

UNIVERSITÉ DE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

Convection de Rayleigh-Bénard à viscosité variable. Applications géophysiques et planétologiques.

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Géophysique

*Présentée
et soutenue publiquement par*

Frédéric DESCHAMPS

le 19 Décembre 1997 devant le jury composé de:

Président: Gérard LABROSSE, *professeur, Université Paris XI.*
Rapporteurs: Michel RABINOWICZ, *professeur, GRGS, Toulouse.*
Jeannot TRAMPERT, *professeur, Université d'Utrecht.*
Examineurs: Anne DAVAILLE, *maître de conférences, IPGP, Université Paris VII.*
Olivier FORNI, *maître de conférences, IAS, Université Paris XI.*
Christophe SOTIN, *professeur, Université de Nantes.*

Directeur de Thèse: Christophe SOTIN

Laboratoire de Géophysique et de Planétologie
Université de Nantes.

A Pierre et Paul

La Terre nous en apprend plus long sur nous que tous les livres.

(Antoine de Saint-Exupéry)

Remerciements

Enfin, j'ai intitulé mon livre Seul, mais il est évident qu'aucun homme n'aurait pu accomplir ce que j'ai accompli sans l'appui loyal et cordial de ses semblables.

(Richard E. Byrd, Seul, 1938).

Richard Byrd a réalisé le premier hivernage en solitaire à l'intérieur du continent Antarctique. Et il est évident qu'au cours de ces trois années de thèse, j'ai été infiniment plus entouré et soutenu.

Christophe Sotin a guidé mes premiers pas en recherche. Et puisque durant cette période j'ai réussi l'exploit de ne reformatter aucun disque dur, Christophe a accepté de diriger et d'encadrer ma thèse. Il m'a suggéré de nombreuses idées, et m'a indiqué certaines pistes tout en me mettant en garde contre d'autres. Aussi, il est juste qu'il apparaisse en tête de ces remerciements. Je souhaite également le remercier pour m'avoir fait partager son dynamisme, ainsi que pour avoir soutenu mes candidatures, démarches et autres projets. Enfin, il m'a fait confiance tout au long de ces trois années.

Je tiens ensuite à remercier chaleureusement Michel Rabinowicz et Jeannot Trampert d'avoir accepté de rapporter ce travail. A dix milles kilomètres de Paris, j'étais à dix milles lieux d'imaginer que Jeannot accepterait de porter son regard critique sur mes recherches. Cela m'a réellement fait plaisir. Gérard Labrosse a présidé le jury, et je l'en remercie. Anne Davaille a momentanément délaissé ses expériences de convection pour examiner ma thèse et Olivier Forni, également examinateur de ce travail, a grandement facilité la soutenance à l'I.A.S. d'Orsay.

Antoine Mocquet a co-encadré mes recherches. Les discussions scientifiques furent très utiles, et les discussions tout court agréables et relaxantes. Et pourtant, je suis un ingrat personnage: Antoine m'a souvent rappelé l'accord du C.O.D. et quelques autres règles d'orthographe ... quel échec!

Gaël Choblet et moi avons partagé le même bureau. Franchement, je ne sais pas lequel des deux a eu le plus à en souffrir. Probablement ni l'un ni l'autre. En tout cas j'ai beaucoup appris et à ses côtés, et je pense qu'on a passé du bon temps. Solange Beauchesne est la fée du labo. Avec Stéphane, elle m'a souvent réconforté, surtout dans les passages difficiles. Je garderais toujours un excellent souvenir de l'Ile aux Moines. Stéphane Labrosse a écrit sa thèse à Paris,

mais sa pensée boulesbue a largement diffusée jusqu'à Nantes. Chacun de ses passages fut synonyme de soirée sympa, mais aussi d'émulation scientifique.

Le lecteur n'aura pas de mal à reconnaître les dessins réalisés par Alain Cossard : ce sont les plus réussis. Merci également d'avoir bien voulu me laisser utiliser le laboratoire photo.

Marie-Claire Bréhier s'est occupé, avec une efficacité certaine, de tous mes papiers administratifs. Vous me croirez sûrement si je vous dit que ça n'est pas une mince affaire. Ainsi, j'ai pu consacrer l'essentiel de mon temps à des problèmes purement scientifiques.

J'ai eu beaucoup de plaisir à préparer ma thèse au sein du laboratoire de géophysique et de planétologie de Nantes. Le travail de thèse de Pierre Vacher a inspiré une partie de ce manuscrit. J'ai également repris quelques idées du travail d'Ovilier Grasset. Tous deux ont aussi animé mes premiers pas nantais et maintenu une certaine ambiance au laboratoire. Merci à Stéphane Rouzo d'avoir apporté une pincée de Sud-Ouest à Nantes, et à Eric Quirico pour les discussions que nous avons eues. J'ai aussi beaucoup apprécié l'aide qu'Eric m'a apportée pour l'organisation de la soutenance, à Orsay.

A Nantes, les sciences de la Terre ne se limitent pas à une poignée d'irréductibles géophysiciens. Que seraient-elles sans la potion magique (je parle entre autre du saccharose orthorombique 'Bégain Say') des pétrologues et autres 'druides' géologiques. A tout seigneur, tout honneur, Jacques Girardeau, directeur de l'équipe de recherche, a toujours vivement soutenu mes candidatures et mes projets. En particulier, il m'a donné l'occasion de participer à une campagne en mer, à bord de l'Atalante. Frédéric Quatrevaux a été l'un des premiers à m'accueillir à Nantes, et à me guider dans cette ville. Je souhaite également mentionner Eric Boeuf, Jean-Jacques Guillou (en particulier pour les discussions sur les oiseaux), Patrick Génot (déménagement Beauchesne, demain 8h30), Gérard Bossière, Christophe Monnier, Patrick Launeau, Gaële Levrel, et Stéphane Jeanneau.

Ensuite, je tiens à saluer de fidèles amis, ceux de la 30^{ième} à Crozet, pour l'année passée ensemble, et pour le soutien qu'ils m'ont manifesté tout au long de cette thèse. Merci à vous Birdy, Bo Dave, Bouldide, Bout de fil, Charly, Epso, Etché, Francky, Genghis, Godon, Jean-Phi, Jibé, Karl, Manpow, Marc, Moumouche, Tidupe, et bien sûr Nonoché, notre albatros à tous. Et que le P'tit Caporal s'effondre si je ne suis pas sincère.

Ce serait une ingratitude notoire que d'oublier les vieux loups de mer, tout particulièrement Fabrice, Jean-Loup, Patrick et Fred (de la télé).

Last but not least, mes remerciements iront enfin à mes parents et mon frère, pour des raisons évidentes.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 - Un mode de transfert de la chaleur: la convection	3
Introduction	4
1.1 Convection dans le manteau terrestre	6
1.1.1 La convection comme mode d'évacuation de la chaleur	6
1.1.2 Les observations géophysiques et la modélisation numérique	11
1.1.3 Couplage tectonique des plaques/convection	17
1.1.4 Convection en une ou deux couches?	18
1.2 Convection thermique	19
1.2.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard. Convection thermique	19
1.2.2 Nombres caractéristiques	20
1.2.3 Domaines de stabilité	22
1.2.4 Influence d'une viscosité inhomogène	23
1.2.5 Problème 2D isovisqueux : loi paramétrisée	26
1.2.6 Le modèle de couche limite thermique	31
1.3 Viscosité variable	34
1.3.1 Rhéologie des roches	34
1.3.2 Les observations géophysiques	39
1.3.3 Importance de la viscosité variable	42
Conclusion	44
Chapitre 2 - Le modèle numérique	45
Introduction	46
2.1 Equations fondamentales	46
2.1.1 Ecoulement d'un fluide visqueux	46
2.1.2 Conservation de la masse	48
2.1.3 Transport de la chaleur	48
2.1.4 Equations adimensionnées	49
2.2 Cas de la viscosité variable	51
2.2.1 Modification des équations de Navier-Stokes	51
2.2.2 Choix du nombre de Rayleigh	52
2.2.3 Loi de viscosité numérique	53

2.2.4	Les limites de la loi de viscosité	54
2.3	Flux thermique	56
2.3.1	Calcul du nombre de Nusselt	56
2.3.2	Conservation de l'énergie	58
2.3.3	Influence de la dissipation visqueuse	58
2.4	Formulation et résolution du problème numérique	61
2.4.1	Géométrie et conditions aux limites	61
2.4.2	Discrétisation	62
2.4.3	Schéma numérique et relaxation	63
2.4.4	Accélération de la convergence	64
2.4.5	Critère de convergence	65
2.4.6	Incertitude sur les résultats	65
2.4.7	Benchmarking partiel	66
	Conclusion	69

Chapitre 3 - Expériences numériques: résultats et

	paramétrisations	71
	Introduction	73
3.1	Quelques expériences numériques et analogiques	73
3.2	Les résultats du modèle numérique	76
3.2.1	Flux de chaleur	76
3.2.2	Profils et distributions thermiques	77
3.2.3	Vitesses et contraintes	82
3.2.4	Relation entre le nombre de Rayleigh et le flux de chaleur	84
3.3	Importance de la condition limite en surface	87
3.3.1	Surface rigide et fixe	87
3.3.2	Surface mobile	91
3.4	Le régime de couvercle conductif	93
3.4.1	Condition d'apparition du couvercle	94
3.4.2	Jeu de données	97
3.4.3	Détermination du couvercle : méthode du flux de chaleur	99
3.4.4	Définition d'une échelle de température visqueuse	103
3.4.5	Saut de température dans la couche limite thermique du bas	107
3.4.6	Paramétrisation sur toute l'épaisseur de la boîte	108
3.4.7	Paramétrisation des autres observables	111
3.4.8	Régime transitoire	112
3.5	Discussion : détermination du couvercle et rôle des couches	

limites thermiques	113
3.5.1 Comparaison avec d'autres études	113
3.5.2 Délimitation du régime de couvercle	116
3.5.3 Détermination des couches limites thermiques	119
3.5.4 Erosion thermique du couvercle	126
3.5.5 Saut thermique dans la couche limite du bas : redimensionnement	128
3.5.6 Application au manteau inférieur	129
3.6 Les limites du modèle	131
3.6.1 Rôle du chauffage interne	131
3.6.2 Géométrie	133
3.6.3 Rhéologie non-newtonienne	134
Conclusion	135

Chapitre 4 - Vitesses sismiques du manteau supérieur

terrestre	137
Introduction	138
4.1 Calcul des champs thermiques	139
4.2 Paramètres influents	140
4.2.1 Rapport d'aspect	140
4.2.2 Vitesse de surface	143
4.2.3 Apport de la viscosité variable	145
4.3 Calcul des vitesses sismiques	148
4.3.1 Méthode	148
4.3.2 Données minéralogiques	151
4.3.3 Anomalies synthétiques	152
4.3.4 Profils synthétiques	158
4.3.5 Epaisseur et profondeur de la transition $\alpha \rightarrow \beta$	163
4.3.6 Correction adiabatique des températures	164
4.3.7 Spectres de puissance des anomalies de vitesse	164
4.4 Conséquences sur la dynamique du manteau terrestre	167
Conclusion	168

Chapitre 5 - Application aux satellites de glace 171

Introduction	173
5.1 Les satellites de glaces	173
5.1.1 Généralités et paramètres physiques	173
5.1.2 Caractéristiques de surface	176

5.1.3	Les premiers stades de l'évolution	177
5.2	Quelques propriétés de la glace	180
5.2.1	Courbe de fusion de la glace	180
5.2.2	Rhéologie de la glace I	184
5.2.3	Choix de la loi de viscosité. Autres paramètres	186
5.3	Convection dans l'enveloppe de glace I	187
5.3.1	Satellite générique	188
5.3.2	Saut de température dans la couche limite thermique du bas	189
5.3.3	Viscosité constante. Importance de la viscosité variable	191
5.3.4	Le nombre de Rayleigh et l'apparition de la convection	191
5.3.5	Le flux de chaleur et l'existence d'un océan sous l'enveloppe de glace	192
5.3.6	Epaisseur de la lithosphère	193
5.3.7	Le fraction de silicates et le flux de chaleur disponible	194
5.4	Les paramètres du modèle	197
5.4.1	Energie d'activation et viscosité de référence	197
5.4.2	Température de surface	199
5.4.3	Rayon et densité	200
5.4.4	Paramétrisation du flux de chaleur	201
5.4.5	Composition de l'océan	203
5.4.6	Fraction de silicates et flux de chaleur radioactif	207
5.5	Discussion : planétologie comparée	209
5.5.1	Fraction de silicates, masse volumique et flux de chaleur radioactif	209
5.5.2	Convection dans la couche de glace I	211
5.5.3	Ganymède et Callisto	215
	Conclusion	217
	Conclusion	219
	Annexes et références	221
	Annexe 1 - Méthodes numériques	223
	Annexe 2 - Amplitude de la couche limite thermique du haut	235
	Références	237
	Résumé	249
	Abstract	250

Introduction

On pense aujourd'hui que la Terre et les autres planètes du système solaire se sont formées par accréation de corps de plus en plus massifs. L'énergie libérée par ces collisions et par contraction gravitationnelle a été en partie stockée à l'intérieur de la planète. Il faut y ajouter (au moins dans le cas de la Terre) l'énergie libérée par la désintégration radioactive d'éléments chimiques instables, principalement ^{235}U , ^{238}U , ^{232}Th et ^{40}K (la puissance cumulée dégagée par ces éléments atteint aujourd'hui 6×10^{-12} W/kg). Par la suite, les planètes telluriques se sont rapidement différenciées en une partie centrale ferreuse, le noyau, entourée d'une enveloppe moins dense, le manteau. Le refroidissement du noyau et la chaleur latente de cristallisation de la graine sont les principales sources de chaleur à la base du manteau. En surface, la température est imposée par la distance planète-Soleil. La présence d'une atmosphère opaque au rayonnement infrarouge induit un réchauffement (par effet de serre) d'autant plus important que l'atmosphère est riche en gaz tels que le dioxyde de carbone. La température de surface reste de toute façon très inférieure à la température du noyau, ou même du manteau. L'équilibre thermique n'est pas atteint, et l'énergie libérée par le noyau et le manteau doit être véhiculée vers la surface. Le mode de transport de la chaleur dans le manteau conditionne la vitesse de refroidissement de la planète.

Dans le cas de la Terre, le phénomène de transport de la chaleur le plus efficace est la convection. L'écoulement de matière et la distribution de température associés à cette convection induisent de profondes modifications dans la structure chimique du manteau. Par ailleurs, le volcanisme de surface et, dans le cas de la Terre, la tectonique des plaques, sont étroitement liés à la structure convective qui se développe dans le manteau. Ce point, ainsi que quelques rappels de convection thermique ont discutés dans le chapitre 1.

Les paramètres géodynamiques et les propriétés thermiques et mécaniques des roches constituant les planètes telluriques permettent de simplifier les équations de la convection. Malgré cela, ces équations restent non-linéaires, et n'admettent pas de solution analytique globale. Les difficultés rencontrées, ainsi que certaines approximations posées par les calculs analytiques, peuvent être levées par les expériences analogiques et les modèles numériques. Le chapitre 2 présente un modèle numérique, celui qui a été développé au cours de cette thèse. Ce modèle prend en compte les variations de viscosité avec la température, ce qui constitue une première

étape pour intégrer la rhéologie des roches (et ses conséquences) dans le schéma dynamique du manteau. Une forte viscosité freine le transport de la matière, et les variations de viscosité vont induire de profonds changements dans les schémas convectifs. L'étude des effets induits par ces variations fait l'objet du chapitre 3, qui propose également une paramétrisation du flux de chaleur, dans le cas précis du régime convectif de couvercle. Cette paramétrisation est différente de celle récemment proposée par *Moresi et Solomatov* (1995), et elle décrit bien les résultats de *Christensen* (1984a). Une paramétrisation du saut de température dans la couche limite thermique du bas est également proposée. Nos résultats suggèrent que dans le cas du régime de couvercle, cette couche limite contrôle l'écoulement.

Les chapitres 4 et 5 présentent des applications des résultats précédents. Dans le chapitre 4, les conditions aux limites mécaniques du modèle numérique sont modifiées afin de simuler le mouvement de plaques en surface. La taille de la grille de calcul est adaptée aux dimensions du manteau supérieur. A partir, d'une part des distributions thermiques calculées, et d'autre part d'un modèle minéralogique dépendant de la température, on déduit des profils et des cartes d'anomalies de vitesses sismiques. Les profils synthétiques sont en bon accord avec le modèle sismique ak 135 (*Kennett et al.*, 1995). Un des effets de la viscosité variable est de réduire l'amplitude et l'épaisseur de la couche limite thermique du bas. Dans ces conditions, les profils synthétiques montrent qu'une couche limite thermique peu très bien être présente à la base du manteau supérieur sans être détectée par les modèles sismiques. Toujours dans le cas de la viscosité variable, on verra que les anomalies de vitesse sismique sont plus fortes et plus étendues sous les panaches froids que sous les panaches chauds.

Plus loin du Soleil, certains satellites de glaces des planètes géantes ont eux aussi acquis une structure radiale différenciée. Cette fois-ci, ce sont les silicates, plus lourds que les glaces, qui forment le noyau. Les paramétrisations obtenues pour le régime de couvercle s'appliquent bien à la convection dans la couche superficielle de glace I. En particulier, on montre que la présence éventuelle d'ammoniaque affaiblit la convection et réduit le flux de chaleur à travers l'enveloppe de glace I. Les paramétrisations obtenues dans le chapitre 3 mettent ainsi en évidence les limites de la convection dans l'enveloppe de glace superficielle, limites qu'il faut peut être rapprocher à l'existence éventuelle d'un océan sous cette enveloppe de glace. C'est peut être le cas d'Europe, le second satellite de Jupiter, dont la sonde Galiléo vient de transmettre de nouvelles images.

Chapitre 1

Un mode de transfert thermique: la convection

And down in the ground is the place where you go if you've been a bad boy.
(Pete Townshend, Heaven and Hell, 1968)

Sommaire

Introduction	4
1.1 Convection dans le manteau terrestre	6
1.1.1 La convection comme mode d'évacuation de la chaleur	6
1.1.2 Les observations géophysiques et la modélisation numérique	11
1.1.3 Couplage tectonique des plaques/convection	17
1.1.4 Convection en une ou deux couches?	18
1.2 Convection thermique	19
1.2.1 Instabilité de Rayleigh-Bénard. Convection thermique	19
1.2.2 Nombres caractéristiques	20
1.2.3 Domaines de stabilité	22
1.2.4 Influence d'une viscosité inhomogène	23
1.2.5 Problème 2D isovisqueux: loi paramétrisée	26
1.2.6 Le modèle de couche limite thermique	31
1.3 Viscosité variable	34
1.3.1 Rhéologie des roches	34
1.3.2 Les observations géophysiques	39
1.3.3 Importance de la viscosité variable	42
Conclusion	44

Introduction.

Les roches du manteau terrestre sont suffisamment denses pour rendre le transfert radiatif de chaleur inefficace. Elles conduisent également très mal la chaleur, la conductivité thermique du manteau étant de l'ordre de $3,0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Un transport purement conductif de la chaleur conduirait à des températures excessives à la base du manteau supérieur (environ 13000 K). La convection semble donc être le mécanisme de transfert thermique le plus probable (rentable) dans le manteau terrestre. Malgré une viscosité élevée ($\sim 10^{21} \text{ Pa.s}$), les propriétés du manteau sont compatibles avec le développement d'instabilités de Rayleigh-Bénard (convection entre deux plaques induite par un chauffage externe). Les échelles de temps sont cependant très longues, de l'ordre du million d'années. C'est seulement pour ces temps caractéristiques que le manteau se comporte comme un fluide. Bien entendu, la convection terrestre est plus compliquée que dans le cas de Rayleigh-Bénard. Elle doit tenir compte de nombreux paramètres tels que la géométrie, la production de chaleur interne et l'hétérogénéité des roches.

La convection du manteau est à l'origine de phénomènes observables en surface. La tectonique des plaques et les zones de subduction associées sont étroitement liées à la dynamique du manteau. De même, le volcanisme intraplaque (les points chauds) témoigne de la remontée de matière depuis le manteau profond. La convection contrôle la distribution des températures et l'évolution chimique du manteau. Le volcanisme, la formation et la composition de la croûte résultent de ces transferts de masse et de chaleur. L'ensemble de ces observables permet de valider et d'affiner les modèles de convection.

Un paramètre rhéologique fait l'objet d'efforts particuliers depuis plus de 25 ans: la viscosité. Elle contrôle la quantité de déformation des roches et l'écoulement associé. La viscosité est très sensible aux conditions physiques qui règnent dans l'environnement de la roche: température, pression, contrainte, présence de fluides, etc... . Dans le manteau terrestre, ces quantités varient énormément, pour certaines aussi bien latéralement que radialement. A cela vient s'ajouter le mode de déformation des roches. Selon la température, la taille et l'intensité des contraintes, la déformation est contrôlée par un mécanisme de diffusion ou de dislocation. Enfin, le problème devient particulièrement ardu lorsqu'il s'agit de décrire aussi la lithosphère. La viscosité y devient extrêmement élevée, et n'est probablement pas linéaire vis à vis des contraintes.

