運動中下面氣象變數的數量級, 並請加上單位:
(a) $\partial p/\partial x$. (b) $\partial T/\partial y$. (c) $\partial d/\partial x$. (d) $\partial y/\partial y$. (e) $\partial q/\partial x$.
(f) $\partial z/\partial t$. (g) $\partial p/\partial t$. (h) $\partial T/\partial t$. (i) $\partial q/\partial t$. (j) $\partial d/\partial t$.

5. 解釋下面的名詞:
(a) image scale. (b) wind law. (c) map scale. (d) scale height.

數值天氣預報

1. **綜觀尺度大氣運動的尺度分析**.

   (a)**寫出下面無因次量的數量級**:

   • Rossby**數**. • Richardson**數**.

   (b)**寫出下面物理量的數量級**(**要寫單位**):

   • **垂直速度**w. • p**速度**w . • Rossby**參數** $b\,(=df\,/\,dy)$.

   • **散度**d . • **渦度**z .

   (c) **試對下面的渦度方程進行尺度分析**:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+u\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial p}+vb=-(f+z)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}$$

2. **波動**.

   (a)**哪些近似可濾除聲波**?

   (b)**哪些近似可濾除重力波**?

3. **試用地圖坐標表達下面的大氣動力學基本方程**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial p}-fv=-g\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial p}+fu=-g\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p}=-\frac{1}{rg}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial p}=0$$

數值天氣預報

1. **現在要用下面的正壓渦度方程預報中緯度地區的**500mb**高度**:

$$\nabla^2 \frac{\partial y}{\partial t} = -J(y\ ,\ f + z\ ) \qquad (1)$$

   (a)**試述如何由高度場**z**求出流函數**y，**並說明計算步驟**.

   (b)**將**(1)**式用地圖坐標表示**.

   (c)**若用鬆弛法由**(1)**式求**$\partial y\ /\partial t$，**則最大容許值大約多少**?

2. **試述風資訊在分析高度場的重要性**.

3. (a)**試用地圖坐標表達梯度**∇j，**散度**d **和渦度**z .

   (b)**將下面的方程組化為向量不變形式**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial p} - f\,v = -g\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial p} + f\,u = -g\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{rg}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial p} = 0$$

   (c)**將這個方程組用地圖坐標表示**.

高等大氣動力學

1. 試求出等位溫大氣的高度以及壓力、密度、溫度、音速等物理量的垂直分布.
2. 綜觀尺度大氣運動的尺度分析.

   (a)寫出下面無因次量的數量級:

   • Froude數Fr. • Richardson數Ri. • Rossby數Ro. •靜力穩定度參數S.

   (b)寫出下面物理量的數量級:

   •垂直速度w. • p速度w. • Rossby參數b.

   •散度d. •渦度z.

   (c)請對下面的渦度方程進行尺度分析:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+u\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial p}+vb=-(f+z)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}$$

   並證明上述方程中最大的各項為

$$\frac{\partial z}{\partial t}+u\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y}+vb=-f_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

   (d)什麼近似可以濾除聲波?

   (e)什麼近似可以濾除重力波?

   (f)寫出Rossby波的相速度.
3. 說明地轉適應的現象.

數值天氣預報

1. **請對下面的渦度方程進行尺度分析**:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+u\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y}+w\frac{\partial z}{\partial p}+vb=-(f+z)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial p}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial p}$$

並證明上式中最大各項為

$$\frac{\partial z}{\partial t}+u\frac{\partial z}{\partial x}+v\frac{\partial z}{\partial y}+vb=-f_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

2. **詳細說明相當正壓模式的假設**, **導出這個模式的基本方程**.
3. **導出等位溫垂直坐標的動量方程、靜水方程、連續方程和熱力學方程**.
4. **導出**s **垂直坐標的動量方程、靜水方程、連續方程和熱力學方程**.

大氣動力學

1. **簡答**.

   (a)**試述地轉風隨高度的轉向和溫度平流(冷平流和暖平流)間的關係**.

   (b)**何謂正壓大氣**? **為何在正壓大氣中地轉風不隨高度改變**?

   (c)**試述**Rossby**波的特性**.

   (d)**大氣中的垂直速度並不是直接觀測到的物理量**, **試述三種決定垂直速度的方法**.

   (e)**何謂**Brunt-Vaisala**頻率(即**buoyancy frequency)? **在大氣中其周期大約多少**?

2. **數值天氣預報中的濾波問題**.

   (a)**流體靜力近似可濾除何種波動**?

   (b)**準地轉近似可濾除何種波動**?

   (c)**若使用平衡方程由高度場求出風場以做為初始值之用**, **可濾除何種波動**?