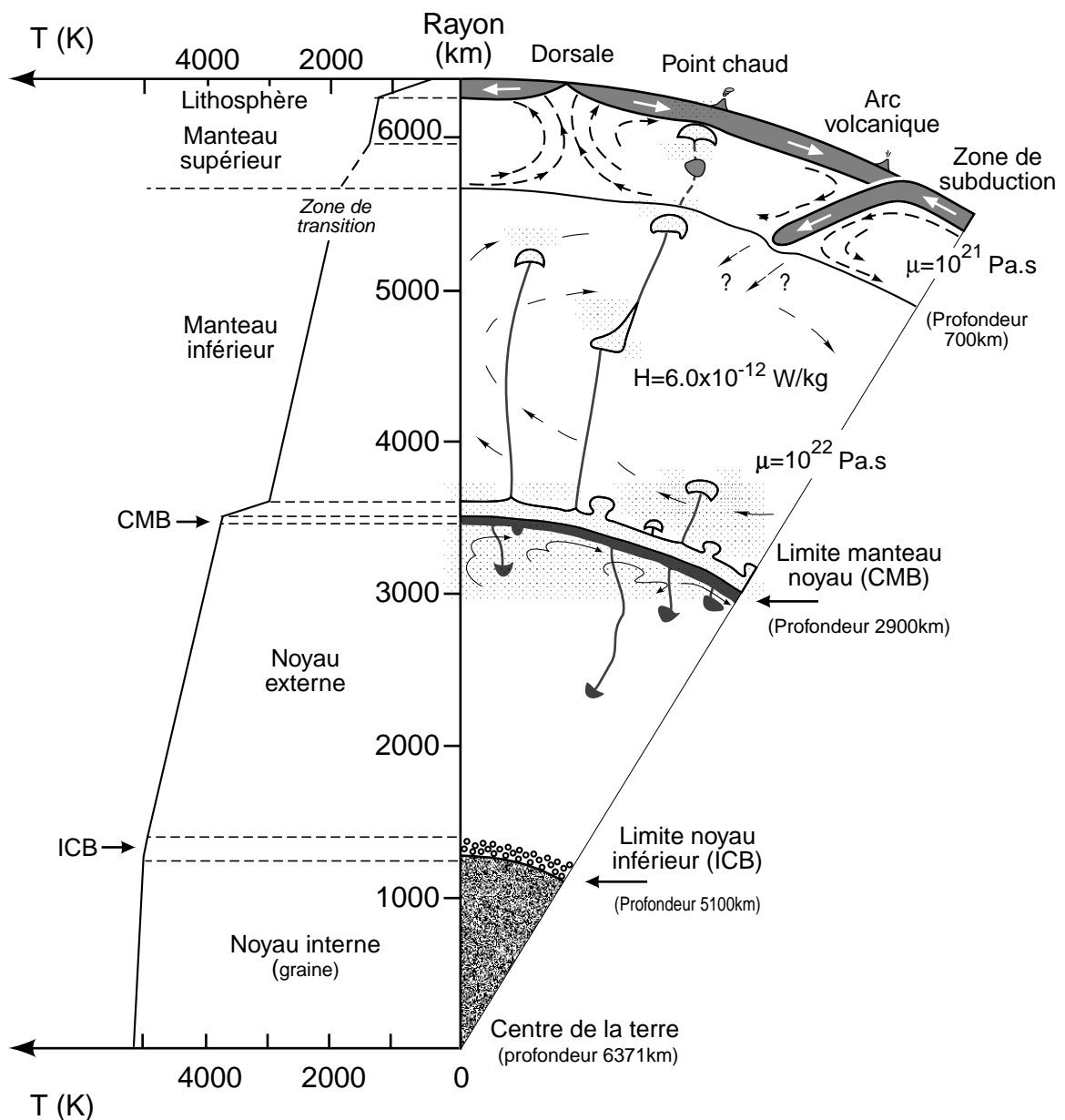


Figure 1-1. Coupe dynamique de la Terre (D'après "Les profondeurs de la Terre", de J.-P. Poirier). Dans cette représentation, le manteau supérieur et le manteau inférieur convectent séparément. Des panaches chauds se forment à la limite noyau/manteau, et remontent jusqu'en surface où ils sont responsables du volcanisme intraplaque. Dans le manteau supérieur, la convection est étroitement liée à la tectonique des plaques. Les slabs plongent au niveau des zones de subduction et pourraient avoir un rôle moteur pour la tectonique des plaques. Épisodiquement, ils franchissent la limite manteau supérieur/manteau inférieur. La convection thermique est entretenue en partie par le flux de chaleur issu du noyau, et en partie par le chauffage interne ($H=6,0 \times 10^{-12} \text{ W/kg}$). La viscosité du manteau supérieur est estimée à 10^{21} Pa.s , et celle du manteau inférieur à 10^{22} Pa.s . Le profil thermique est représenté sur la gauche : à la limite manteau supérieur/manteau inférieur, $T=1873 \text{ K}$.

1.1 - Convection dans le manteau terrestre.

1.1.1 - La convection comme mode d'évacuation de la chaleur.

- *L'hypothèse conductive.* Les roches terrestres conduisent très mal la chaleur. Pour la péridotite, composante principale du manteau supérieur, la conductivité thermique est de l'ordre de $3,0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ (contre $79,5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ pour le fer à $25 \text{ }^\circ\text{C}$). D'après la loi de Fourier, il reste toutefois possible de transporter une quantité de chaleur importante, pourvu que les gradients thermiques soient élevés. D'après les observations effectuées dans les mines, on peut compter sur un géotherme de 20 à $30^\circ\text{C}/\text{km}$ près de la surface. Si la chaleur était uniquement transmise par conduction, il règnerait, à une profondeur de 670 km une température d'au moins $13000 \text{ }^\circ\text{C}$. Le liquidus des péridotites (ainsi que celui de tous les métaux) est franchi bien avant cette valeur. La sismologie nous apprend que seul le noyau externe (entre 2900 et 5200 km) est effectivement liquide, et donc que la conduction ne peut pas expliquer à elle seule le flux de chaleur observé à la surface de la Terre.

En 1863, Kelvin ne disposait pas de cet argument sismologique. Il établit un modèle de refroidissement purement conductif du manteau, et calcula que 100 millions d'années étaient nécessaires pour rendre compte de la valeur actuelle du géotherme à partir d'une Terre complètement fondue. Selon ce modèle, la Terre serait encore aujourd'hui majoritairement fondue. L'âge de la Terre calculé par Kelvin fut définitivement invalidé dès le début du $\text{XX}^{\text{ième}}$ siècle par les premières datations radiométriques. Une discussion détaillée de cet aspect historique peut être trouvée dans *Labrosse (1997)*. Aujourd'hui, les mesures réalisées à partir d'échantillons de météorites datent très précisément la formation de la Terre: $(4,566 \pm 0,002) \text{ Ga}$ (*Allègre et al., 1995*) (en fait, cette valeur correspond à la formation de planétésimaux de quelques kilomètres de rayon. La phase finale de l'accrétion est de l'ordre de 10^5 ans, c'est-à-dire inférieur à l'intervalle d'incertitude). Suivant la théorie de Kelvin, le géotherme actuel ne devrait plus être que de quelques $5^\circ\text{C}/\text{km}$. Puisque la valeur observée est 4 à 6 fois plus élevée, c'est qu'un autre mécanisme de transfert thermique, la convection, apporte de la chaleur à la base du géotherme.

La convection est intéressante parce qu'elle implique un profil thermique en grande partie adiabatique. Elle évite ainsi des valeurs prohibitives de la température à la base du manteau supérieur. Des arguments minéralogiques (transition γ -spinelle \rightarrow perovskite) fixent par ailleurs ce paramètre à 1600°C . Enfin, le diagramme de phase de l'olivine prédit une température au sommet de la zone de transition (380 km) de 1400°C (*Akagi et Akimoto, 1979*). Le gradient thermique est

donc condamné à s'infléchir quelque part dans le manteau supérieur. Les géothermes construits à partir des mesures thermobarométriques effectuées sur des roches issues de grandes profondeurs (de 100 à 200 km) montrent une chute du gradient géothermique sous l'Afrique du Sud, autour de 5 GPa (~150 km) (Bertrand *et al.*, 1986; Sotin, 1986; fig. 1-2). De plus, l'association de données

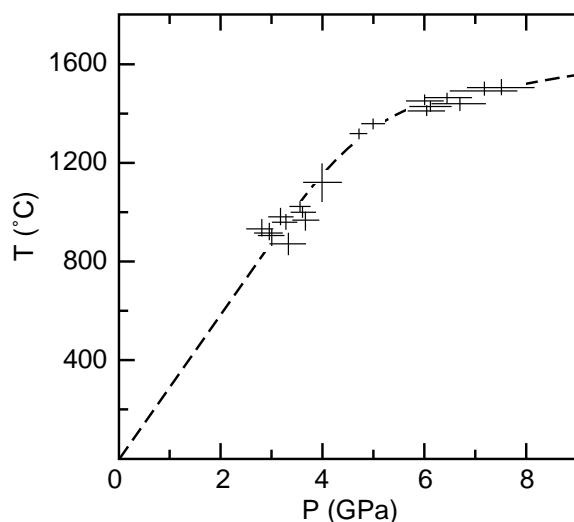


Figure 1-2. Géotherme de Thaba Putsoa (Bertrand *et al.*, 1986) déduit de l'inversion thermobarométrique de roches haute pression.

minéralogiques expérimentales et de profils de vitesse d'onde sismique donne une bonne idée du gradient thermique. Dans le cas du manteau supérieur, Anderson (1980) met effectivement en évidence une diminution du gradient thermique avec la profondeur. Ce type de modèle reste cependant très sensible au choix du modèle minéralogique.

Une alternative à la convection serait de prendre en compte la chaleur dégagée par la désintégration des radioéléments piégés dans la croûte. Cette hypothèse est vérifiable en comparant le flux de chaleur radioactif avec le

mesures sont disponibles aussi bien pour les continents que pour les océans (Sclater *et al.*, 1980). Cela marche plutôt bien pour les continents, enrichis en éléments radioactifs. Il en va autrement pour des océans pour lesquels le flux de chaleur radioactif explique à peine 1% du flux observé (p.e. Turcotte et Schubert, 1982, pp.144-147). La valeur élevée du flux de chaleur océanique est un argument supplémentaire en faveur de la convection du manteau.

- *Les modèles de refroidissement de la Terre.* Le problème du refroidissement de la Terre reste un thème très prisé par les géophysiciens. Le modèle le plus simple repose sur trois éléments: le mode de production de la chaleur, le processus par lequel cette chaleur est véhiculée vers la surface, et la valeur de la quantité d'énergie effectivement perdue par la Terre. A cela, il faut ajouter un postulat physique, la conservation de l'énergie. Enfin, certains modèles tiennent compte du refroidissement du noyau. La quantité de chaleur évacuée par la Terre est bien connue (Sclater *et al.*, 1980), et on peut avoir une bonne idée du chauffage radioactif et de l'énergie issue du noyau. On dispose enfin d'une observable, les paléogéothermes. L'analyse thermobarométrique des komatiites permet de calculer la température qui existait dans le panache (p.e. Nisbet *et al.*,

1993). Par extension, on en déduit celle du manteau. Il y a 3,5 Ga, celui ci était de 200 à 300 K plus chaud qu'aujourd'hui.

Il existe deux contributions au flux de chaleur dans la Terre: le refroidissement séculaire du noyau (auquel il faut ajouter la cristallisation de la graine) et du manteau, et la désintégration des éléments radioactifs. La première composante est en fait la manifestation de l'énergie potentielle de gravitation piégée lors de l'accrétion. Une partie de cette énergie (10%), a été stockée sous forme thermique, et doit être progressivement relâchée. Le chauffage radioactif est issu des radioéléments (en particulier ^{40}K , ^{232}Th , ^{235}U et ^{238}U) piégés dans les roches terrestres. Ces radioéléments se répartissent dans le manteau et la croûte, mais semblent être absents du noyau. Il est important de bien connaître cette distribution, car c'est elle qui va fixer l'importance relative du chauffage radioactif et du refroidissement séculaire. Pour cela, on définit le nombre d'Urey, c'est-à-dire le rapport entre le flux de chaleur d'origine radioactive et le flux de chaleur total. Seule la répartition d'un des radioéléments (par exemple l'uranium) est nécessaire. Les proportions de potassium et de thorium relativement à l'uranium peuvent être considérées comme constantes dans tout le manteau). Un manteau homogène en uranium conduit à un nombre d'Urey élevé, de l'ordre de 0,8. En fait, le manteau supérieur s'appauvrit progressivement en radioéléments au profit de la croûte (et en particulier de la croûte continentale), tandis que le manteau inférieur a conservé une composition primitive. Les valeurs de concentration en uranium que proposent *Jochum et al.* (1983) pour le manteau supérieur (~3 ppb, avec un maximum de 8 ppb) et le manteau inférieur (~21 ppb), réduisent le nombre d'Urey de 50%.

La quantité de chaleur évacuée par la Terre a été estimée par *Sclater et al.* (1980) avec 10-20% d'incertitude à 42 TW, se répartissant entre les continents (11,5 TW) et les océans (30,4 TW). Ces deux valeurs sont obtenues par extrapolation de mesures de terrain. Le flux continental est corrigé du flux crustal, issu de l'enrichissement des continents en radioéléments. Le flux océanique, repose sur un modèle de refroidissement lithosphérique (*Parsons et Sclater*, 1977). Quant aux points chauds, peu étendus en surface, ils contribuent finalement assez peu au flux de chaleur total. *Sleep* (1990) estime cette contribution à 2,5 TW.

La capacité à évacuer la quantité de chaleur disponible dépend du mécanisme de transport de la chaleur. S'il est suffisamment efficace, il parvient à relâcher toute la chaleur radioactive, mais aussi une partie du refroidissement séculaire. Indépendamment des problèmes soulevés par un transport purement conductif, l'idée d'un transfert convectif s'est imposée dans les années 60 comme le mode de transfert de la chaleur dans le manteau terrestre. Pour autant, les modèles de

refroidissement de la Terre ne résolvent pas directement les équations de la convection. Ils utilisent plutôt des paramétrisations du flux de chaleur, elles-mêmes issues des modèles de convection (numériques ou analogiques). Cette simplification pose cependant plus d'un problème. Ainsi, le choix de la loi paramétrisée n'est pas si simple qu'il n'y paraît. Dans le cas d'un fluide isovisqueux, elle s'exprime généralement sous la forme

$$\Phi = a \frac{k\Delta T}{b} Ra^\beta. \quad (1-1)$$

où k est la conductivité thermique du fluide, ΔT le saut de température à travers l'épaisseur b de la couche de fluide, et Ra le nombre de Rayleigh (qui sera défini au §1.2.2). La valeur de $1/3$ pour l'exposant β est expérimentalement bien contrainte (§1.2.5, table 1-2) et semble convenir à un grand nombre de cas de figure (*Schubert et al.*, 1979). Elle est d'ailleurs bien expliquée théoriquement par un modèle de couche limite thermique (*Turcotte et Oxburgh*, 1967) et par une analyse de stabilité linéaire (p.e. *Turcotte et Schubert*, 1982). Adoptée dans beaucoup de modèles d'évolution thermique du manteau, elle conduit à taux de refroidissement de l'ordre de 40 K/Ga et à un nombre d'Urey élevé ($\sim 0,7-0,85$) (p.e. *Schubert et al.*, 1979; *Turcotte*, 1980 parmi les premières études). En revanche, le paramètre multiplicatif a varie significativement selon le type de chauffage (par en dessous, interne, ou mixte) et la géométrie (cartésienne ou sphérique). Dans le cas d'un chauffage mixte, l'équation (1-1) doit être modifiée et faire apparaître le terme de chauffage interne et la courbure du manteau (*Sotin et Labrosse*, 1997).

Les modèles de *Stevenson et al.* (1983) et *Spohn et Breuer* (1993) utilisent une paramétrisation inspirée par l'analyse de couche limite thermique (§1.2.6). Cette analyse associe un nombre de Rayleigh local (Ra_δ) à la couche limite thermique. Le flux de chaleur véhiculé par la couche limite d'épaisseur δ s'exprime en fonction du nombre de Rayleigh critique local,

$$\Phi = \frac{k\Delta T}{\delta} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta}{b} = \left(\frac{Ra_{c,\delta}}{Ra} \right)^\beta, \quad (1-2)$$

où β vaut également $1/3$. *Stevenson et al.* (1983) supposent un Rayleigh critique d'environ 500. L'évolution du flux de chaleur est calculé par itérations successives. La température est d'abord réactualisée. Elle permet de calculer une viscosité, un nombre de Rayleigh puis une épaisseur de couche limite. Le flux de chaleur est finalement déduit de cette épaisseur. Cette formulation est équivalente à l'équation (1-1) (avec un facteur multiplicatif $a=0,126$ dans le cas où $Ra_{c,\delta} \sim 500$), mais elle a le mérite de mettre en avant le rôle de la couche limite thermique : c'est cette couche limite qui contrôle le flux de chaleur et le développement de la convection.

Les modèles de refroidissement tiennent compte des variations de la viscosité avec la température, mais les paramétrisations utilisées sont celles des modèles isovisqueux. *Christensen* (1985b) note que les variations de viscosité apportent des changements importants par rapport à (1-1). En particulier, l'exposant $1/3$ doit certainement être revu à la baisse. Il est cependant préférable de modifier la forme de l'équation (1-1) en y introduisant un paramètre décrivant les variations de viscosité. Une paramétrisation de ce type a récemment été proposée par *Moresi et Solomatov* (1995). Nous en proposerons une autre dans ce travail (chapitre 3). *Christensen* (1985b) utilise l'équation (1-1), mais il constate que les résultats obtenus pour de faibles valeurs de β cadrent mieux avec les observations. Par exemple, le cas $\beta=0,1$ prévoit une température du manteau plus élevée de 200-300°C il-y-a 3,2 Ga (valeur compatible avec ce que nous apprennent les komatiites), et un nombre d'Urey de 0,4 est obtenu pour $\beta=0,05$.

Enfin, les lois paramétrisées sont déduites de calculs à l'état stationnaire, et on peut se demander s'il est légitime de les appliquer à un modèle évolutif. Des tests de validité peuvent être réalisés en ajoutant un terme d'évolution thermique au modèle de convection quasi-stationnaire. *Daly* (1980) dans le cas d'un fluide isovisqueux 2D, et *Christensen* (1985a) pour un fluide à viscosité variable montrent qu'il existe un assez bon accord entre les résultats du modèle évolutif et ceux de la loi paramétrisée. *Labrosse* (1997) montre que pour un modèle 3D avec chauffage mixte, l'évolution de la température prévue par la paramétrisation et celle qui est issue de l'évolution temporelle ont la même forme générale, bien qu'étant systématiquement décalées de 0,6%. Mais récemment, à l'aide d'un modèle 3D à viscosité variable et chauffage interne, *Choblet et Sotin* (1997) suggère qu'une paramétrisation quasi-stationnaire est inadéquate pour modéliser les expériences analogiques de *Davaille et Jaupart* (1993).

La formation et l'évolution des continents contribuent à la variation de la concentration en éléments radioactifs du manteau supérieur. *Spohn et Breuer* (1993) construisent un modèle d'évolution continentale pour tenir compte de cet effet. Après leur formation, les continents jouent le rôle d'isolant et réduisent les pertes de chaleur. D'après *Spohn et Breuer* (1993), une modification de (1-1) et de petites valeurs de β ne sont alors pas nécessaires pour expliquer de petits nombres d'Urey. Le choix du facteur d'enrichissement crustal reste cependant discutable : il est directement proportionnel à la vitesse maximale de convection en surface. Cette quantité est déduite d'une paramétrisation isovisqueuse, mais elle est fortement réduite dans le cas d'un fluide à viscosité variable.

Il existe peu de modèles prenant en compte la formation de la graine et le refroidissement du noyau. *Stevenson et al.* (1983) partent d'un noyau initialement fondu et supposent que la convection du manteau s'organise en une seule couche. La chaleur est évacuée à travers une coquille sphérique, suivant l'équation (1-2). La température à la base du manteau est recalculée à chaque instant et sert de point de départ pour définir un profil thermique adiabatique dans le noyau. L'intersection du profil adiabatique avec la courbe de solidus détermine le rayon de la graine. *Stevenson et al.* (1983) trouvent un flux de chaleur final comparable à celui de la Terre aujourd'hui, mais leur valeur de la production de chaleur initiale est surestimée. *Labrosse* (1997) considère également un manteau global, mais utilise des lois paramétrisées modifiées en fonction du chauffage interne et de la sphéricité. Dans ce modèle, la cristallisation de la graine débute il y a 1,5 Ga, et le flux chaleur en surface actuel est de l'ordre de 26 TW. Un flux plus proche de la valeur observée est obtenu en surestimant la concentration en radioéléments communément admise par les géochimistes (*Jochum et al.*, 1983).