3. **大氣邊界層**. **大氣邊界層中科氏力、氣壓梯度力和摩擦力大致互相平衡**:

$$-fv = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{t_x}{r}, \qquad fu = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{t_y}{r} \tag{1}$$

其中u, v**分別為**x**和**y**方向的平均風速分量**, p**和** r **分別為氣壓和密度**. f**為科氏參數**, t_x **和** t_y **分別為**x**和**y**方向的**Reynolds**應力**

$$t_x = -r\langle u'w'\rangle, \qquad t_y = -r\langle v'w'\rangle \tag{2}$$

上式中u', v', w'**分別為**x, y, z**方向的風速變動分量**, **〈〉表示平均值**. **在邊界層中密度** r **可設為常數**. Reynold**應力可用渦動交換係數**K(eddy exchange coefficient)**和平均風速**u, v**聯繫起來**:

$$t_x = rK\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad t_y = rK\frac{\partial v}{\partial z} \tag{3}$$

(a)**在地面層**(surface layer)**中**, Reynolds **應力可視為常數**. **令地面風向平行於** x **軸**, **試導出下面的對數風垂直分布**:

$$u = \frac{u_*}{k}\ln\frac{z}{z_0} \tag{4}$$

其中 u_* **和** k **分別為摩擦速度**(friction velocity)**和**von Karman**常數**. **請敘述導出**(4)**式時所做的假設**. (4)**式中** z_0 **稱為粗糙度**.

(b)**使用下面的地轉關係式**(u_g **和** v_g **分別為地轉風速分量**)

$$-fv_g = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad fu_g = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5}$$

以及(3)**式**, **則**(1)**式可改寫為**

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0, \qquad K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0 \tag{6}$$

再用下面的邊界條件

在 $z = 0$ **處**, $u = 0$, $v = 0$; **當** $z \to \infty$ **時**, $u = u_g$, $v = v_g$

則(6)**式的解為**(**不必求解**)(**令** $v_g = 0$)

$$u = u_g(1 - e^{-gz}\cos gz), \qquad v = u_g e^{-gz}\sin gz \tag{7}$$

其中 $g = (f/2K)^{1/2}$. **試繪出**(7)**式**, **即**Ekman**螺旋的圖形**, **並說明**Ekman**螺旋的特性**.

(c)**邊界層頂處的垂直速度如何估計**?

(d)**試述大氣中旋消**(spin down)**效應的重要性**.

大氣對流

1. **解釋下面的名詞**:
   (a)**煙流**. (b)**噴流**. (c)**熱氣泡**. (d)**貝納對流**. (e)**準不可壓縮近似**.
2. **試述**Kessler**雲微物理參數化的方法**.
3. **考慮下面的準不可壓縮近似方程組**:

$$\frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = -\Theta\nabla_h dp\ , \qquad \frac{dw}{dt} = -\Theta\frac{\partial dp}{\partial z} + \frac{g}{\Theta}dq$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}_h + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{ddq}{dt} = 0$$

   若已求出某一時刻的 $\mathbf{V}_h$, w**和**dq, **試問如何決定**dp? **導出**dp **的方程**, **並寫出邊界條件**.

大氣對流・雲動力學

1. **信號**A**和信號**B**的功率分別為**90**分貝和**80**分貝**, **那麼用千瓦表示時信號**A**的功率是信號**B**的幾倍**?
2. **設** f_r **和** l **分別為雷達發射波的脈波往復頻率和波長**, c**為光速**, **試問雷達的最大不混淆距離** $r_{\max}$ **和最大不混淆速度** $v_{\max}$ **分別是多少**?
3. **設**D, $n(D)$**和**$v_T(D)$**分別為雨滴的直徑、粒徑分布和終端速度**. **試將降雨率**R**用這三個量表示**.
4. **試以兩個粒子的情況為例**, **說明為何常規雷達不能測出其絕對速度**, **而都卜勒雷達卻可以**.
5. **都卜勒雷達資料處理中最重要的三個信號參數是什麼**? **各有什麼用途**?
6. **試述雷達如何測定降雨率**.
7. **試述為什麼需要積雲參數化**(**大約寫一兩百字**).
8. **試述**Kuo**氏積雲參數化的方法**.

大氣對流

1. **試證未飽和溼空氣的定壓比熱** c_{pm} **可用下式表示**:

$$c_{pm} = c_{pd}(1 + 0.84w)$$

   其中 c_{pd} **是乾空氣的定壓比熱**, w**是水汽的混和比**.
2. **為何一氣塊不論經歷乾絕熱或飽和絕熱過程**, **其溼球位溫和相當位溫保持不變**?
3. **試證下式成立**:

$$SdT + Vdp = \sum_k n_k \, dm_k$$

4. **已知某氣壓層**p**處的位溫**T**和露點溫度** T_d , **試問如何求出其溼球位溫和溼球溫度**? **請詳細列出步驟**.