Jusqu'à présent, les modèles d'évolution thermique ont surestimé le refroidissement de la Terre. Les prochains modèles devront inclure un (ou plusieurs) élément(s) capable(s) de ralentir la perte de chaleur. Les candidats ne manquent pas. Quelle est, par exemple, l'influence des continents? Ils forment en surface une couverture partiellement isolante, mais qui reste difficile à modéliser à cause de l'histoire mouvementée de la croûte terrestre. La stratification du manteau en deux couches est également une voie à étudier. Une étude préliminaire de *Spohn et Schubert* (1982) montre qu'une convection en deux couches libère 3 fois moins de chaleur qu'un manteau global, le manteau supérieur jouant un rôle d'isolant pour le manteau inférieur. Enfin, la rhéologie, ou plus modestement les variations de viscosité avec la température, diminuent notablement l'efficacité du transport convectif. C'est probablement une combinaison de ces trois éléments qui permettra d'affiner les modèles de refroidissement.

1.1.2 - Les observations géophysiques et la modélisation numérique.

- *Les premières preuves de la convection.* Si la convection du manteau est nécessaire pour comprendre le refroidissement de la Terre, elle est également vérifiée par un ensemble d'observations géophysiques. En 1912, Wegener met en évidence la dérive des continents. L'idée (publiée en anglais seulement en 1924) est mal acceptée, en partie parce qu'il manque un moteur. En fait, Wegener invoquait des forces dérivées de la rotation de la Terre, hypothèse peu crédible si l'on considère la masse continentale à déplacer. Mais pour *Holmes* (1945), c'est un mouvement

de convection dans le manteau qui permet d'entretenir le mouvement des plaques en surface (auparavant, en 1929, Holmes avait imaginé que les chaînes de montagne résultaient de collisions océans/continents, avec pour conséquence la formation de roches plus denses qui, en s'enfonçant dans le manteau, tirent par la même occasion les plaques océaniques).

A partir de 1960, la tectonique des plaques apparaît comme la meilleure explication des variations du champ magnétique fossile enregistré par les roches des planchers océaniques (*Runcorn, 1962; Vine et Matthews, 1963*) et de la distribution de la sismicité mondiale (*Isacks et al., 1968*). La convection est de nouveau mise en avant comme moteur de la tectonique des plaques. *Runcorn (1962)* montre que la théorie de Rayleigh-Bénard est tout à fait applicable au manteau terrestre, pourvu que la viscosité du manteau n'excède pas 10^{25} à 10^{26} Pa.s. D'après les premières estimations de *Haskell (1935, 1936)*, c'est à priori le cas. Dans cette hypothèse, c'est le courant ascendant qui apporte naturellement du matériau nouveau au niveau des dorsales (à l'inverse, notons que les Gaulois craignaient que le ciel ne leur tombe sur la tête, p.e. *Gosciny et Uderzo, 1961*). Toujours dans l'hypothèse d'un manteau en convection, *Wilson (1963)* apporte une explication au volcanisme intraplaque (par exemple celui des îles Hawaï) : une source magmatique issue du manteau profond et fixe par rapport à l'écoulement, se manifeste en surface par la formation d'une chaîne volcanique (fig. 1-3). Il montre par ailleurs que la vitesse des cellules de convection est nécessairement non-uniforme (l'écoulement devenant moins rapide dans le coeur de la cellule).

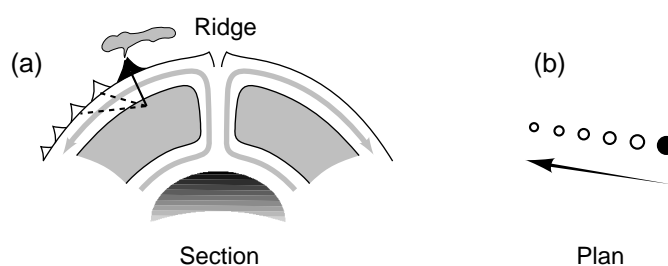


Figure 1-3. La formation de chaînes volcaniques intraplaques, d'après *Wilson (1963)*.
(a) Coupe du manteau. (b) Trace de la chaîne volcanique en surface.

- *Les premiers modèles numériques.* Parallèlement, des efforts (aussi bien analogiques que numériques) sont entrepris pour mieux appréhender les schémas de convection possibles (*Busse, 1967a; Krishnamurti, 1970a,b; Busse et Whitehead, 1971*). *Turcotte et Oxburgh (1967)* donnent une description théorique du problème de Rayleigh-Bénard 2D, et en particulier une paramétrisation du flux de chaleur (Φ) et de la vitesse horizontale en surface (U_{surf}),

$$\Phi = 0,167 \frac{\kappa \Delta T}{b} \text{Ra}^{1/3}$$

$$U_{\text{surf}} = 0,142 \frac{\kappa}{b} \text{Ra}^{2/3}$$
(1-3)

où κ est la diffusivité thermique du fluide. Pour des nombres de Rayleigh ‘terrestres’, ces expressions conduisent à des valeurs du même ordre de grandeur que ce qui est observé à la surface de la Terre. L'un des premiers modèle numérique à nombre de Prandtl (cette quantité sera définie dans le §1.2.2) infini est proposé par *McKenzie et al.* (1974). Ils considèrent un fluide isovisqueux 2D, et plusieurs types de chauffage. A partir des distributions de température et de vitesse, ils calculent les anomalies de géoïde, la topographie de surface et le flux de chaleur. Dans les grandes lignes, ce modèle rend qualitativement compte de certaines caractéristiques observées sur Terre. Par exemple, l'aplomb du panache chaud est caractérisé par un bombement de la surface et une anomalie positive de géoïde.

- *Tomographie sismique et géoïde.* La convection prévoit un manteau thermiquement hétérogène. La tomographie sismique et l'étude du géoïde donnent respectivement accès aux distributions des anomalies de vitesse sismique et de densité. Elles permettent aussi des hypothèses sur le mode de convection dont le manteau est le siège.

Les modèles tomographiques calculent des anomalies de vitesse de propagation des ondes sismiques par rapport à un profil moyen. En toute première approximation, les zones plus lentes sont associées à des zones plus chaudes, et inversement. Les modèles globaux (voir *Li et Romanowicz* (1996) pour un modèle récent) montrent que la Terre profonde (depuis le sommet du noyau, jusque vers 1000 km de profondeur) est dominée par le degré 2 (grandes longueurs d'onde). Deux minimums de vitesses sont observés, l'un centré sur l'ouest du Pacifique, l'autre sur l'Atlantique. Plus près de la surface, les anomalies de vitesse sont bien corrélées avec la tectonique des plaques. Les rides océaniques sont caractérisées par des anomalies négatives de vitesse élevées (-4% et plus) jusqu'à 150 km de profondeur. Ces zones lentes ont une extension latérale de l'ordre de 1000 km. Des racines rapides sous les continents et des zones plus lentes sous les océans sont présentes jusque vers 250 km de profondeur. Les racines continentales s'estompent entre 250 et 450 km. Dans l'intervalle 350-450 km, une zone étendue de faibles vitesses apparaît sous le Pacifique central, mais pas sous l'Atlantique. Ainsi, dans la moitié inférieure du manteau supérieur (350-670 km), le Pacifique est globalement plus lent que l'Atlantique.

Les zones de subduction sont également bien visibles sur des études localisées (p.e. *Fukao et al.*, 1992). En revanche, les courants ascendants ne sont pas clairement mis en évidence. Etant données les limites des modèles tomographiques, il est difficile de conclure quant à l'existence de ces courants. En effet, la résolution latérale actuelle des modèles est de l'ordre de quelques milliers de kilomètres, alors que les courants ascendants recherchés n'ont que quelques centaines de kilomètres de largeur. Des anomalies de vitesse peuvent donc passer inaperçues. D'autre part, la répartition des séismes et des stations d'enregistrement à la surface du globe est inégale, si bien que les modèles d'ondes de volume échantillonnent assez mal le manteau supérieur sous les océans (p.e. *Inoue et al.*, 1990). L'interprétation des modèles tomographiques se heurte à deux problèmes majeurs: d'une part, les variations de vitesse sismique ne dépendent pas que de la température, mais également de la composition chimique et de la minéralogie; d'autre part, une partie des hétérogénéités latérales attribuées au manteau profond peut être due à des effets lithosphériques (*Ricard et al.*, 1996). Par contre, les modèles sismiques anisotropes construits à partir des ondes de surface mettent en évidence un excès d'anisotropie verticale sous les dorsales (*Montagner et Tanimoto*, 1991), indice d'un courant ascendant dans le manteau supérieur.

Le géoïde est l'équipotentielle de gravité dessinée par le niveau moyen des mers. Les variations du géoïde, après correction de la topographie régionale et locale, reflètent les anomalies de densité en profondeur. Tout comme dans les modèles tomographiques, le degré 2 du géoïde domine la Terre profonde, les anomalies de vitesse sismique et du géoïde étant par ailleurs bien corrélées (*Cazenave et al.*, 1989). Le spectre de puissance du géoïde synthétique calculé à partir du modèle tomographique de *Li et Romanowicz* (1996) est corrélé à 80% avec le spectre du géoïde observé jusqu'à l'ordre 12. Les bosses du géoïde à grandes longueurs d'onde coïncident avec les zones de vitesses sismique lentes, et sont associées à un courant montant. Ce courant ascendant devrait créer une topographie dynamique positive, c'est-à-dire une légère surélévation de la surface. Une fois corrigée des reliefs dominants (reliefs continentaux et effondrement des planchers océaniques) la topographie fait effectivement apparaître deux bombements en bon accord avec les anomalies positives du géoïde (*Cazenave et al.*, 1989). Les caractéristiques du géoïde et de la topographie dynamique témoignent, avec la tomographie sismique de la Terre profonde, de la circulation convective à grande échelle du manteau terrestre. Le géoïde met également en évidence un excès de masse au niveau des zones de subduction. Ces anomalies sont interprétés comme des courants froids et descendant. En revanche, aucune anomalie qui pourrait être la signature d'une racine chaude n'est observée à l'aplomb des dorsales.

En s'éloignant de la dorsale, les roches se refroidissent, deviennent plus denses et ont tendance à s'affaisser. Un refroidissement purement conductif de la croûte prévoit une bathymétrie en $1/\sqrt{x}$ (Parsons et Sclater, 1977). Cependant, au delà d'une distance d'environ 1000 km, la topographie de la croûte océanique est systématiquement surélevée par rapport à la bathymétrie attendue. Pour expliquer cet écart, il a été proposé l'existence d'une convection à petite échelle (Davaille et Jaupart, 1994), induite par le développement d'instabilités à partir de la base de la couche limite d'un fluide à viscosité variable. Le surplus de chaleur ramené en surface crée une topographie positive et réchauffe les planchers océaniques, s'opposant momentanément à leur affaissement. Cet aplatissement lithosphérique, et l'apport de chaleur qu'il implique, est compatible avec le géoïde aux longueurs d'onde moyennes (~1000 km) (Doin et al., 1996). Une convection à petite échelle a également été invoquée pour rendre compte des anomalies de gravité de petite longueur d'onde (~200 km) observées au dessus du Pacifique (Haxby et Weissel, 1986) : une série de petits rouleaux, tels que ceux observés expérimentalement par Richter et Parsons (1975) pourrait expliquer ces structures. Il existe cependant une alternative à la convection à petite échelle : la lithosphère océanique, soumise à de fortes contraintes, se déformerait en surface selon un phénomène de boudinage (Winterer et Sandwell, 1987).

- *Modèles numériques plus récents.* Les modèles numériques, aidés par l'accroissement de la puissance de calcul, ont naturellement cherché à rendre compte de ces observations. L'accent à d'abord été mis sur les variations de viscosité, afin de tenir compte de la rhéologie du manteau. La viscosité de l'olivine dépend très fortement de la température. Une loi de viscosité dépendant exponentiellement de la température a été introduite dans les modèles 2D cartésiens (Christensen, 1984a) puis 3D cartésiens (Christensen et Harder, 1991; Ogawa et al., 1991) et 3D sphériques (Ratcliff et al., 1995). Le modèle de Christensen (1984a) couvre une gamme de nombres de Rayleigh et de contrastes de viscosité assez large (respectivement $10^4 \leq Ra \leq 10^7$ et $1,0 \leq \Delta\mu \leq 2,5 \times 10^5$), mais il ne propose pas de paramétrisation du nombre de Nusselt. Dans les calculs de Christensen et Harder (1991), le contraste de viscosité reste assez modeste: au mieux, il est égal à 1000. Ogawa et al. (1991) atteignent des contrastes plus élevés (jusqu'à $\Delta\mu = 3,2 \times 10^4$), mais pour des nombres de Rayleigh relativement modestes. Pour les cas $\Delta\mu = 3,2 \times 10^4$, le nombre de Rayleigh est au maximum de $2,0 \times 10^4$. Enfin, Ratcliff et al. (1995) se limitent à un seul jeu de paramètre, $\Delta\mu = 1000$ et $Ra = 10^5$. Des modèles adoptant des rhéologies

plus complexes et réalistes ont également été proposés (p.e. *Christensen*, 1985a), et l'on cherche actuellement à modéliser le comportement partiellement non-newtonien de la lithosphère.

Les transitions de phases sont également susceptibles de modifier le transfert thermique. Une transition exothermique (c'est par exemple le cas des transitions olivine→ β -spinelles et β -spinelles→ γ -spinelles) accroît localement la température et affaiblit l'advection de la chaleur. La transition à 670 km (γ -spinelles→pérovskite) est endothermique, ce qui devrait, en principe, faciliter l'arrêt des plaques subductées. Un effort particulier a été entrepris pour comprendre cette transition et l'intégrer dans les modèles numériques, cherchant par là à trancher la question d'une convection en une ou deux couches. La nature endothermique de la transition à 670 km ne constitue pas un obstacle insurmontable: si la pente du Clapeyron est inférieure en valeur absolue à une valeur critique Γ_c , le slab peut franchir la transition de phase. Avec un modèle rhéologique à viscosité constante, *Christensen et Yuen* (1985) ont estimé Γ_c . La convection s'organise en deux couches distinctes pour des Clapeyron supérieurs à $-4,0$ à $-8,0$ MPa/K, Γ_c diminuant lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Autour de cette limite, le schéma convectif oscille entre un système à une et deux couches. En géométrie axisymétrique, *Machetel et Weber* (1991) abaissent cette limite à $-2,0 \geq \Gamma_c \geq -4,0$ MPa/K. Cette fourchette est proche des valeurs expérimentales de la pente de Clapeyron de la transition γ -spinelles→pérovskite obtenues récemment: *Ito et al.* (1990) donnent $4,0 \pm 2,0$ et *Bina et Hellfrich* (1994) $-2,0 \pm 0,1$. Enfin, le modèle 3D sphérique de *Tackley et al.* (1993) observe directement des effets d'avalanche pour une pente $\Gamma = -4,0$ MPa/K, les panaches froids étant stockés au niveau de la frontière des 670 km et la traversant occasionnellement.

Un modèle réaliste de Terre doit prendre ces effets en compte plus d'autres comme la géométrie, le chauffage interne et la présence et le mouvement de plaques. Dans un premier temps, il n'est cependant pas évident que la prise en compte simultanée de tous ces paramètres constitue un progrès important, car il devient alors difficile de distinguer l'influence relative de chaque paramètre. Il est difficile d'en déduire une loi de transfert de la chaleur permettant de décrire l'histoire thermique de la Terre. Finalement, peu d'études proposent des systématiques portant sur l'un ou l'autre de ces paramètres, et seules des valeurs terrestres des paramètres sont considérés. L'introduction de chacun de ces paramètres constitue en soi un problème numérique qui n'est pas toujours évident à résoudre. Pour faire converger les calculs, les valeurs des paramètres résultent de compromis qui ne sont pas représentatifs des valeurs terrestres.

1.1.3 - Couplage tectonique des plaques-convection.

La transition entre lithosphère et asthénosphère n'est pas un problème simple. En dehors du fait que l'on peut définir différents types de lithosphère (thermique, rhéologique et sismologique, ainsi que le proposent *Anderson et Minster* (1980)), il est important, pour la dynamique du manteau, de savoir si la lithosphère et l'asthénosphère sont mécaniquement couplées ou non.

Vers 50-150 km de profondeur (selon les régions), la vitesse des ondes de cisaillement diminue d'environ 10%. Cette zone de faible vitesse (low velocity zone, LVZ) est également caractérisée par une forte atténuation des ondes sismiques. Ces deux observations s'expliquent bien si l'on admet que la LVZ correspond à une zone de fusion partielle, donc localement chaude. Dans ce cas, elle est également peu visqueuse, si bien qu'elle pourrait jouer le rôle de lubrifiant entre la lithosphère et l'asthénosphère. *Anderson et Minster* (1980) montrent que l'arcage de dislocations dans le plan de glissement est aussi une solution tout à fait satisfaisante. Les dislocations sont des défauts du réseau cristallin. Soumises à de faibles contraintes, elles peuvent se courber. Cette déformation a un temps de relaxation de l'ordre de la période des ondes sismiques, et elle induit une diminution du module de cisaillement de 8% (soit 10% en vitesse de cisaillement).

Dans le cas où il existe effectivement un couplage (même partiel), la convection thermique est-elle le seul moteur de la tectonique des plaques? Suivant ce point de vu, du matériau chaud est advecté à l'aplomb des dorsales, affaiblissant et amincissant localement la croûte. Puis, l'écoulement superficiel de l'asthénosphère entraîne les planchers océaniques vers les zones de subductions. Une observation simple suggère que les zones de subduction jouent en effet un rôle important dans la tectonique des plaques. L'ouverture du Pacifique, entouré de zones de subduction est plus rapide que celle de l'Atlantique qui est limité par des continents. *Hager et O'Connell* (1981) montrent que la traction exercée par le plongement des slabs dans les zones de subductions suffit à expliquer les vitesses des plaques observées. Pour autant, la subduction constitue-t-elle le moteur principal de la convection? Par exemple, on peut imaginer que la circulation dans le manteau supérieur résulte de courants de retour, induits par l'écrasement des slabs à la base du manteau. Une solution intermédiaire ne doit pas être exclue : il existe bien une circulation à l'échelle globale, mais la lithosphère est elle entraînée par le seul plongement des plaques. Dans ce schéma, la tectonique des plaques donne un coup de pouce à la circulation asthénosphérique.

1.1.4 - Convection en une ou deux couches?

La question d'une convection globale ou en deux couches du manteau terrestre reste ouverte. Sur ce point, l'ensemble des domaines des sciences de la Terre apporte des arguments contradictoires.

Les études géochimiques plaident en faveur d'une convection en deux couches. L'analyse du rapport $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Nd}$ dans les basaltes de rides océaniques (MORB) et des îles océaniques (OIB) impliquent l'existence de deux réservoirs (p.e. *Jacobsen et Wasserburg, 1979*) : un manteau supérieur appauvri, et un manteau inférieur primitif. Par rapport aux MORB, les OIB sont également enrichis en gaz rares (en particulier ^3He), signe qu'ils proviennent d'un réservoir peu dégazé. Plus récemment, *Allègre et al. (1996)* déduisent de la quantité de ^{40}Ar présente dans l'atmosphère, que seulement 50% du manteau est dégazé. Pour autant, la géochimie ne prévoit pas un isolement parfait entre les deux manteaux. De toute façon, l'origine profonde des OIB montre que la frontière des 670 km n'est pas complètement imperméable.

La cessation de l'activité sismique vers 700 km a longtemps été mise en avant comme la preuve d'une convection en deux couches : les slabs sont stoppés à la limite des 670 km et glissent le long de cette frontière. Deux arguments soutiennent cette vision des choses : d'une part la différence de composition chimique entre le manteau inférieur (pérovskite) plus dense, et les slabs; et la transition de phase endothermique d'autre part. Les modèles numériques ont montré que ce dernier point ne constituait pas une barrière absolue au franchissement des slabs. Les progrès récents en tomographie sismique permettent d'obtenir une meilleure définition des slabs et de leur devenir à 670 km (*Fukao et al., 1992*). Ce genre de modèle met en évidence un étalement horizontal du slab soit directement à 670 km (cas de la fosse des Kouriles et d'Izu-Bonin) soit après avoir traversé cette limite, à des profondeurs de l'ordre de 1200 km (arc de Java). Mais en d'autres endroits, le slab accumulé semble plonger beaucoup plus profondément dans le manteau inférieur (*Van der Hilst et al., 1997*). On parle d'effet d'"avalanche" : épisodiquement, du matériau du manteau supérieur franchit la limite des 670 km. La sismologie, comme la géochimie, semble indiquer une convection en deux couches, modulée par des échanges ponctuels entre le manteau supérieur et le manteau inférieur.

Le modèle à deux couches implique la présence d'une couche limite thermique à la base du manteau supérieur. Celle-ci devrait induire une chute du gradient de vitesse sismique. Cependant, les profils moyens des modèles de références, par exemple ceux du modèle ak135 de *Kennett et al. (1995)*, ne s'infléchissent pas à l'approche de la limite des 670 km. Mais comme on le verra dans le chapitre 4, la prise en compte de la viscosité variable dans les modèles numériques de

convection réduit significativement l'amplitude de la couche limite thermique du bas. Celle-ci devient alors indiscernable sur les profils sismiques synthétiques.

On se dirige ainsi de plus en plus vers une solution mixte: le manteau supérieur et le manteau inférieur convectent séparément, mais les deux couches ne sont pas complètement imperméables: localement, et par intermittence, il peut se produire des transferts de matière entre les deux manteaux (les avalanches et les points chauds). Une alternative originale, basée sur l'étude des anomalies d'anisotropie sismique, a été proposée par *Montagner et Tanimoto* (1991). Dans le manteau supérieur, la convection est dominée par la tectonique des plaques. Elle interagit dans la zone de transition avec une circulation plus globale qui domine la dynamique du manteau depuis le sommet du noyau jusqu'à 450 km de profondeur.

Si la convection dans le manteau terrestre ne fait plus aucun doute, certains paramètres, et tout particulièrement les variations de viscosité, ne sont pas encore bien maîtrisés. Une meilleure compréhension de l'influence exercée par ces paramètres devrait profiter aux modèles de refroidissement de la Terre. En revanche deux hypothèses concernant la structure et la dynamique de la convection semblent aujourd'hui bien étayées: la convection séparée des manteaux supérieur et inférieur, modulée par les avalanches et les points chauds; et le rôle actif de la tectonique des plaques (slab pull) dans la convection du manteau supérieur. Ces hypothèses, réduites à la convection dans le manteau supérieur uniquement, seront reprises dans le chapitre consacré aux applications terrestres.

1.2 - Convection thermique.

1.2.1 - Instabilité de Rayleigh-Bénard. Convection thermique.

Le phénomène de convection est généré par le développement d'instabilités dans un milieu initialement stable, auquel on superpose à un instant donné une petite perturbation. La nature de la perturbation n'est pas unique, mais conduit à différents types de convection: vitesse angulaire de rotation (instabilité de Taylor-Couette), densité, température. Dans ces deux derniers cas, le moteur de la convection est la poussée d'Archimède.

Le convection dite de Rayleigh-Bénard correspond au cas, simple en principe, d'un fluide compris entre deux plaques horizontales, portées à des températures différentes (fig. 1-4). Si la température à la base T_1 est supérieure à la température de surface T_0 , et lorsque $\Delta T = T_1 - T_0$ dépasse un certain seuil, un mouvement de matière se développe. Une partie du fluide, rendue

moins dense par les perturbations de température, remonte en surface, y relâche son surplus de chaleur, puis replonge. Il existe deux principaux freins au développement des instabilités ainsi initiées: la diffusion thermique, qui tend à homogénéiser la température des particules ascendantes avec le reste du milieu; et la viscosité qui augmente les forces de frottement. La capacité de la convection à surmonter ces difficultés est exprimée à l'aide de nombres sans dimensions, eux-mêmes définis à partir des propriétés physiques et géométriques du système.

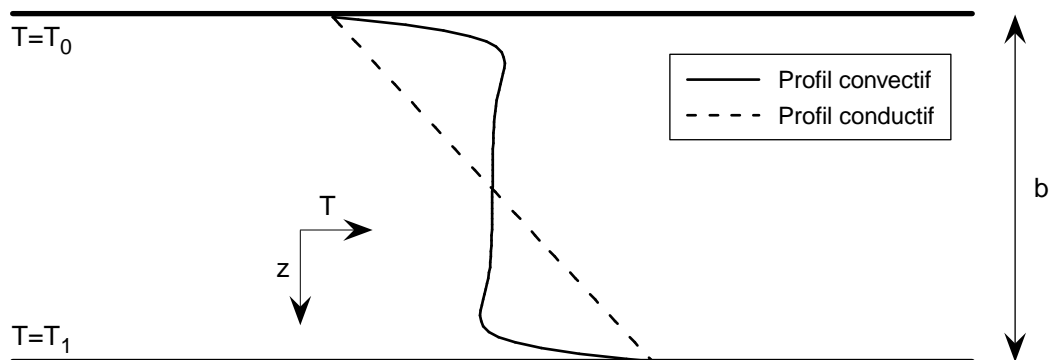


Figure 1-4. Dispositif de Rayleigh-Bénard.

Dans son mouvement, chaque particule de fluide transporte une certaine quantité de chaleur. La convection constitue ainsi une alternative au transport conductif de la chaleur, lorsque la diffusivité thermique du fluide est trop petite. La transition entre un transfert purement convectif et un transfert purement conductif de la chaleur s'effectue dans une zone de petite épaisseur (en comparaison avec les dimensions de la cellule), la couche limite thermique. Une couche limite thermique va se développer lorsque l'interface entre deux milieux (eux mêmes thermiquement homogènes) est caractérisée par une forte discontinuité de température. Ainsi, même si les gradients thermiques peuvent rester élevés, la couche limite thermique assure une transition thermique plus douce. Les couches limites contrôlent le flux de chaleur (entrant ou sortant), et le développement des instabilités, et il est donc important d'en avoir une bonne description.

1.2.2 - Nombres caractéristiques.

- *Nombre de Rayleigh.* C'est le rapport entre les forces motrices du fluide (force d'Archimède) et les forces de frottement. L'analyse de stabilité linéaire conduit à définir un nombre de Rayleigh critique, Ra_c , en dessous duquel les instabilités induites par les perturbations thermiques

s'amortissent. L'expression du nombre de Rayleigh dépend du type de chauffage imposé, et s'exprime en fonction des grandeurs caractéristiques du système:

$$\text{chauffage par le bas (Rayleigh-Bénard), } Ra = \frac{\rho_0 g \alpha_v \delta T b^3}{\mu \kappa}; \quad (1-3)$$

$$\text{chauffage interne (Rayleigh-Roberts), } Ra_H = \frac{\rho_0^2 g \alpha_v H b^5}{\kappa \mu}, \quad (1-4)$$

où ρ_0 est la densité moyenne, g l'accélération de la gravité, α_v le coefficient d'expansion thermique, δT la différence de température entre la base et la surface, H le taux de chauffage interne, b la hauteur du système, μ la viscosité, k et κ étant respectivement la conductivité et la diffusivité thermique. Dans le cas du manteau supérieur terrestre ($\rho_0=3500 \text{ kg/m}^3$, $g=9,81 \text{ m/s}^2$, $\alpha_v=2,4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\delta T=1600 \text{ K}$, $H=6,0 \times 10^{-12} \text{ W/kg}$, $b=660 \text{ km}$, $\mu=10^{21} \text{ Pa.s}$, $k=3,0 \text{ W/m/K}$ et $\kappa=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), l'application numérique donne $Ra \sim 3,8 \times 10^5$ et $Ra_H \sim 7,2 \times 10^5$. Ces valeurs sont très supérieures au nombre de Rayleigh critique, et font de la convection un bon candidat pour l'évacuation de l'énergie stockée dans les planètes telluriques.

- *Nombre de Prandtl.* Le nombre de Prandtl est le rapport du temps caractéristique de la diffusion thermique sur le temps caractéristique de la diffusion de la quantité de mouvement: $Pr = \nu/\kappa$, où κ est la diffusivité thermique et ν la viscosité dynamique: $\nu = \mu/\rho$. Il est d'autant plus élevé que la diffusion de la quantité de mouvement est plus efficace que la diffusion de la chaleur. Le nombre de Prandtl peut ainsi prendre des valeurs très variées, selon le phénomène physique et le matériau qui entrent en jeu. En choisissant pour μ et κ des valeurs proches de celles de la Terre ($\rho=3500 \text{ kg/m}^3$, $\mu=10^{21} \text{ Pa.s}$ et $\kappa=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), l'application numérique donne $Pr=3,5 \times 10^{24}$. Les expériences analogiques utilisent des fluides dont le nombre de Prandtl est nettement plus faible. Quant aux études numériques, elles imposent en général un nombre de Prandtl infini, ce qui permet de négliger l'accélération du fluide.

- *Nombre de Nusselt.* Dans la convection de Rayleigh-Bénard, le bilan énergétique à une profondeur donnée fait intervenir le flux de chaleur moyen à cette profondeur. En l'absence de source de chaleur interne, le flux de chaleur moyen est constant sur toute la hauteur du domaine. Ce flux moyen, divisé par le flux conductif (i.e. le flux qui existerait si toute la chaleur était transportée par conduction), est le nombre de Nusselt,

$$Nu = \frac{\bar{q}_{Convec}}{k(T_1 - T_0)/b}. \tag{1-5}$$

Partant de 1 pour un milieu parfaitement conducteur, Nu augmente progressivement lorsque la convection devient plus vigoureuse. Le nombre de Nusselt mesure ainsi l'efficacité relative de la convection dans le refroidissement du milieu. A cet égard, sa valeur n'est pas uniquement contrainte par l'intensité de la convection. Il dépend également de la géométrie du système, et en particulier du rapport entre la largeur et la hauteur de la cellule de convection.

1.2.3 - Domaines de stabilité.

La solution la plus simple du problème de Rayleigh-Bénard est un système de rouleaux contrarotatifs, le nombre de rouleaux étant caractérisé par un nombre d'onde α . Ce régime à l'avantage d'être plan, mais il n'est stable que dans certaines gammes de nombre de Rayleigh et de nombre d'onde. Passé un nombre de Rayleigh seuil, le système bidimensionnel est remplacé par un régime tridimensionnel stationnaire. Pour un nombre de Rayleigh encore plus élevé, la géométrie des cellules devient variable au cours du temps, conduisant à un régime convectif instationnaire.

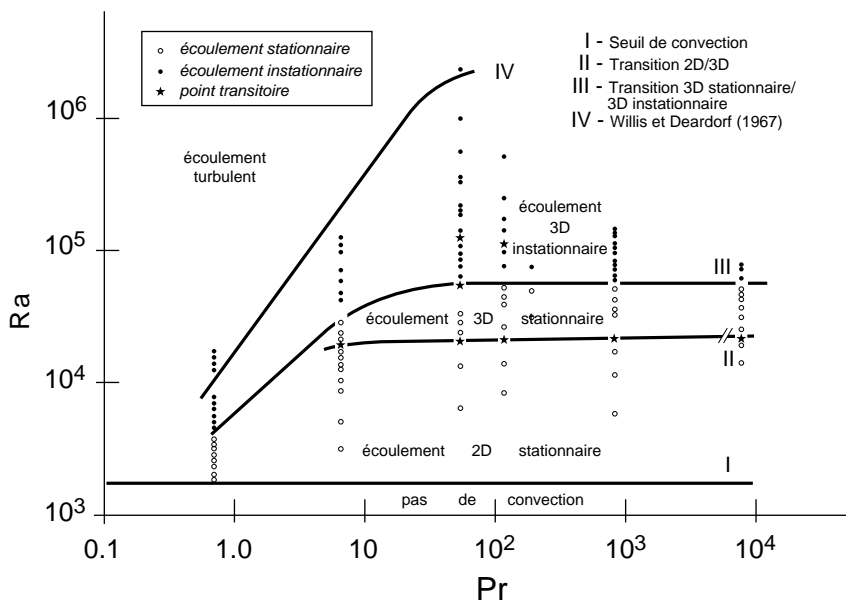


Figure 1-5. Mode de convection dans le plan (Pr,Ra), d'après Krishnamurti (1970b).

Ces transitions ont été étudiées par Willis and Deardorff (1967) et Krishnamurti (1970a,b) (fig. 1-5). Ce dernier note que chaque transition est accompagnée par un changement de pente de la relation flux thermique/nombre de Rayleigh. Par ailleurs, elles sont plus ou moins soumises à la valeur du nombre de Prandtl: une augmentation du nombre de Prandtl retarde le passage entre

les schémas 3D stationnaire et 3D instationnaire (le nombre de Rayleigh seuil est plus élevé) tant que $Pr \leq 50$. En revanche, la transition 2D/3D est peu influencé par le nombre de Prandtl.

Busse (1967a) montre qu'au delà de $Ra \sim 23000$, il n'y a plus de solution plane stable. Busse et Whitehead (1971) précisent numériquement et analytiquement le domaine de stabilité des rouleaux, en fonction de α et Ra (fig. 1-6). Pour des nombres d'onde trop petits, les rouleaux ont tendance à se courber dans le sens de leur longueur. Si α est trop grand, la circulation se réorganise en un système de de rouleaux croisés (i.e. à angle droit du système original), avec un

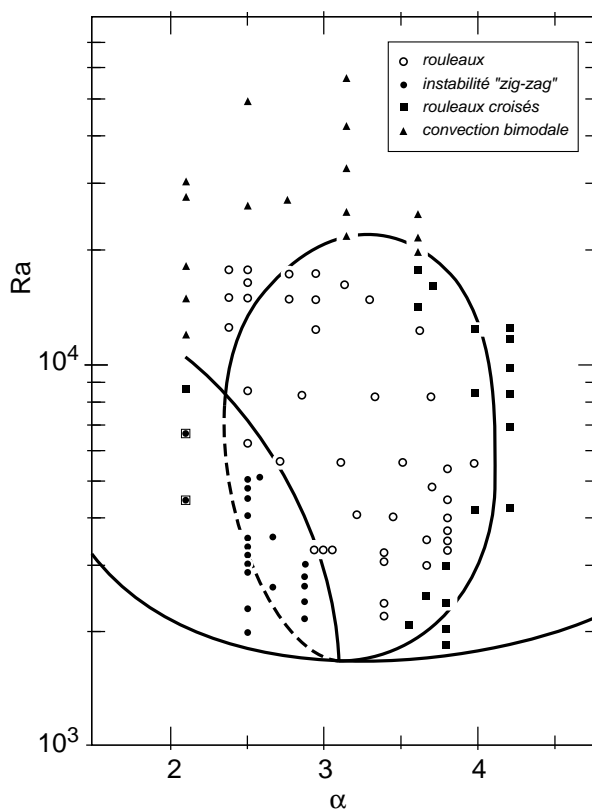


Figure 1-6. Domaine de stabilité des rouleaux, (Busse et Whitehead, 1971).

nombre d'onde plus approprié. Au delà de $Ra=23000$, l'écoulement est caractérisé par une structure 3D 'bimodale', correspondant à la superposition de deux systèmes de rouleaux de nombre d'onde et d'amplitude différentes, perpendiculairement l'un à l'autre. Les calculs de Travis et al. (1990a) étendent le domaine de stabilité des rouleaux 2D jusqu'à $Ra=5 \times 10^5$ (dans la mesure où $\alpha \cdot 2,22$), et dans le cas de conditions aux limites de bords libres, ils précisent l'influence du rapport d'aspect sur la géométrie des cellules. En augmentant progressivement les dimensions latérales, ils observent successivement la formation de cellules carrées, puis hexagonales. Enfin, pour une boîte de rapport géométrique 3,5, les cellules hexagonales deviennent instationnaires.

1.2.4 - Influence d'une viscosité inhomogène.

Les nombres de Rayleigh et de Prandtl contrôlent la dynamique de la convection. Le nombre de Nusselt, lui, est une observable, et on ne l'impose pas à priori. A nombre de Prandtl fixé, seul le nombre de Rayleigh caractérise le problème. Cela reste vrai tant que le milieu est homogène par rapport à certaines grandeurs, comme la viscosité par exemple. L'étude de la convection dans les manteaux planétaires fixe en général un nombre de Prandtl infini, mais fait intervenir des

paramètres supplémentaires: la rhéologie des roches mantélaïres est très sensible aux conditions de température et de pression. Cela se manifeste par de fortes variations de viscosité, qui agissent à leur tour sur la circulation convective. Le modèle analytique de *Busse* (1967b) développe la viscosité en fonction de la température jusqu'au premier ordre. Les perturbations de viscosité prises en compte sont faibles, mais suffisent à modifier la structure de l'écoulement. Par la suite, études théoriques (*Torrance et Turcotte*, 1971), expériences (*Booker*, 1976; *Nataf et Richter*, 1982; *Davaille et Jaupart*, 1993) et calculs numériques 2D (*Foster*, 1969; *Jaupart et Parsons*, 1985; *Moresi et Solomatov*, 1995) et 3D (*Ogawa et al.*, 1991) ont montré qu'un fluide soumis à de fortes variations de viscosité pouvait se séparer en deux couches : un couvercle stagnant (ou quasiment immobile) qui confine la convection dans une sous-couche. *Ogawa et al.* (1991) montrent que cette couche se forme dès que le rapport de viscosité dépasse une valeur critique qui dépend du nombre de Rayleigh de surface, $(\Delta\mu)_c = 1,18 \times 10^3 \cdot Ra_{surf}^{0,309}$. Le transfert de chaleur est également affecté par cette modification structurelle et dynamique. Le couvercle a un comportement purement conductif, et la géométrie de la convection est modifiée. Ces deux points vont dans le sens d'une diminution du transfert thermique convectif.

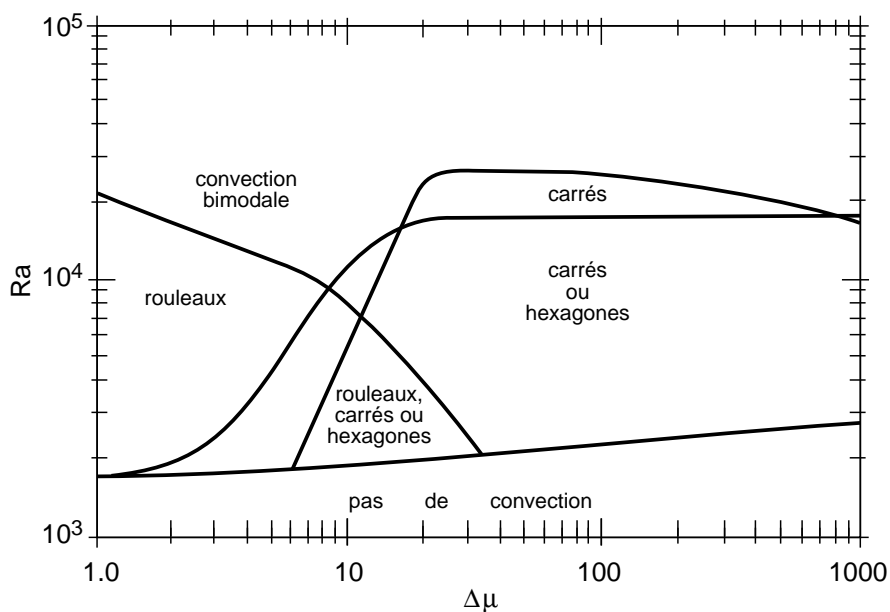


Figure 1-7. Répartitions des modes de convection dans le plan $(\Delta\mu, Ra)$, d'après *White* (1988)

Les expériences de *White* (1988) mettent en évidence les changements de forme des cellules de convection sous l'influence des variations de viscosité. Ces modifications apparaissent dès que le rapport de viscosité est de l'ordre de 10. Elles se caractérisent par l'apparition de nouvelles

structures, telles que des cellules carrées ou hexagonales (fig. 1-7) de petit rapport d'aspect ($r_a \sim 1$). Comme dans le cas isovisqueux, ces structures ne sont plus stables passé un nombre de Rayleigh critique, et sont remplacées par des structures polygonales irrégulières (en étoile) et instationnaires. *White* (1988) estime la valeur de ce seuil autour de 25000, sans la fixer précisément. Le modèle numérique de *Christensen et Harder* (1991) est en bon accord avec ces expériences. Les calculs menés pour $Ra \geq 5 \times 10^4$ montrent une transition vers les structures en étoile. Cette structure est finalement observée dans des boîtes de rapport géométrique élevé.

Les conditions aux limites influencent fortement la structure convective (*Weinstein et Christensen*, 1991). Une surface rigide (c'est le cas de la majorité des expériences analogiques) favorise le développement de structures en étoiles instationnaires quelque soient les variations de viscosité. Notons que ces expériences ont été réalisées pour $Ra = 10^5$ et dans des boîtes de rapport géométrique élevé, ce qui favorise ce type de structure. Inversement, lorsque les contraintes aux limites s'annulent (conditions de 'bord libre'), et que les contrastes de viscosité sont relativement faibles ($\cdot 10^3$), la surface acquiert une plus grande liberté de mouvement. Cela autorise la formation de schémas dendritiques, où la longueur d'onde des cellules augmente. Les calculs de *Tackley* (1993), limités à $\Delta\mu = 10^3$, sont qualitativement en bon accord avec ces observations. Pour des contrastes de viscosité plus élevés, *Ogawa et al.* (1991) retrouvent numériquement des structures carrées et hexagonales. Physiquement, le couvercle stagnant induit par les variations de viscosité semble jouer le rôle d'un bord rigide.

Dans le cas d'une géométrie sphérique, les variations de viscosité sont également amenées à modifier la structure de l'écoulement. Dans un fluide isovisqueux, les panaches froids forment une structure drapaire, tandis que les panaches chauds apparaissent comme de petits cylindres (p.e. *Bercovici et al.*, 1989). Pour $\Delta\mu = 10^3$, les courants descendant s'organisent en larges cylindres (*Ratcliff et al.*, 1995). Sous l'influence de l'augmentation de la viscosité, les panaches ascendants s'étalent à l'approche de la surface et s'interconnectent.