大氣對流

1. **在絕熱變化的情況下**, **試對未飽和與飽和氣塊討論下面濕度參數的守恆性**:
   (a)**混合比**. (b)**水汽壓**. (c)**相對濕度**. (d)**位溫**. (e)**溼球溫度**.
2. **解釋下面的名詞**:
   (a)**終端速度**. (b)**飽和技術**. (c)**降雨率**.
3. **試述**Kessler**的雲微物理參數化法**.

邊界層氣象學

1. **設邊界層內垂直速度變動的標準差**s_w, **即紊流強度**, **是**u_*, z, h, Q_0, b **的函數**. $u_* = (-\overline{uw})^{1/2}$**為摩擦速度**, z**為高度**, h**為邊界層高度**, $Q_0 = \overline{wq}$ **為溫度通量**, $b = g/\Theta$ **為浮力參數**. **試以**Buckingham**因次分析法進行分析**:

   (a)**這些變數中可以組成幾個無因次**p **量**? **試述這幾個**p **量的物理意義**.

   (b)**在極端不穩定的情況下**, s_w**只是**z, h, Q_0, b **的函數**, **試決定此時的無因次**p **量**, **並說明其意義**.
2. (a)**定義通量**Richardson**數**Rf, **並說明其意義**.

   (b)**定義梯度**Richardson**數**Ri, **並決定**Rf**和**Ri**間的關係**. **此外請說明在導出這個關係時所做的假設**.
3. **在非常不穩定的情況下**, **近地層內的**s_w, s_q **只取決於**z, Q_0, b, **試用**Buckingham p **定理決定無因次**p **量**, **此時速度尺度和溫度尺度應為多少**?
4. **何謂慣性次區域**? **在這區域中能譜的形式為何**?

邊界層氣象學

1. **何謂渦相關法**?
2. **動量、顯熱通量和蒸發量可分別用下面三個式子表示**:

$$\frac{t}{r} = u_*^2 = K_m \frac{dU}{dz}$$

$$Q = -K_h \frac{d\Theta}{dz}$$

$$\frac{E}{r} = -K_e \frac{d\overline{q}}{dz}$$

   試述如何用整體效應法表達這三個量.
3. **當大氣成層接近於中性時**, **如何表達摩擦度和摩擦溫度**?
4. **寫出的熱收支公式**, **並加以說明**.

氣象數學方法

1. **解釋下面的名詞**:

   (a) Sommerfeld**輻射條件**. (b) Rellich**定理**.

   (c)**適定的**(well-posed)**問題**. (d)Dirichlet**問題**.

   (e) Neumann**問題**.

2. **對下面的偏微分方程進行分類**:

   (a)**淺水方程**.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0$$

   (b)**旋轉流體中慣性波的運動方程**.

$$\nabla^2\Phi-\frac{4}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

3. **考慮下面的慣性重力波運動方程**:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}-gH\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]+f^2h=0$$

   (a)**對這個方程進行分類**.

   (b)**求出這個方程的特徵曲面**(characteristic surface).

4. **考慮下面的非線性平衡方程**:

$$\nabla\cdot(f\nabla y)+2(y_{xx}y_{yy}-y_{xy}^{2})=\nabla^2 j$$

   其中科氏參數 f **和重力位** j **是已知數**.

(a)**在數學上上式稱為什麼方程**?

(b)**在何種條件下上式才是橢圓型的**?

5. **考慮下面球面上的正壓渦度方程**:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + J(y, z) = 0$$

其中渦度z **和流函數**y **有下面的關係式**$z = \nabla^2 y$ ，**而**Jacobian**的定義為**

$$J(y, z) = \frac{1}{\cos f}\left[\frac{\partial y}{\partial l}\frac{\partial z}{\partial f} - \frac{\partial y}{\partial f}\frac{\partial z}{\partial l}\right]$$

其中 l **和**f **分別為經度和緯度**.

(a)**試證下面三個式子成立**:

$$\iint_{\Omega} J(y, z)\, dA = 0, \qquad \iint_{\Omega} y\, J(y, z)\, dA = 0, \qquad \iint_{\Omega} z\, J(y, z)\, dA = 0$$

其中Ω**為單位半徑球體的表面積**, dA**為面積元**.

(b)**利用**(a)**的結果證明**, **平均渦度**、**平均動能和平均渦度平方**(enstrophy)**是守恆的**.

6. **寫出平面上**Arakawa Jacobian**的表達式**, **並說明其特點**.
7. **波譜法**、**有限元法**、Rayleigh-Ritz**法**、Galerkin**法和假波譜法之間有什麼關係**? **它們有什麼相異點**?