De nombreux modèles numériques imposent des bords libres de contraintes comme condition aux limites. Analogiquement, il est difficile de simuler ce type de conditions. Dans les expériences de *Giannandrea et Christensen* (1993), l'interface entre la surface du fluide et le bloc de refroidissement est une fine couche d'huile silicone de faible viscosité. Les trois autres frontières sont de type rigide (vitesse tangentielle nulle à l'interface). Les résultats s'accordent assez bien avec le modèle de *Christensen et Harder* (1991), et distinguent deux régimes (fig. 1-8) dont l'un est caractéristique d'une convection sous une surface rigide (chute du nombre de Nusselt et de la

vitesse de surface, petit rapport d'aspect). Cependant, ce régime ne correspond pas forcément au régime de couvercle. Le seuil de transition entre les deux régimes est basé sur la valeur du nombre de Rayleigh à la température médiane ($Ra_{1/2}$), qui n'a pas de signification physique précise. Ce choix pose aussi un problème de continuité entre les deux régimes.

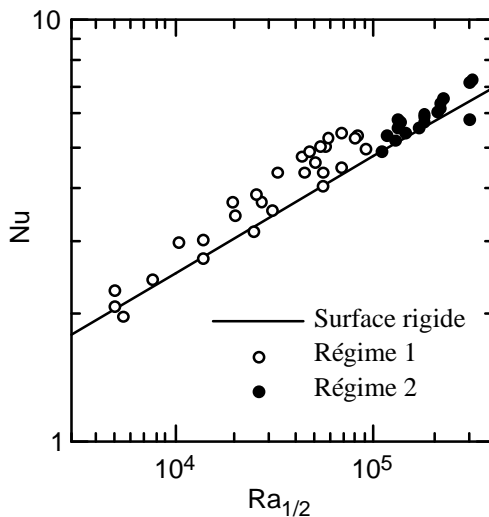


Figure 1-8. Résultats des expériences de *Giannandrea et Christensen* (1992). Deux régimes se distinguent, la transition a lieu pour $Ra_{1/2} \sim 10^5$. La dispersion des points marque une légère dépendance en $\Delta\mu$. Le second régime ($Ra_{1/2} > 10^5$) se rapproche d'une loi obtenue dans le cas d'une surface rigide, également issue des expériences de *Giannandrea et Christensen*.

La diversité des schémas de convections observés lorsque le nombre de Rayleigh, la viscosité, et le rapport d'aspect varient impose l'utilisation de modèles tridimensionnels pour la compréhension de l'écoulement dans les manteaux planétaires. En revanche, les modèles bidimensionnels restent valables pour l'étude des transferts de chaleur et de leurs conséquences (refroidissement des planètes telluriques et croissance de la croûte). Par exemple, la relation entre le flux de chaleur et le nombre de Rayleigh issue des calculs tridimensionnels de *Travis et al.* (1990a) est proche de la loi paramétrisée isovisqueuse de *Schubert et Anderson* (1985).

1.2.5 - Problème 2D isovisqueux: loi paramétrisée.

Il est intuitif de penser que la chaleur est d'autant mieux véhiculée que la convection est forte. Autrement dit, il doit exister une loi strictement croissante reliant le nombre de Nusselt au nombre de Rayleigh. L'un des buts de tout modèle de convection est de déterminer cette loi paramétrisée. Celle-ci est par la suite utilisée pour l'étude de l'évolution thermique des planètes. Une analyse de stabilité linéaire permet de déterminer une expression arithmétique du nombre de Rayleigh critique (Ra_c), et montre que Nu et Ra vérifient une loi de puissance de la forme $Nu = aRa^\beta$ (p.e. *Turcotte and Schubert*, 1982). Ra_c et a dépendent de la géométrie (en particulier du rapport d'aspect de la cellule convective) et des conditions aux limites. Le cas simple d'un fluide isovisqueux avec des conditions limites de bords libres conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} Ra_c = \frac{\pi^4}{r_a^4} (1 + r_a^2)^3 \\ a = \frac{1}{(2\pi^2)^{1/3}} \frac{r_a^{2/3}}{(1 + r_a^4)^{1/3}} \\ \beta = 1/3 \end{array} \right. \quad (1-6)$$

Le rapport d'aspect $r_a = \lambda/2b$ est le rapport entre les dimensions latérale ($\lambda/2$) et verticale (b) de la cellule de convection. On le relie facilement au nombre d'onde α : $\alpha = \pi/r_a$.

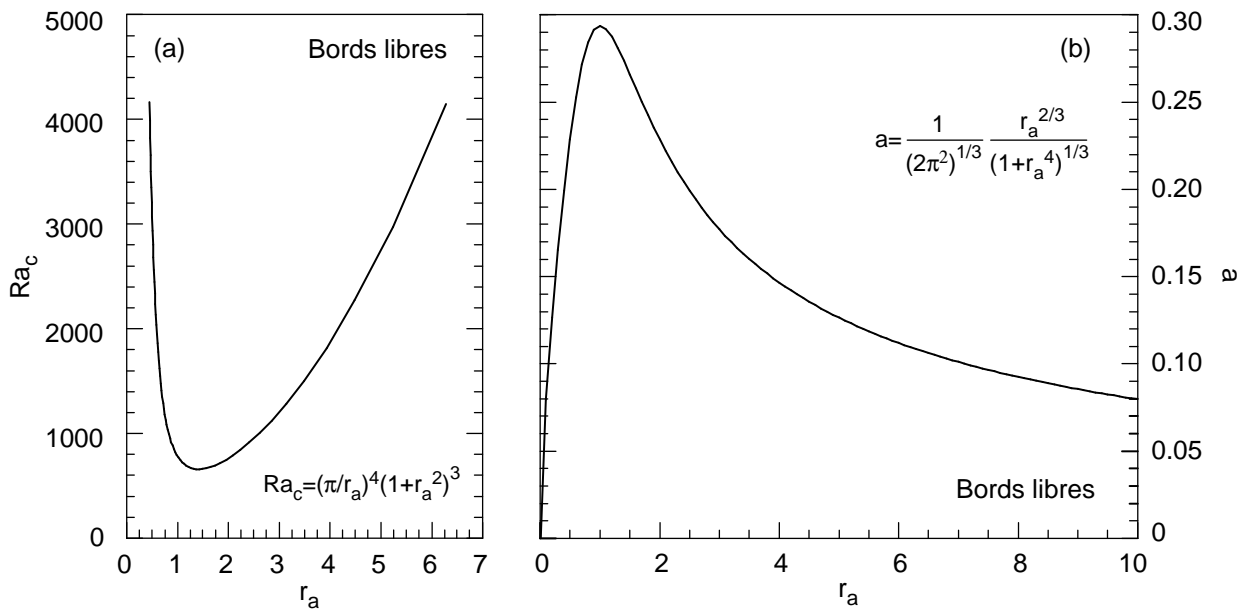


Figure 1-9. Evolution du Rayleigh critique (a) et du paramètre a (b) avec le rapport d'aspect de la cellule de convection, pour des conditions aux limites de bords libres.

Ainsi, le rapport d'aspect (ou le nombre d'onde) est une quantité importante pour caractériser le démarrage et l'efficacité de la convection. La géométrie la plus propice au démarrage de la convection correspond au minimum du nombre de Rayleigh critique en $r_a = \sqrt{2}$ (fig. 1-9a). L'application numérique des relations (1-6) donne $Ra_c=657,5$ et $a=0,273$. En revanche, l'évacuation de la chaleur par convection est maximale pour $r_a=1$ (fig. 1-9b). On a alors $Ra_c=779,3$ et $a=0,294$. Au delà, lorsque le domaine s'élargit, la convection devient moins efficace. L'évolution du nombre de Rayleigh critique montre qu'elle a également plus de mal à démarrer.

Les conditions aux limites influencent également le démarrage de la convection. Les calculs analytiques de *Chandrasekar* (1981) conduisent à un Ra_c plus élevé lorsqu'un bord libre est remplacé par un bord rigide (table 1-1). Cette valeur plus élevée rend compte du fait qu'il faut compenser les contraintes induites par ce bord rigide.

Conditions aux limites	Ra_c
Bords supérieur et inférieur libres	779,3
Bord supérieur rigide, bord inférieur libre	1150
Bords supérieur et inférieur rigides	1708

Table 1-1. Influence des conditions aux limites sur Ra_c dans le cas où $r_a=1$ (*Chandrasekar*, 1981).

La loi de puissance peut également s'exprimer en fonction du nombre de Rayleigh critique,

$$Nu = a' \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad a' = a(Ra_c)^{1/3}.$$

A partir d'une analyse dimensionnelle, *Moore et Weiss* (1973) montrent que l'exposant 1/3 de la loi paramétrisée est parfaitement expliqué dans le cadre d'un modèle de couche limite thermique (*Turcotte and Oxburgh*, 1967). Si la couche limite est suffisamment fine, le rapport entre la hauteur de la cellule de convection (b) et l'épaisseur de la couche limite (δ) est de l'ordre de grandeur du nombre de Nusselt et de la racine cubique du nombre de Rayleigh,

$$Nu \sim b/\delta \sim Ra^{1/3}.$$

La détermination expérimentale de la loi paramétrisée a fait l'objet de nombreuses études, aussi bien analogiques que numériques. Les résultats obtenus pour des conditions limites de bords libres sont en bon accord avec l'analyse de stabilité linéaire (table 1-2). On notera que les conditions limites expérimentales sont systématiquement des conditions de bord rigide (no-slip), tandis que les lois numériques rapportées dans cette table admettent des conditions limites de bords libre.

Un premier test du modèle numérique développé dans ce travail (chapitre 2) est de comparer la loi paramétrisée isovisqueuse qu'il prédit avec les résultats de précédentes études. Les valeurs ainsi trouvées, $a=0,258$ et $\beta=0,321$, sont en bon accord avec ces précédents travaux (fig. 1-10, table 1-2). La finesse du maillage vertical reste un point délicat pour la détermination de cette loi paramétrisée. Il faut un nombre de points minimum pour définir correctement les couches limites thermiques (cf chapitre 2, §2.4.6). L'ajustement de la figure 1-10 est déterminé à partir de calculs pour lesquels au moins 3 points du profil vertical moyen tombent dans la couche limite.

Référence	Ra	a	β	Observations
Etudes analytiques				
<i>Turcotte et Oxburgh, 1967</i>	-	0,167	1/3	
Analyse de stabilité linéaire (p.e. <i>Turcotte et Schubert, 1982</i>)	-	0,273 0,294	1/3 1/3	$r_a = \sqrt{2}$ $r_a = 1,0$
Etudes expérimentales				
<i>Rosby, 1969</i>	4000-3×10 ⁶ 3,4×10 ⁴ -3×10 ⁶	0,184 0,131	0,281 0,300	Pr=200 (silicone) Pr=6,8 (eau)
<i>Somerscale et Gazda, 1969</i>	7,4×10 ⁵ -3,2×10 ⁸	0,196	0,283	Pr=6 et 18 (silicone)
<i>Chu et Goldstein, 1973</i>	2,8×10 ⁵ -1,1×10 ⁸	0,183	0,278	5,5≤Pr≤6,5 (eau)
<i>Garon et Goldstein, 1973</i>	1,3×10 ⁷ -3,3×10 ⁹	0,130	0,293	Pr~5,5 (eau)
Etudes numériques				
<i>Moore et Weiss, 1973</i>	3000-3×10 ⁴ 4×10 ⁴ -8×10 ⁵	0,225 0,158	1/3 0,365	$r_a = \sqrt{2}$ Pr=6,8 $r_a = 1,0$ Pr=6,8
<i>Jarvis et Peltier, 1982</i>	4×10 ⁴ -8×10 ⁶	0,279	0,313	$r_a = 1,0$
<i>Christensen, 1984a</i>	10 ⁴ -10 ⁷	0,2697	0,3185	$r_a = 1,0$
<i>Schubert et Anderson, 1985</i>	8×10 ⁴ -8×10 ⁷	0,268	0,319	$r_a = 1,0$
<i>Hansen et Yuen, 1993</i>	10 ⁴ -10 ¹¹	0,250	0,323	$r_a = 1,0$
Cette étude	10 ⁴ -10 ⁶	0,258	0,321	$r_a = 1,0$

Table 1-2. Loi paramétrisée $Nu=f(Ra)$ pour un fluide isovisqueux chauffé par le bas, déduites de travaux théoriques, expérimentaux et numériques. Les lois numériques sont à nombre de Prandtl infini, sauf indication contraire.

L'analyse de stabilité linéaire prévoit aussi une paramétrisation de la vitesse de surface maximum $U_{x_{max}}$ (p.e. *Turcotte et Schubert, 1982, pp. 279-285*),

$$U_{x_{max}} = 0,271 \cdot Ra^{2/3}.$$

Notre modèle est proche de ce résultat (fig. 1-11). Il donne également une paramétrisation pour le maximum de contrainte (τ_{max}) localisée dans les coins,

$$U_{x_{max}} = 0,21 \cdot Ra^{0,620}, \quad \text{et} \quad \tau_{max} = 0,43 \cdot Ra^{0,776}.$$

La paramétrisation du flux de chaleur dépend également des conditions limites. Lorsque les bords sont rigides (vitesse nulle), la valeur de l'exposant β n'est plus 1/3, mais 1/5 (*Roberts, 1979*). Pour un rapport d'aspect 1, *Frick et al. (1983)* trouvent une loi légèrement différente,

$$Nu = 0,332 \cdot Ra^{0,225}.$$

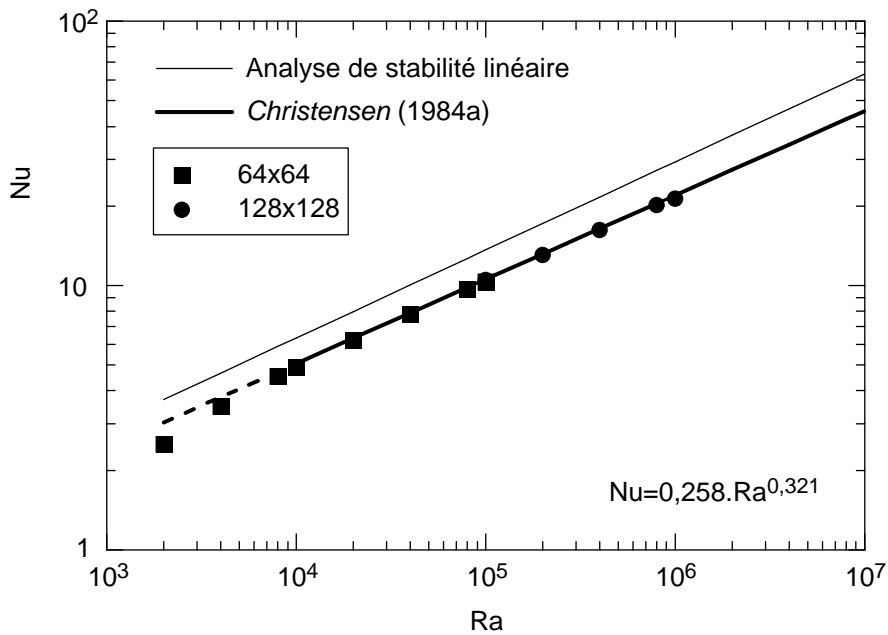


Figure 1-10. Loi paramétrisée à viscosité constante. $r_a=1,0$. A $Ra=10^5$, les valeurs du nombre de Nusselt pour les grilles 64x64 et 128x128 sont identiques.

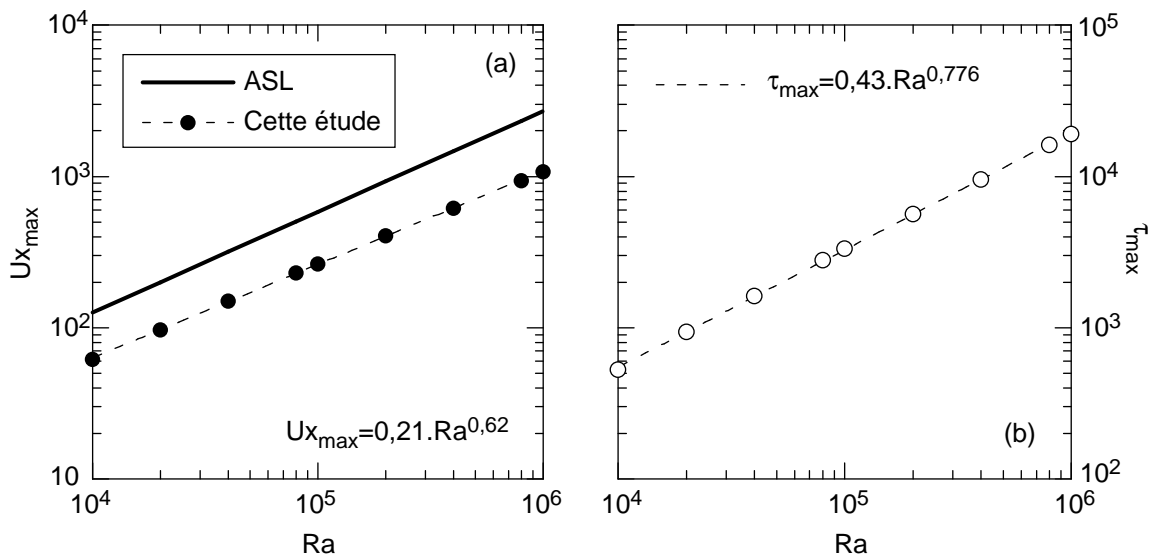


Figure 1-11. (a) Paramétrisation de la vitesse maximale en surface. Comparaison entre l'analyse de stabilité linéaire (ASL) et notre modèle. (b) Paramétrisation du maximum de contrainte.

La différence avec la théorie est attribuée aux imprécisions numériques. Une série d'expériences a été réalisée en imposant une surface et une base rigide (les côtés verticaux restent libres). Les résultats s'accordent très bien avec la loi de Frick et al. (fig. 1-12), et le flux de chaleur suit la loi

$$Nu = 0,339 \cdot Ra^{0,223}.$$

La différence avec la théorie est attribuée aux imprécisions numériques. Une série d'expériences a été réalisée en imposant une surface et une base rigide (les côtés verticaux restent libres). Les résultats s'accordent très bien avec la loi de Frick et al. (fig. 1-12), et le flux de chaleur suit la loi

$$Nu = 0,339 \cdot Ra^{0,223}.$$

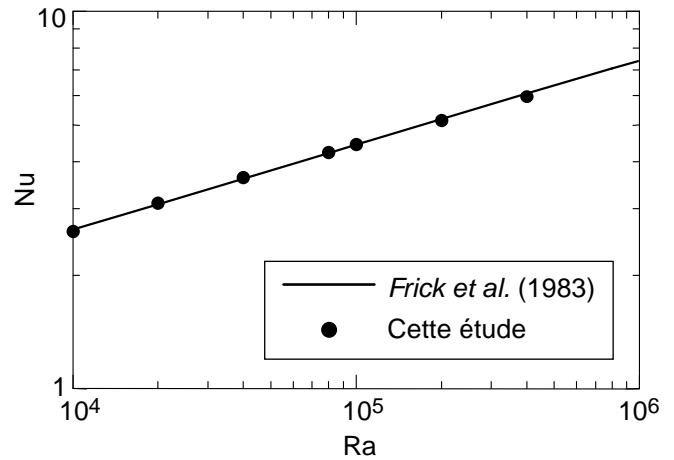


Figure 1-12. Paramétrisation dans le cas d'un fluide isovisqueux, limité par une surface et une base rigides.

1.2.6 - Le modèle de couche limite thermique.

La couche limite thermique contrôle le transfert de chaleur entre la partie isotherme de la cellule convective et le milieu extérieur. Le développement d'instabilités dans ces couches limites est à l'origine de la circulation convective. Une bonne description de ces couches limites thermiques et de leur caractéristiques (en particulier l'épaisseur δ , et l'amplitude thermique δT) permet de mieux appréhender la convection. Il est utile de définir un nombre de Rayleigh de couche limite, inspiré de la relation (1-3),

$$Ra_{\delta} = \frac{\rho g \alpha \cdot \delta T \cdot \delta^3}{\mu \kappa}. \quad (1-7)$$

Ce paramètre constitue une indication précieuse pour l'étude du transfert de chaleur et le déclenchement des instabilités dans les couches limites (Sotin et Labrosse, 1997). La formulation en couche limite est fondée sur deux équilibres supposés (Moore et Weiss, 1973; voir aussi Sotin et Labrosse, 1997). A la base de la couche limite, les composantes verticales des flux conductif et convectif s'équilibrent, et la force de poussée compense les frottements visqueux:

$$k \frac{(\bar{T} - T_{\text{surf}})}{\delta} = \rho_0 C_p u_z \bar{T}, \quad (1-8)$$

et
$$\rho_0 \alpha_v g (\bar{T} - T_{\text{surf}}) = A \mu \frac{u_z}{\delta^2}. \quad (1-9)$$

Pour déterminer une expression du rapport A, on suppose par ailleurs que la température de surface est petite devant la température moyenne (i.e. la température de la zone isotherme):

$$A = \frac{\rho_0 \alpha_v g (\bar{T} - T_{\text{surf}}) \delta^3}{\mu \kappa} \quad \text{avec} \quad (\bar{T} - T_{\text{surf}}) \sim \bar{T}. \quad (1-10)$$

Cette expression est précisément celle du nombre de Rayleigh de couche limite défini plus haut. La conservation du flux de chaleur permet d'écrire Ra_δ en fonction de Ra . Au sommet du domaine, c'est-à-dire au sommet de la couche limite, ce flux s'écrit

$$\bar{q} = k \frac{(\bar{T} - T_{\text{surf}})}{\delta}, \quad (1-11)$$

ce qui conduit à une expression de Ra_δ en fonction de Nu , Ra et $\bar{\theta}$, la température dimensionnée,

$$Ra_\delta = \frac{\bar{\theta}^4}{Nu^3} \cdot Ra. \quad (1-12)$$

Dans le cas d'un fluide isovisqueux limité par une surface libre de contrainte, $\bar{\theta}=0,5$ et Ra_δ est indépendant du nombre de Rayleigh. Par exemple, pour $r_a=1$, $Ra_\delta \sim 2,46$. En fait, les modèles numériques, 2D comme 3D, présentent tous une légère dépendance en Ra . Ils trouvent une pente logarithmique inférieure à $1/3$, si bien que (1-12) devient

$$Ra_\delta = \frac{\bar{\theta}^4}{a^3} Ra^{(1-3\beta)}. \quad (1-13)$$

Le modèle développé dans ce travail suggère $Ra_\delta = 3,64 \cdot Ra^{0,037}$ (fig. 1-10 et table 1-2). Le nombre de Rayleigh de couche limite peut également être représenté en fonction d'un nombre de

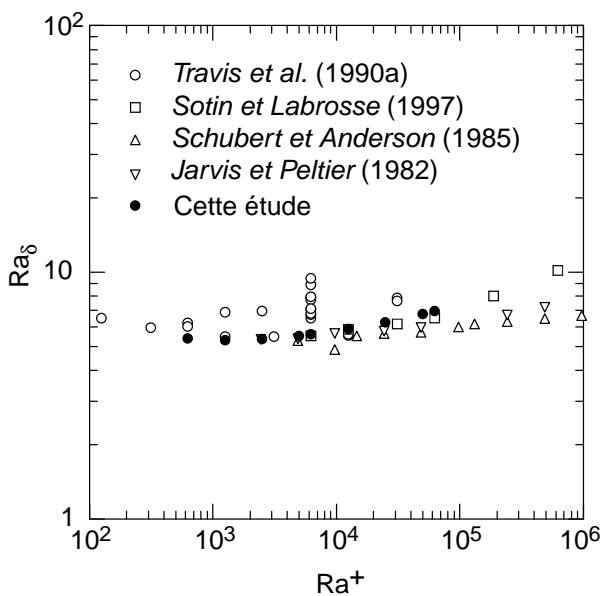


Figure 1.13. Paramétrisation du nombre de Rayleigh de couche limite en fonction du nombre de Rayleigh de champ lointain.

Rayleigh de champ lointain, Ra^+ , suivant *Bergholz et al.* (1979) (fig. 1-13). Cette présentation coupe la boîte en deux, les deux moitiés étant renvoyées à l'infini l'une de l'autre, ce qui permet d'isoler et de traiter séparément les deux couches limites. Un Ra^+ est défini pour chacune d'elle:

$$\begin{cases} Ra_{\text{haut}}^+ = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \bar{\theta} \cdot Ra \\ Ra_{\text{bas}}^+ = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (1 - \bar{\theta}) \cdot Ra \end{cases} \quad (1-14)$$

Pour un fluide isovisqueux à surface libre, le problème est symétrique et $Ra_{\text{bas}}^+ = Ra_{\text{haut}}^+$.

Géométriquement, l'équation (1-12) revient à déterminer le sommet de la couche limite thermique sur le profil thermique, puis à calculer l'intersection de la tangente en ce point avec la droite $T = \bar{T}$ (fig. 1-14 a). Dans le cas où il n'y a pas de couvercle, cette méthode donne strictement les mêmes valeurs que (1-12), puisque le nombre de Nusselt et la dérivée du profil thermique sont calculés exactement de la même façon. Si on tient compte d'un couvercle, la tangente au profil thermique est calculée plus bas, et (1-12) est redimensionné en fonction de la

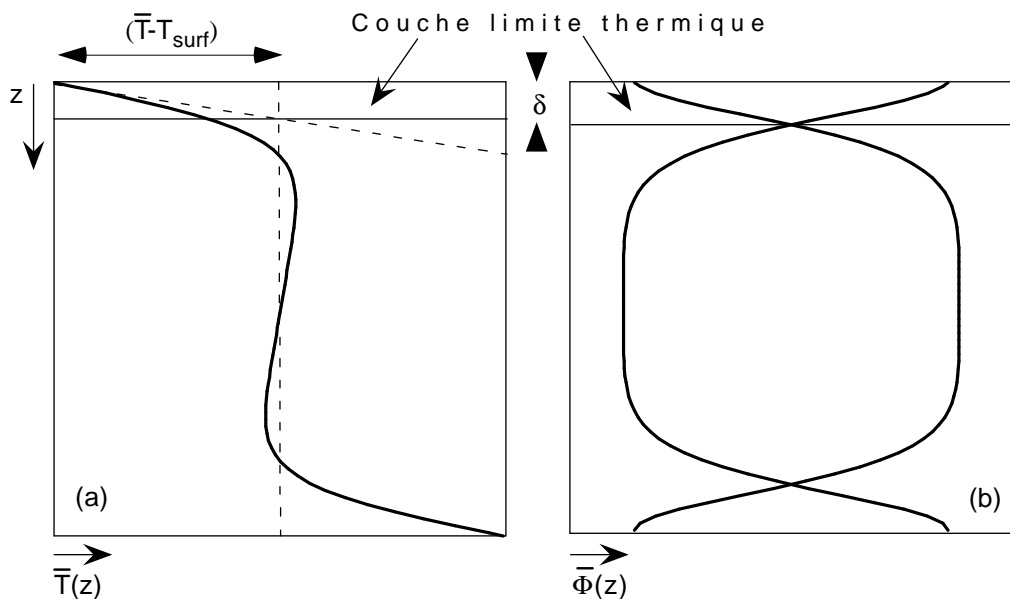


Figure 1-14. Détermination géométrique de la couche limite thermique. (a) Tangente au profil thermique. (b) Intersection des flux advectif et conductif moyens.

sous-couche convectrice. On dispose ainsi d'une comparaison intéressante pour tester la validité de la formulation en couche limite dans le cas du régime couvercle. Une autre détermination de Ra_{δ} consiste à localiser l'intersection des profils moyens du flux advectif et du flux conductif, et d'identifier cette profondeur avec la base de la couche limite (fig. 1-14 b). A cause de l'approximation (1-10), le Ra_{δ} obtenu doit être différent de celui prédit par (1-12), les écarts entre les deux méthodes dépendant des cas de figure (en particulier de la nature de la condition limite). L'hypothèse d'un flux de chaleur uniquement conductif conduisant à (1-12) reste une approximation. Le flux advectif ne s'annule pas immédiatement, et (1-12) sous-estime l'extension de la couche limite. Au moins dans le cas d'un fluide isovisqueux, ces deux formulations donnent des résultats très proches (fig. 1-15). En revanche, si la viscosité dépend fortement de la température, la moindre petite différence entre les deux méthodes est amplifiée, et il faut s'attendre à un moins bon accord.

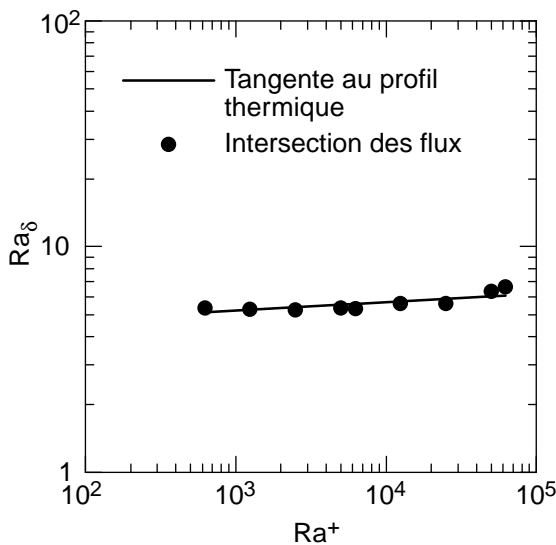


Figure 1-15. Comparaison entre l'analyse de couche limite et la l'intersection des flux.

Dans le chapitre 3, on verra que le nombre de Rayleigh de couche limite est très sensible aux variations de viscosité, en particulier pour la couche limite thermique du haut. Les études expérimentales de la convection de Rayleigh-Bénard distinguent plusieurs régimes, selon les valeurs des nombres caractéristiques. D'autres études montrent l'importance des variations de viscosité pour la structure de l'écoulement. Dans le manteau terrestre, on s'attend à de fortes variations de viscosité, bien que celles-ci soient mal contraintes.

1.3 - Viscosité variable.

1.3.1 - Viscosité et rhéologie.

La viscosité cinématique ν est un paramètre du fluide reliant les contraintes (σ) au taux de déformation ($\dot{\epsilon}$). Lorsque le fluide est newtonien, l'équation constitutive entre σ et $\dot{\epsilon}$ est linéaire, $\sigma = \mu \dot{\epsilon}$. La viscosité s'oppose au mouvement et à la déformation du fluide. Ou, ce qui revient au même, le temps caractéristique pour obtenir une déformation donnée en appliquant une certaine contrainte est d'autant plus long que μ est élevée. On peut aussi définir la viscosité dynamique $\nu = \mu/\rho$, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique aux contraintes de cisaillement subies par le fluide. Le champ de vitesse vérifie alors la relation

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{V}.$$

Cette équation peut s'interpréter en terme de diffusion de la quantité de mouvement, ν ayant la dimension d'un coefficient de diffusion (son analogue thermique est la diffusivité thermique κ). Plus ce coefficient de diffusion est grand, et plus le fluide se déplace de manière uniforme (donc sans déformation). D'un point de vue microscopique, les atomes piégés dans un réseau cristallin peuvent se déplacer d'un site à un autre (et donc créer de la déformation) s'ils acquièrent une énergie supérieure au puits de potentiel dans lequel ils se trouvent. Le déplacement est d'autant

plus difficile que le puits est profond, et la viscosité peut s'interpréter comme une mesure indirecte de cette barrière de potentiel.

La relation générale entre les contraintes et le taux de déformation fait intervenir la viscosité cinématique,

$$\dot{\epsilon} \propto \mu f(\sigma).$$

Le comportement de $\dot{\epsilon}$ en fonction des variables thermodynamiques reflète également celui de la viscosité. Les études phénoménologiques ont conduit à exprimer l'équation d'état décrivant l'évolution du taux de déformation en fonction des contraintes σ , de la température T , et de la pression hydrostatique p (p.e. *Poirier*, 1985): $\dot{\epsilon} = F(\sigma, T, p)$. La taille des grains de la roche et la présence de fluides ont également une influence sur le taux de déformation. Enfin, la forme de la fonction F dépend du mécanisme de déformation (diffusion ou dislocation). Pour comprendre quel type de fluage contrôle réellement la déformation des roches du manteau terrestre, il est nécessaire de préciser la façon dont $\dot{\epsilon}$ dépend des différents paramètres.

Le taux de déformation augmente exponentiellement avec la température, mais diminue (également de manière exponentielle) lorsque la pression p s'accroît, justifiant l'emploi d'une loi d'Arrhénius,

$$\dot{\epsilon} \propto \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{RT}\right),$$

où E_a est l'énergie d'activation molaire, V_a le volume d'activation molaire, et R la constante des gaz parfaits. *Weertman* (1970) lie ce comportement au fait que $\dot{\epsilon}$ est proportionnel au coefficient d'auto-diffusion du cristal. Ce dernier dépend lui-même exponentiellement de la température et de la pression.

Guyon et al. (1991, pp. 75-78) proposent une formulation légèrement différente. Ils montrent que l'on peut retrouver une loi d'Arrhénius en exprimant le taux de déformation en fonction de la fréquence de saut d'une particule vers un site voisin,

$$f = \frac{k_B T}{h} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right),$$

où k_B et h sont les constantes de Boltzman et de Planck, et Q l'énergie d'activation. Dans cette description, les contraintes brisent la symétrie qui existait entre les barrières de potentiel des différents voisins. Elles modifient les valeurs de f associées aux sauts vers ces différents sites, et favorisent l'un de ceux-ci par rapport aux autres.

L'olivine est le minéral le plus abondant et le moins visqueux du manteau supérieur. En cela, sa rhéologie contrôle les mécanismes de déformation qui se produisent dans cette partie de la Terre. Les expériences de déformation de l'olivine réalisées en laboratoires font généralement apparaître une relation linéaire entre $\log(\dot{\epsilon})$ et $\log(\sigma)$, pour peu que l'intervalle de contrainte exploré ne soit pas trop étendu (*Carter et Avé Lallemant, 1970; Kohlstedt et Goetze, 1974; Durham et al., 1979; Chopra et Patterson, 1984; Bai et al., 1991*). Ces résultats suggèrent une loi de puissance entre $\dot{\epsilon}$ et σ , $\dot{\epsilon} \propto \sigma^n$. Finalement, si l'on ne tient compte ni de la présence de fluides, ni de la taille des grains, le processus de déformation des roches du manteau est décrit par une loi de type

$$\dot{\epsilon} = A \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{E_a + pV_a}{RT}\right). \quad (1-15)$$

Le cas le plus simple, obtenu pour $n=1$ (fluide newtonien), correspond à la diffusion d'atomes et de lacunes entre deux frontières de grains (fluage de Nabarro-Herring). La viscosité effective, définie par le rapport $\sigma/2\dot{\epsilon}$, est alors indépendante des contraintes et de la vitesse de déformation. La relation (1-15) ne tient pas compte de la taille des grains, bien que l'efficacité de la diffusion dépende de la taille moyenne des grains de la roche. En toute rigueur, il faut donc la multiplier par un terme de la forme $(b/d)^m$, d étant la dimension du grain, b la longueur caractéristique (la norme du vecteur de Burgers, par exemple) et m un nombre sans dimension. Suivant cette correction, la déformation induite par diffusion devient moins importante lorsque la taille des grains croît.

Weertman (1970) note que le processus de fluage par diffusion n'est efficace que pour de faibles contraintes ($\leq 10^{-2}$ bar), irréalistes dans le cas du manteau terrestre. En remplacement, il propose des lois de fluages contrôlées par les migrations de dislocations, l'exposant n dépendant du comportement des dislocations. Ces considérations théoriques sont appuyées par de nombreux travaux expérimentaux sur la déformation de l'olivine (table 1-3). Les conditions expérimentales ne reproduisent cependant pas les conditions régnant dans le manteau terrestre. Les pressions de confinement sont trop faibles, et les échelles de temps trop brèves. Cette dernière limite revient à surestimer les contraintes (et donc leur poids numérique dans le calcul de la déformation). Au total, ces deux effets conjugués n'excluent pas définitivement la déformation diffusive, qui reste compétitive devant le fluage par dislocation.

L'analyse micro-structurale des roches issues du manteau supérieur plaide en faveur de la dislocation. Elle fait apparaître des lignes de dislocation et une orientation préférentielle des minéraux, analogues à ce qui est obtenu par déformation expérimentale de roche par dislocation

(Green et Radcliffe, 1972; Guéguen, 1977). Cependant, sauf exception (Haggerty et Sautter, 1990) les roches auxquelles on a accès proviennent de profondeur inférieure à 200 km. De plus, ces microstructures résultent plus de la déformation (rapide au regard des processus tectoniques) induite lors de la remontée des roches en surface (Goetze, 1975).

Minéral	Pression (MPa)	Intervalle T (°C)	Intervalle σ (MPa)	n	E _a (kJ/mol)	Référence
Dunite	3000	300-1200	60-800	4,8±0,4	501±69	Carter et Avé Lallemant (1970)
Fo ₉₂	0	1430-1650	5-150	-	523 ±21	Kohlstedt et Goetze (1974)
Fo ₉₂	0,1	1150-1600	10-180	3,6±0,3	523 (1)	Durham et Goetze (1977)
Dunite	500-1500	700-1350	300-2000	3,0±0,2	~527	Post (1977)
Fo pure	38	1480-1680	3-30	2,9±0,2	670±30	Durham et al. (1979)
Dunite	300	1200-1400	100-500	3,6 ±0,2	535±33	Chopra et Paterson (1984)
Fo ₉₀	300	1300	20-200	3-4	-	Karato et al. (1986)
Fo ₉₀	0,1	1200-1525	14-180	3,5±0,1	230-1000 (2)	Bai et al. (1991)

Table 1-3. Déterminations expérimentales de loi de fluage par dislocation (exposant des contraintes et énergie d'activation) l'olivine, en absence de fluide. (1) Valeur fixée pour le calcul de n. (2) L'énergie d'activation varie selon le plan de glissement et la direction de la déformation.

Le processus qui va finalement prévaloir est celui qui conduit aux taux de déformation les plus importants. Des lois empiriques, appuyées par les expériences de fluage, permettent dresser des cartes de déformation de l'olivine dans le plan température/contrainte, c'est à dire de délimiter les domaines contrôlés par chaque type de déformation (Ashby et Verrall, 1977). A température et pression données, la transition entre les deux régimes dépend simultanément des contraintes et de la taille du cristal. Pour des grains d'environ 10 mm (et avec T=1300 K et p=300 MPa), elle devrait se produire dans l'intervalle 0,1-1,0 MPa (Karato et al., 1986). Une synthèse récente (Karato et Wu, 1993) propose des valeurs pour les paramètres de la relation (1-15) (table 1-4) et montre que: (1) le fluage par dislocation contrôle la déformation dans le manteau supérieur peu profond et chaud (cas des dorsales), ainsi qu'à des profondeurs intermédiaires sous les continents; (2) dans la zone de faible profondeur, mais pour des températures moins élevées (cas des continents), c'est le processus diffusif qui prévaut; (3) enfin, la diffusion est également dominante dans le manteau supérieur plus profond (≥ 200 km), sous la croûte océanique comme sous la croûte continentale. Il faut garder à l'esprit que les volumes d'activation (dans le cas des

dislocations), la taille des grains et les valeurs des contraintes sont des paramètres expérimentalement peu contraints, si bien que la localisation des transitions rhéologiques reste également peu précise.

Mécanisme	Diffusion		Dislocation	
	sec	humide	sec	humide
A (s ⁻¹)	8,7×10 ¹⁵	5,3×10 ¹⁵	3,5×10 ²²	2,0×10 ¹⁸
n	1,0	1,0	3,5	3,0
m	2,5 ⁽¹⁾	2,5 ⁽¹⁾	0	0
E _a (kJ/mol)	300	240	540	430
V _a (cm ³ /mol)	6	5	15-25 ⁽²⁾	10-20 ⁽²⁾

Table 1-4. Lois de fluage (en absence de fluide), d'après *Karato et Wu* (1993). ⁽¹⁾ l'exposant de taille de grain varie avec la taille du grain. Cette valeur est une moyenne prenant en compte les incertitudes induites par cette variation. ⁽²⁾ Il subsiste une indétermination sur la valeur du volume d'activation du fluage par dislocation.

La déformation plastique d'une roche conduit à une orientation préférentielle des cristaux de la roche, qui peut à son tour être responsable d'une anisotropie des vitesses sismiques (les ondes polarisées parallèlement à l'axe de la déformation sont plus rapides que les ondes polarisées perpendiculairement à cet axe) (p.e. *Karato*, 1987). Les observations sismologiques, ainsi que les mesures d'orientation préférentielle sur l'olivine et le pyroxène de roches mantelaires (*Mercier*, 1985) confirment le rôle prépondérant joué par le processus de dislocation jusqu'à une profondeur de 200 km.

Associé aux variations des contraintes, le rôle joué par la taille de grain n'est pas si simple qu'il n'y paraît. La diffusion domine pour des grains de dimension inférieure à une taille critique. Cette taille critique diminue lorsque les contraintes augmentent. Avec l'augmentation des contraintes, certains grains recristallisent en grains de taille plus modeste. La dimension des grains recristallisés diminue également avec l'accroissement des contraintes, mais plus vite que la taille critique de la transition diffusion/dislocation (*Karato et Wu*, 1993). Ainsi, l'accroissement des contraintes favorise le fluage diffusif. C'est ce phénomène qui permet d'envisager une déformation diffusif pour une partie de la lithosphère, et surtout pour le manteau supérieur profond (≤200-300 km). Par ailleurs, *Karato et Wu* (1993) notent que le modèle de manteau newtonien au delà d'une certaine profondeur est le modèle qui offre la meilleure compatibilité avec l'évolution du niveau relatif des mers induit par le rebond postglaciaire.

L'hypothétique transition rhéologique vers 200 km pourrait expliquer la discontinuité de *Lehmann* (*Karato*, 1992). Vers 200 km, les vitesses sismiques de compression et de cisaillement

augmentent d'environ 2%, sans qu'une transition de phase ou une transition chimique en soit responsable. En revanche, un changement dans l'anisotropie des minéraux pourrait rendre compte de ce saut (*Revenaugh et Jordan, 1991*), l'amplitude de l'anisotropie diminuant vers 200 km (*Montagner et Tanimoto, 1991*). L'orientation préférentielle des grains d'olivine, parallèle à l'axe principal de déformation, est responsable de cette anisotropie. Cependant, elle est beaucoup plus importante lorsque la roche est déformée par dislocation. Ainsi, si l'axe principal de déformation est horizontal, une transition dislocation/diffusion vers 200 km devrait induire une augmentation des vitesses des ondes sismiques polarisées verticalement.

La plus grande partie du manteau supérieur (au delà d'une profondeur d'environ 200 km) peut donc être considérée comme un fluide newtonien. L'étude de la convection du manteau à l'échelle globale supporte relativement bien l'hypothèse d'un fluide newtonien, même s'il faut apporter quelques bémols. Par exemple, il subsiste des doutes sur la localisation des zones de transitions de profondeur intermédiaire. Ensuite, aussi bien dans l'environnement des dorsales que dans une grande partie de la lithosphère, la rhéologie échappe complètement à la description newtonienne. Enfin, le rôle de l'eau n'a pas été abordé ici. Pourtant, il est établi que la présence de fluide modifie les lois rhéologiques de dislocation (*Carter et Avé Lallemant, 1970; Post, 1977; Chopra et Paterson, 1984*) et, dans une moindre mesure, de diffusion (*Karato et al., 1986*). Dans les deux cas, le fluide induit un affaiblissement de la roche.

1.3.2 - Les observations géophysiques

Les viscosités déduites des lois de fluage ne sont pas directement transposables au cas du manteau terrestre. En particulier, le taux de déformation atteint en laboratoire (de l'ordre de 10^{-4} - 10^{-5} s⁻¹) est très supérieur à ce qui existe dans le manteau ($\sim 10^{-14}$ s⁻¹). Heureusement, d'autres méthodes, liées aux propriétés viscoélastiques du manteau, permettent de contraindre le profil de viscosité. Lorsque le temps caractéristique de la déformation est court, le manteau se comporte comme un matériau élastique : cela permet aux ondes sismiques de se propager. A l'inverse, lorsque ce temps caractéristique est grand, la relaxation des contraintes se fait par fluage : on explique ainsi l'écoulement visqueux très lent qui anime le manteau. De la même manière, la subsidence créée par une surcharge locale est relaxée par fluage du manteau lorsque la surcharge disparaît. Ainsi, *Haskell* (1935, 1936) propose que l'élévation actuelle du plateau scandinave est une conséquence de la fonte de la calotte glaciaire qui recouvrait une partie de l'hémisphère nord il y a 10000 ans. Il en déduit une valeur pour la viscosité du manteau, $\mu \sim 10^{21}$ Pa.s. Depuis *Peltier* (1974), des

modèles de manteau viscoélastiques, faisant intervenir le profil de viscosité, permettent de calculer la réponse de ce manteau à une perturbation de charge.

Le rebond postglaciaire induit une variation du niveau relatif des mers. Etant donné un modèle d'évolution de la calotte glaciaire et une structure radiale de viscosité, il est possible de calculer théoriquement les variations de ce niveau (voir *Peltier*, 1989 pour une revue). La comparaison avec des mesures in situ (par datation au ^{14}C) de cette évolution, permet de contraindre le profil de viscosité. De bons ajustements sont obtenus pour des modèles à 3 couches (*Peltier et al.*, 1986; *Peltier et Tushingham*, 1989; *Lambeck et al.*, 1990) : une lithosphère de viscosité quasiment infinie et d'épaisseur comprise entre 100 et 150 km; un manteau supérieur homogène en viscosité, celle-ci variant de 4×10^{20} à 10^{21} Pa.s selon les auteurs; l'interface manteau supérieur/manteau inférieur n'est affectée que d'un faible saut de viscosité, de l'ordre de 2 à 4 (10 pour *Lambeck et al.*, 1990). Cependant, les modèles de déglaciation (*Wu et Peltier*, 1983) restent incertains, et limitent la validité de ces résultats. Enfin, d'autres modèles, basés sur l'évolution du niveau des mers loin de la calotte (*Nakada et Lambeck*, 1989), conduisent à des sauts de viscosités plus importants, de 40 à 100. Ces différences pourraient s'expliquer par des variations latérales de viscosité.

Plutôt que d'ajuster les profils de viscosité, les modèles de rebond postglaciaire récents inversent directement les mesures in situ. Pour *Mitovica et Peltier* (1992), la valeur $\mu = 10^{21}$ Pa.s s'applique essentiellement à la partie supérieure du manteau inférieur (entre 670 et 1800 km). Des variations de viscosité à des profondeurs plus grandes ne peuvent pas être exclues tant que cette condition est respectée. *Peltier* (1996) utilise un modèle amélioré de calotte glaciaire, et trouve un profil qui se rapproche de celui trouvé par *Lambeck et al.* (1990), $\mu \sim 0,4 \times 10^{21}$ pour le manteau supérieur, et $\mu \sim 3,5 \times 10^{21}$ au delà de 1200 km. La moyenne depuis la base de la lithosphère jusqu'à 1200 km est proche de 10^{21} Pa.s. Il souligne par ailleurs que les modèles de rebond postglaciaire sont grossièrement indépendants des variations latérales de viscosité.

D'autres méthodes que le rebond postglaciaire ont été développées pour contraindre la viscosité du manteau. Un premier type de modèles utilise les variations de densités issues des modèles sismologiques, et détermine le profil relatif de viscosité qui rend le mieux compte des données du géoïde. L'inversion de ces données suggère un rapport de viscosité entre le manteau inférieur et le manteau supérieur plus élevé que ce qui est prévu par le rebond postglaciaire (*Hager et Clayton*, 1989; *Ricard et al.*, 1989; *King et Masters* 1992). Le gros inconvénient des modèles basés sur le géoïde est qu'ils dépendent fortement du modèle sismologique choisi (*Ricard*

et al., 1989; *King et Masters*, 1992). L'étude de la vitesse des plaques apporte une contrainte sur la viscosité absolue du manteau, mais la résolution du profil radial est moins bonne que pour le géoïde. Par ailleurs, ils sont biaisés par la non prise en compte des variations latérales de viscosité. L'association des données du géoïde et des vitesses de plaques fourni de meilleurs résultats (*Ricard et al.*, 1989). *Ricard et Vigny* (1989) prévoient $\mu \sim 3 \times 10^{20}$ pour le manteau supérieur, et un saut de viscosité de l'ordre de 50.

Enfin, si les variations de la vitesse de rotation de la Terre (autres que celle induite par les marées) et la dérive de l'axe des pôles sont reliés aux cycles de glaciation, elles peuvent aussi être reliés à la viscosité du manteau inférieur, la viscosité du manteau supérieur étant fixée arbitrairement (*Peltier*, 1989).

Ce rapide tour d'horizon montre que le profil de viscosité dans le manteau terrestre reste sujet à discussion. On peut toutefois dégager quelques points importants. La lithosphère est considérée comme une couche infiniment visqueuse, d'une épaisseur moyenne de 100 km. Dans le manteau supérieur et la zone de transition, la viscosité est de l'ordre de 10^{21} Pa.s, probablement légèrement plus faible. Dans le manteau supérieur comme dans le manteau inférieur, la viscosité est radialement homogène ou presque. Le manteau inférieur est plus visqueux que le manteau supérieur, mais le saut de viscosité est encore mal contraint (selon les modèles, il varie d'un à deux ordre de grandeur). Par ailleurs, ce saut de viscosité pourrait se répartir depuis la base de la zone de transition jusqu'au sommet du manteau supérieur (premières centaines de kilomètres de profondeur) (*Peltier*, 1996).

L'écoulement visqueux du manteau implique la formation d'hétérogénéités latérales, à leur tour responsables de variations latérales de viscosité. La mise en évidence de ces variations est un sujet actuel de recherches, les méthodes précédemment citées ne donnant accès qu'à la structure radiale de la viscosité. Une méthode récente, développée par *Ivins et Sammis* (1995), relie les variations latérales de vitesse sismique cisailante aux variations latérales de viscosité à grande longueur d'onde. La viscosité de référence est calculé à partir d'un géotherme de référence, de symétrie sphérique. Les résultats dépendent bien sûr du choix de ce géotherme de référence et du modèle tomographique, mais sont également très sensibles à la valeur du coefficient d'expansion thermique. Au delà de 350 km ils mettent en évidence des variations de deux ordres de grandeur. Malheureusement, ce modèle ne donne de résultats que pour des profondeurs supérieur à 350 km, et ne permet pas d'explorer la couche limite thermique au sommet du manteau supérieur.

1.3.3 - Importance de la viscosité variable

En dehors du fait qu'ils ne tiennent pas compte des lois rhéologiques, les modèles de convection à viscosité constante présentent deux contradictions majeures avec les observables géophysiques: ils sont trop froids et ne prévoient pas la formation d'une couche lithosphérique près de la surface.

Les distributions thermiques utilisées par *Vacher et al.* (1996) sont dérivées de modèles isovisqueux (*Dupeyrat et al.*, 1995). Une correction adiabatique est apportée pour tenir compte de la pression. La comparaison des vitesses sismiques issues de ces champs de température avec les vitesses sismiques observées par les modèles tomographiques montre que la cellule convectrice est trop froide. Pour obtenir une bonne corrélation, il faut porter la base du profil thermique à 2200 K, ce qui est trop élevé d'environ 300 K. Mais cela ne gomme pas pour autant la couche limite thermique froide, dont l'amplitude trop importante contredit les modèles sismiques.

Le manteau supérieur terrestre se divise en une partie mobile (l'asthénosphère) et une fine couche rigide d'épaisseur variable (en générale de 10 à 100 km), la lithosphère, qui a la propriété de transmettre facilement les contraintes. Les lithosphères sont probablement présentes sur les autres planètes telluriques, en particulier sur Vénus. Sur Terre, la tectonique des plaques empêche la formation d'une lithosphère trop épaisse, en l'étirant au niveau des dorsales. Dans les modèles prenant en compte la tectonique des plaques, on s'attend plutôt à une lithosphère réduite. A l'inverse, si la surface est rigide et fixe, ou si elle est libre de contraintes, on doit observer une couche lithosphérique relativement épaisse (l'absence de tectonique des plaques est d'ailleurs invoquée pour expliquer l'importance de la lithosphère vénusienne) et qui ne participe pas directement à la convection. Cependant, même dans ces deux cas, les modèles isovisqueux ne présentent pas de zone purement conductrice où les vitesses s'annulent. Les modèles isovisqueux ne permettent pas d'expliquer la présence des lithosphères planétaires.

Pour lever ces contraintes observationnelles, il faut lever certaines approximations du modèle. La viscosité relie les taux de déformation aux contraintes appliquées. En cela, elle est capable, lorsqu'elle devient trop forte, d'inhiber partiellement les mouvements et de réduire le taux de déformation. D'éventuelles variations de viscosité permettraient d'augmenter localement la valeur de la viscosité et de créer des zones de vitesses faibles ou nulles, sans pour autant arrêter le transfert convectif dans le reste du manteau. Dans ce travail, un modèle numérique est développé en tenant compte, de manière relativement simple, des variations de viscosité. Le fluide est d'abord considéré comme newtonien, approximation qui semble justifié pour l'asthénosphère. Par

contre, la lithosphère, qui se déforme partiellement par mouvements de dislocations, sera plutôt mal décrite. La seconde simplification est de ne pas prendre en compte les variations de viscosité avec la profondeur. Si on considère que le volume d'activation est constant, l'influence de la pression n'est pas négligeable le long d'un profil isotherme, même dans le cas de la diffusion

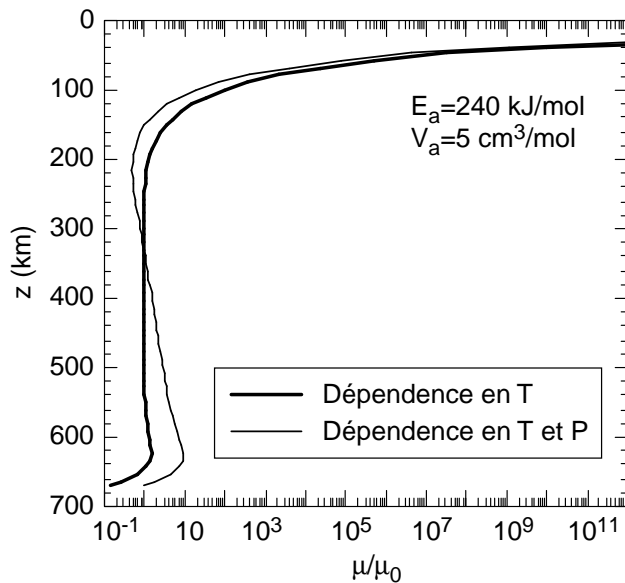


Figure 1-16. Effet de la pression sur la viscosité. Le profil thermique utilisé est issu d'un calcul à viscosité dépendant de la température seulement ($\Delta\mu=10^4$ et $Ra_{1/2}=10^5$). Pour la dépendance en pression, le profil thermique a été corrigé du gradient adiabatique.

(où $V_a \sim 5 \text{ cm}^3$). En fait, il faut aussi tenir compte de l'influence de la profondeur sur le profil thermique. La relation (1-15) doit être appliquée à un profil de température adiabatique. La correction adiabatique de la température pourrait alors compenser (au moins en partie) l'effet de la pression. Cet argument a été proposé dans le cas du manteau inférieur (*Poirier et Liebermann, 1984*), le profil de viscosité correspondant à un profil thermique adiabatique étant isovisqueux. Enfin, il faut garder à l'esprit que le volume d'activation de l'olivine et sa dépendance en pression restent assez mal connus. Le modèle utilisé dans ce travail est

incompressible, et il n'inclue donc pas de correction adiabatique de la température. Nous supposons donc que l'effet de la pression sur la viscosité est de second ordre par rapport à l'influence de la température. Un tracé a posteriori (et à partir d'un profil thermique issu d'un calcul à viscosité dépendant de la température seulement) des profils de viscosité montre que l'effet de la pression est relativement petit par rapport à celui de la température (fig. 1-16). Dans le même esprit, il est possible d'exprimer la viscosité en fonction de la température normalisée à la température de fusion (T_m), la température de fusion dépendant de la profondeur (p.e. *Weertman, 1970*)

$$\mu = A \exp \left[B \left(\frac{T}{T_m} - 1 \right) \right], \quad (1-16)$$

où A et B sont deux constantes. Cette relation empirique donne de bons résultats pour les métaux (*Weertman, 1970*).

Conclusion

Il est important de prendre en compte les variations de viscosité pour mieux décrire la rhéologie du matériau, donc l'écoulement du fluide. Les observations géophysiques basées sur l'étude du rebond postglaciaire fournissent essentiellement un saut de viscosité entre manteau supérieur et inférieur compris entre 10 et 100, selon les modèles. De plus, ils s'affranchissent du problème posé par la lithosphère. Dans le manteau terrestre, les variations de viscosité dépendent du mode de déformation des roches. Celui-ci n'est pas un unique. Mais dans un premier temps, on peut ne considérer que la déformation par diffusion, et approcher les variations de viscosité en fonction des seules variations température. Ce point de vu pose problème si on souhaite aussi modéliser la lithosphère mécanique. Dans la suite de ce travail, on ne cherchera donc pas à modéliser la lithosphère. En revanche, on tiendra compte de son existence à l'aide d'un modèle simple, dans lequel la viscosité peut devenir très élevée.

Munis de ces quelques remarques concernant la convection dans le manteau terrestre et la rhéologie des roches, nous allons, dans le chapitre suivant, décrire le modèle numérique qui sera utilisé dans ce travail.

Chapitre 2

Le modèle numérique

Les androïdes rêvent-ils de moutons électriques ?

(Philip K. Dick)

Sommaire

Introduction	46
2.1 Equations fondamentales	46
2.1.1 Ecoulement d'un fluide visqueux	46
2.1.2 Conservation de la masse	48
2.1.3 Transport de la chaleur	48
2.1.4 Equations adimensionnées	49
2.2 Cas de la viscosité variable	51
2.2.1 Modification des équations de Navier-Stokes	51
2.2.2 Choix du nombre de Rayleigh	52
2.2.3 Loi de viscosité numérique	53
2.2.4 Les limites de la loi de viscosité	54
2.3 Flux thermique	56
2.3.1 Calcul du nombre de Nusselt	56
2.3.2 Conservation de l'énergie	58
2.3.3 Influence de la dissipation visqueuse	58
2.4 Formulation et résolution du problème numérique	61
2.4.1 Géométrie et conditions aux limites	61
2.4.2 Discrétisation	62
2.4.3 Schéma numérique et relaxation	63
2.4.4 Accélération de la convergence	64
2.4.5 Critère de convergence	65
2.4.6 Incertitude sur les résultats	65
2.4.7 Benchmarking partiel	66
Conclusion	69

Introduction.

La convection thermique fait intervenir le transport de chaleur par mouvement de matière. Les équations nécessaires à la modélisation de ce processus doivent donc décrire d'une part le mouvement de la matière, et d'autre part le transport de la chaleur. C'est précisément ce que font les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de la chaleur. Dans le cas de la convection dans le manteau des planètes telluriques, ces équations peuvent être simplifiées. Malheureusement, même après simplification, elles restent non-linéaires. Les résultats analytiques permettent surtout de déterminer les conditions propices au développement des mouvements convectifs. L'analyse de stabilité linéaire (obtenue en superposant de petites perturbations à une solution conductive stationnaire) donne accès à la température moyenne de la cellule de convection, mais pas aux distributions thermique et cinématique. D'où l'intérêt des expériences analogiques de laboratoire et des modélisations numériques. Parallèlement, ces études s'attachent à déterminer le plus correctement possible le flux thermique de surface, étant donné un jeu de paramètres et de conditions aux limites connus. On s'aperçoit alors que l'efficacité du transfert convectif de la chaleur dépend, à des degrés divers, de cet ensemble de paramètres. Par exemple, la rhéologie du fluide joue un rôle important. Le comportement de la viscosité en réponse aux variations de température contrôle l'épaisseur de la cellule convectrice et l'intensité du flux thermique de surface.

2.1 - Equations fondamentales.

2.1.1 - Ecoulement d'un fluide visqueux.

Dans le cas général d'un fluide newtonien de viscosité constante, de masse volumique ρ et soumis à un champ de force de volume $\vec{F} = \rho \vec{f}$, les équations de l'écoulement s'écrivent

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu \Delta \vec{V} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f}, \quad (2-1)$$

$D\vec{V}/Dt$ est la dérivée convective du champ de vitesse. Elle comprend les variations temporelles explicites de la vitesse, et celles implicites liées au mouvement du fluide,

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (2-2)$$

Le terme $\mu\Delta\vec{V} + (\zeta + \mu/3)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V})$ représente les contraintes de frottement visqueux, μ étant la viscosité de cisaillement, et ζ la viscosité de volume. Ce dernier paramètre est très mal connu, mais il n'intervient pas dans le cas d'un fluide supposé incompressible. La répartition de la pression est décrite par le gradient $-\vec{\nabla}p$. Pour un fluide incompressible, $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$ et on obtient les équations de Navier-Stokes,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}p + \rho\vec{f}. \quad (2-3)$$

En plus de l'incompressibilité, il est raisonnable de supposer que les roches terrestres diffusent la chaleur beaucoup plus lentement qu'elles ne diffusent la quantité de mouvement. Le nombre de Prandtl exprime le rapport du temps caractéristique de la diffusion thermique sur le temps caractéristique de la diffusion de la quantité de mouvement, $Pr = \nu/\kappa$, où κ est la diffusivité thermique et ν la viscosité dynamique: $\nu = \mu/\rho$. En choisissant pour ces paramètres des valeurs numériques proches de celles de la Terre (c'est-à-dire $\rho=3500 \text{ kg/m}^3$, $\mu=10^{21} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et $\kappa=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), l'application numérique donne $Pr=3,5\times 10^{24}$. Les grandeurs caractéristiques du système sont: la taille b , la vitesse caractéristique $V_0=\kappa/b$ et le temps $t_0=b^2/\kappa$. On en déduit la valeur caractéristique de la contrainte visqueuse (et de la pression): $f_0=\mu\kappa/b^3$. De même, une valeur caractéristique de la norme de $D\vec{V}/Dt$ est $\gamma_0=\kappa^2/b^3$. La comparaison entre ces deux termes montre que le membre de gauche de l'équation (2-3), dans le problème qui nous intéresse, est tout à fait négligeable:

$$\rho \frac{\gamma_0}{f_0} = \frac{1}{Pr} \ll 1. \quad (2-4)$$

Si la seule force extérieure exercée sur le fluide est la gravité, l'équation de l'écoulement devient

$$\mu\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0, \quad (2-5)$$

$\vec{g} = g\vec{e}_z$, étant l'accélération de la gravité. La force $\vec{F} = \delta\rho\vec{g}$, force d'Archimède, est le moteur de la convection. Les variations de température induisent des variations de densité autour d'une densité référence ρ_0 , $\rho=\rho_0+\delta\rho$. Les mouvements de matière sont induits par ces petites variations de densité. Par ailleurs, on se place dans l'approximation de Boussinesq, qui néglige les variations de densité dans les termes autres que la force d'Archimède. Un petit écart par rapport à la température de référence T_0 crée une variation de densité $\delta\rho$,

$$\delta\rho = -\rho_0\alpha_v(T-T_0), \quad (2-6)$$

où α_v est le coefficient d'expansion thermique à volume constant. Après avoir corrigé la pression p de la pression hydrostatique $p_{\text{Hydro}} = \rho_0gz$, on obtient l'équation d'écoulement applicable aux manteaux des planètes telluriques,

$$\mu\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}P + \delta\rho\vec{g} = 0 \quad \text{avec} \quad P = p - \rho_0gz, \quad (2-7)$$

Cette équation résoud en fait les perturbations par rapport à l'état un stationnaire (vitesse nulle, pression égale en tout point à la pression hydrostatique).

2.1.2 - Conservation de la masse.

La masse doit être conservée lors de l'écoulement. Cette conservation s'écrit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) = 0, \quad (2-8)$$

ou encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0.$$

En supposant que le fluide est incompressible, on retrouve l'expression utilisée précédemment pour simplifier l'équation de l'écoulement,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2-9)$$

L'incompressibilité a une conséquence thermodynamique : pour ne pas aller contre le 2nd principe de la thermodynamique, les variations de température induites par les variations de pression doivent être nulles. Pour certaines applications géophysiques (chapitre 4), il faudra corriger les champs thermiques issus des calculs numériques.

2.1.3 - Transport de la chaleur.

L'équation de la chaleur exprime la conservation de l'énergie. Elle fait le bilan des variations locales de densité volumique d'énergie, et les répartit entre trois termes d'origines distinctes:

- Le transport de chaleur par conduction: $\delta E_{\text{Conduction}} = k\Delta T$, k étant la conductivité thermique du milieu.
- Le transport de chaleur par convection: $\delta E_{\text{Convection}} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}T$.
- La production interne de chaleur: $\delta E_{\text{Source interne}} = \rho H$, H étant le taux de production d'énergie par unité de masse.

En additionnant ces trois contributions, on obtient finalement

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \rho H. \quad (2-10)$$

Le système numérique qu'il faut résoudre rassemble les trois équations décrites précédemment,

$$\begin{cases} \mu\Delta\vec{V} - \vec{\nabla}P + \delta\rho\vec{g} = 0 \\ \vec{V} \cdot \vec{\nabla} = 0 \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T - \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \rho H \end{cases}$$

2.1.4 - Equations adimensionnées.

Il est intéressant d'étendre l'analyse dimensionnelle utilisée précédemment (§ 2.1.1), au système d'équation lui-même, le but de l'opération étant de normaliser les variables du problème par rapport à leur valeurs caractéristiques. Il y a trois intérêts majeurs à non-dimensionnaliser le problème: (1) les équations ainsi obtenues sont plus simples; (2) les quantités calculées étant normalisées, elles ne prennent pas de valeurs numériques trop élevées (ou trop faibles), ce qui permet de mieux maîtriser les erreurs numériques; (3) la solution calculée pour un jeu de nombres caractéristiques est valable pour tous les systèmes naturels ayant le même jeu de nombres caractéristiques: c'est le principe de similitude.

Grandeur physique	Expression littérale	Valeur numérique (manteau supérieur)
Longueur	b	670 km
Temps	b^2/κ	$1,4 \times 10^{10}$ an
Vitesse	κ/b	$4,8 \times 10^{-3}$ cm/an
Frottement	$\mu\kappa/b^3$	$3,5 \times 10^{-3}$ N
Pression et contrainte	$\mu\kappa/b^2$	$2,3 \times 10^3$ Pa
Température	$T_{\text{base}} - T_{\text{surf}}$	1600 K

Table 2-1. Grandeurs caractéristiques des équations de la convection, et valeurs numériques correspondantes dans cas du manteau supérieur terrestre. $\kappa=10^{-6}$, $\mu=10^{21}$.

En plus de la vitesse et du temps caractéristique, on introduit une pression caractéristique $P_0 = \mu\kappa/b^2$, et le saut de température $\delta T = T_{\text{base}} - T_{\text{surf}}$. On peut toujours exprimer \vec{V} , p, T et les coordonnées x_i comme le produit de leur valeur caractéristique respective (table 2-1) par une nouvelle variable sans dimension (notée à l'aide d'un prime):

$$x_i = bx_i', \quad P = \frac{\mu\kappa}{b^2} P', \quad \vec{V} = \frac{\kappa}{b} \vec{V}', \quad (T - T_{\text{surf}}) = \delta T.T'$$

Les termes des équations de l'écoulement et de la chaleur se réécrivent:

$$\mu\Delta\vec{V} = \frac{\mu\kappa}{b^3} \Delta\vec{V}', \quad \vec{V}P = \frac{\mu\kappa}{b^3} \vec{V}'P', \quad \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k\delta T}{b^2} \frac{\partial T'}{\partial t'}$$

$$k\Delta T = \frac{k\delta T}{b^2} \Delta T' \quad \text{et} \quad \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{k\delta T}{b^2} \vec{V}' \cdot \vec{\nabla} T'$$

	Terre (Manteau supérieur)	Satellite de glace (glace I)
α_v (K ⁻¹)	2,4×10 ⁻⁵	1,56×10 ⁻⁴
ρ_0 (kg/m ³)	3500	917
g (m/s ²)	9,81	1,3
δT (K)	1600	150
b (km)	670	50
μ (Pa.s)	10 ²¹	10 ¹³
κ (m ² /s)	10 ⁻⁶	1,47×10 ⁻⁶
k (Wm ⁻¹ K ⁻¹)	3,0	2,6
H (W/kg)	6,0×10 ⁻¹²	-
Ra	4,0×10 ⁵	2,0×10 ⁸
h_s	1,9	-
Ra_H	8,0×10 ⁵	-

Table 2-2. Nombre de Rayleigh dans le manteau terrestre et l'enveloppe de glace I des satellites de glace.

Ramenées en variables adimensionnées, les équations de la convection thermique deviennent

$$\begin{cases} \Delta\vec{V}' - \vec{\nabla}'P' = \vec{f} \\ \vec{\nabla}' \cdot \vec{V}' = 0 \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} = \Delta T' - \vec{V}' \cdot \vec{\nabla}' T' + h_s \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{f} = Ra.T' \cdot \vec{e}_z \\ h_s = \frac{\rho H b^2}{k\delta T} \end{cases}, \quad (2-11)$$

h_s est la production de chaleur interne adimensionnée. Le nombre de Rayleigh, Ra , également sans dimension, caractérise la vigueur de la convection. Son expression varie selon le type de chauffage imposé dans le calcul:

- Si la chaleur ne provient que du flux thermique à la base du domaine ($h_s=0$), la température caractéristique est simplement la différence de température entre la base et le sommet de la boîte.

Le nombre de Rayleigh est

$$Ra = \frac{\rho_0 g \alpha_v \delta T b^3}{\mu \kappa}. \quad (2-12)$$

- Si le chauffage est d'origine interne ($h_s \neq 0$), la température caractéristique doit dépendre de la quantité d'énergie produite par cette source. Pendant le temps Δt , l'énergie produite est $\Delta E = \rho H \Delta t$, et l'élévation de température correspondante $(T - T_0) = \Delta E / \rho C_p$. La variation de température caractéristique est $\delta T = \rho H b^2 / k$, et le nombre de Rayleigh devient

$$Ra_H = \frac{\rho_0^2 g \alpha_v H b^5}{k \mu \kappa}. \quad (2-13)$$

Une application numérique au manteau supérieur de la Terre et à l'enveloppe superficielle de glace I des satellites de glace est présentée dans la table 2-2.

2.2 - Cas de la viscosité variable.

Pour prendre en compte les variations de viscosité, il est nécessaire de modifier les équations (2-11). Par ailleurs, le choix du nombre de Rayleigh pose problème, puisqu'il dépend directement de la viscosité. Plusieurs formulations sont classiquement utilisées, selon l'endroit du domaine où l'on définit la viscosité.

2.2.1 - Modification des équations de Navier-Stokes.

L'équation générale de l'écoulement d'un fluide (2-1) est obtenue en écrivant que les variations spatiales des contraintes additionnées aux forces de volume sont égales aux variations de quantité de mouvement du fluide,

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} - \vec{\nabla} p + \vec{f} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Le déviateur du tenseur des contraintes fait intervenir la viscosité du fluide et l'équation (2-3) n'est valable que si la viscosité du milieu est constante. Pour un fluide incompressible non isovisqueux, soumis à un champ de gravitation et un nombre de Prandtl infini, les équations de Navier-Stokes sont

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x_i} + f_i = 0. \quad (2-14)$$

Les équations de conservation de l'énergie et de la masse restent inchangées. Comme pour les autres paramètres et variables du modèle, on définit une viscosité adimensionnée μ' : $\mu = \mu_0 \mu'$, μ_0

étant la viscosité caractéristique du fluide. Dans le cas du manteau supérieur terrestre, on prendra $\mu_0=10^{21}$ Pa.s. Lorsque le fluide a une viscosité constante, μ' est égal à 1 en chaque point du domaine, indépendamment de la température. Finalement, les équations de Navier-Stokes 2D adimensionnées se réécrivent

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu' \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu' \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu' \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial P'}{\partial x} + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu' \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu' \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu' \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P'}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_z = Ra \cdot T' \end{cases} \quad (2-15)$$

2.2.2 - Choix du nombre de Rayleigh.

Le calcul du nombre de Rayleigh utilise une viscosité référence μ_0 dont il convient de préciser le domaine de validité. A priori, on peut définir un nombre de Rayleigh local en chaque point du domaine. Le nombre de Rayleigh perd son caractère global, et ne s'applique plus qu'à une petite région du système. Certains choix ont cependant plus de signification physique que d'autres. Par exemple, on peut définir μ_0 et Ra en surface (Ra_{surf}), de manière à mieux comprendre le régime en couvercle conducteur. Ou bien encore prendre la viscosité qui règne à l'intérieur de la partie homogène et isotherme du fluide, de façon à obtenir un nombre de Rayleigh le plus représentatif possible du système ($Ra_{z=1/2}$). Parallèlement, il faut adapter la loi de viscosité (§2.2.3) au choix du nombre de Rayleigh de telle manière que les solutions numériques du système (2-15) restent inchangées par le choix du couple $(\mu_0, Ra_{\text{local}})$. Les modifications dynamiques induites par le choix de la valeur numérique de Ra sont compensées par un réajustement (une renormalisation) de la loi de viscosité. Ainsi, les résultats obtenus avec $\mu(T_{\text{surf}})$, $\mu'(T')=\mu'_{\text{surf}}(T')$ et $Ra_{\text{numérique}}=Ra_{\text{surf}}$ sont identiques à ceux calculés par $\mu(T_{z=1/2})$, $\mu'(T')=\mu'_{z=1/2}(T')$ et $Ra_{\text{numérique}}=Ra_{z=1/2}$, ($\mu'(T)$ étant la loi de viscosité adimensionnée). Par ailleurs, étant donnée la forme de la loi de viscosité, il est possible de relier facilement les différents Rayleigh entre eux. Par exemple, si on choisit une loi de type exponentielle, Ra_{surf} et $Ra_{z=1/2}$ vérifient

$$Ra_{z=1/2} = \exp(\gamma \bar{\theta}) \cdot Ra_{\text{surf}}, \quad (2-16a)$$

où $\bar{\theta}$ est la température adimensionnée du coeur isotherme de la cellule (température médiane), et $1/\gamma$ une échelle de température. Dans le cas d'une loi exponentielle, γ est égal au logarithme du saut de viscosité sur toute la hauteur de la cellule. Deux autres nombres de Rayleigh pourront être

utiles. Celui calculé en base de boîte, Ra_{base} , et celui qui correspond à la température médiane $T = (T_{surf} + T_{base})/2$, $Ra_{1/2}$ (nombre de Rayleigh médian). Ils sont liés à Ra_{surf} par

$$Ra_{1/2} = \exp(\gamma/2) \cdot Ra_{surf} \quad (2-16b)$$

$$\text{et } Ra_{base} = \exp(\gamma) \cdot Ra_{surf} . \quad (2-16c)$$

Le choix de $Ra_{1/2}$ se révèle peu judicieux, car non représentatif de la sous-couche convectrice. Par exemple, *Richter et al.* (1983) notent que sur leurs profils de température, la valeur $T_{1/2}$ est atteinte avant la zone isotherme. Il en va de même dans nos expériences numériques (§3.2.2, fig. 3-3). $Ra_{1/2}$ a tout de même un avantage: puisqu'il est indépendant de la température du milieu isotherme, il est parfaitement connu dès le début du calcul. On sera donc amené à l'introduire dans la présentation de certains résultats, ainsi que pour effectuer des comparaisons avec de précédentes études, tout en gardant à l'esprit qu'il n'a pas de signification physique précise.

2.2.3 - Loi de viscosité numérique.

Dans l'équation (2-15), les variations de viscosité en fonction de la température (et éventuellement d'autres paramètres) sont introduites par l'intermédiaire de μ' . Dans notre modèle, la viscosité est déterminée par une loi exponentielle dépendant de la température adimensionnée (fig. 2-1a),

$$\mu(x, z) = \mu_0 \cdot \exp\left\{-\gamma[\theta(x, z) - \bar{\theta}]\right\}. \quad (2-17)$$

Le terme exponentiel correspond à la viscosité dimensionnée μ' . $\bar{\theta}$ est la moyenne horizontale de la température à mi-hauteur, et γ est une constante qui caractérise les variations de viscosité,

$$\Delta\mu = \frac{\mu_{surf}}{\mu_{base}} = \exp(\gamma). \quad (2-18)$$

La viscosité dépend ainsi fortement de la température et varie aussi bien avec la profondeur que latéralement. En particulier, quasiment toutes les variations de viscosité sont encaissées par la partie supérieure et la partie inférieure de la boîte, précisément là où le gradient thermique est fort. En revanche, dans le coeur de la cellule, la viscosité reste approximativement constante. Les variations latérales ont leur importance, puisqu'elles permettent de tenir compte des panaches chauds (ascendants) et froids (descendants). La figure 2-1b est un exemple de profil visqueux (avec $\Delta\mu=10^6$).

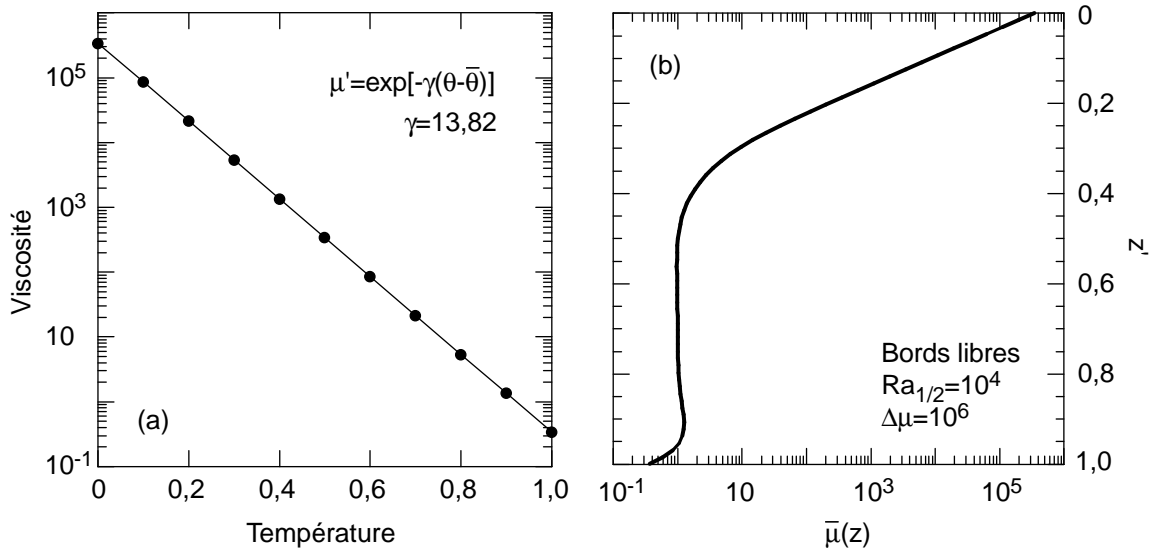


Figure 2-1. (a) Loi de viscosité exponentielle. (b) Exemple de profil de viscosité adimensionnée. $\Delta\mu = 10^6$, boîte 64x64, bord supérieur libre.

La viscosité est proche de la viscosité caractéristique partout où la température est proche de $\bar{\theta}$. Cette condition est effectivement vérifiée dans la partie centrale du domaine, où le profil thermique est adiabatique, y compris pour des valeurs élevées de $\Delta\mu$. La température $\bar{\theta}$ est donc tout à fait représentative de la température régnant dans la cellule de convection. Une conséquence directe est que le nombre de Rayleigh est calculé au centre du fluide. La température moyenne à mi-hauteur change à chaque itération du champ de température, et la loi de viscosité suit cette évolution. Au pas i , la viscosité est décrite par

$$\mu^i(x, z) = \mu_0 \cdot \exp\left\{-\gamma\left[\theta^i(x, z) - \bar{\theta}^i\right]\right\}. \quad (2-19)$$

Mais, en notant que la valeur initiale de $\bar{\theta}$ vaut 0,5, la viscosité peut se réécrire

$$\mu^i(x, z) = \mu_0 \cdot a^i \cdot \exp\left\{-\gamma\left[\theta^i(x, z) - 0.5\right]\right\} \quad \text{où} \quad a^i = \exp\left\{\gamma\left[\bar{\theta}^i - 0.5\right]\right\}. \quad (2-20)$$

Ainsi, si on souhaite résoudre le même problème physique à chaque itération, il faut diviser les différents termes des équations de Navier-Stokes par a^i . Autrement dit, le champ de pression et le nombre de Rayleigh sont réajustés à chaque pas de temps.

2.2.4 - Les limites de la loi de viscosité.

Il a déjà été précisé que la loi de viscosité utilisée dans ce modèle ne prenait pas en compte les effets de la pression, ni le comportement non-newtonien induit par un éventuel fluage par

dislocation. Le choix de la dépendance exponentielle en température constitue une autre approximation de la réalité. Elle a cependant l'avantage de créer de fortes variations de viscosité.

Les lois de fluage des principaux minéraux constituant le manteau terrestre suivent plutôt une loi d'Arrhénius dépendant de l'énergie et du volume d'activation (§1.3.1), ce qui implique pour la viscosité

$$\mu(x, z) = A \cdot \exp\left(\frac{Q}{RT(x, z)}\right) \quad \text{avec} \quad Q = E_a + pV_a.$$

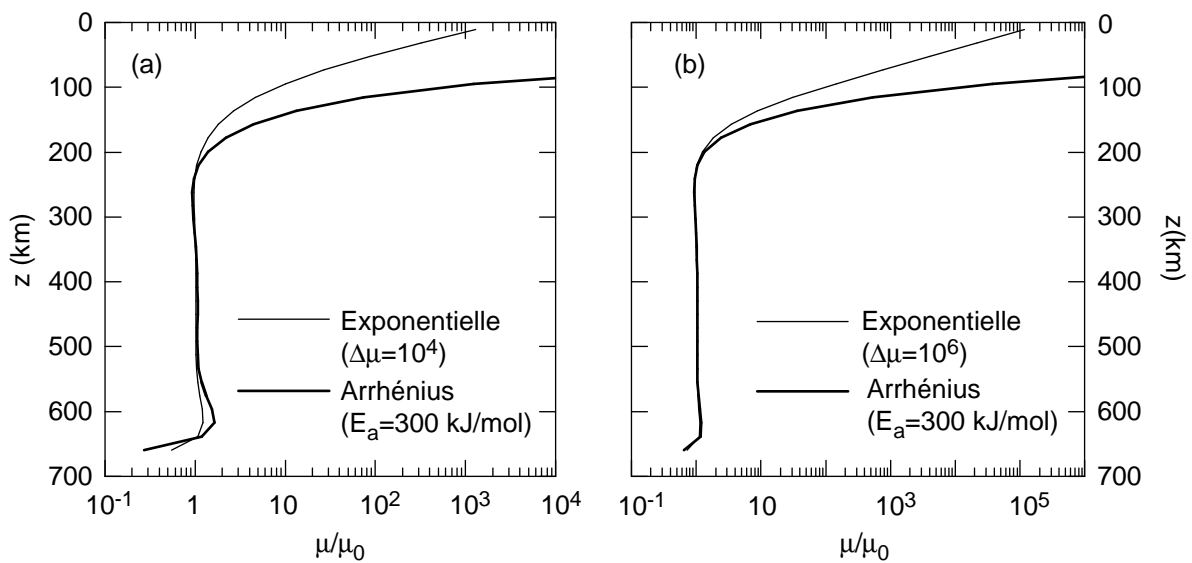


Figure 2-2. Comparaison des lois exponentielles et d'Arrhénius. L'exponentielle est caractérisée par le rapport global de viscosité $\Delta\mu$, et la loi d'Arrhénius par l'énergie d'activation E_a .

Afin de comparer, pour un champ de température donné, les profils de viscosité dérivant d'une exponentielle et d'une loi d'Arrhénius, A est choisit de manière à ce que la viscosité au centre de la cellule soit égale à μ_0 ,

$$A = \mu_0 \exp\left(-\frac{Q}{R\bar{T}_{z'=0,5}}\right),$$

et la viscosité adimensionnée définie par la loi d'Arrhénius est

$$\mu'(x, z) = \frac{\mu(x, z)}{\mu_0} = \exp\left[\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T(x, z)} - \frac{1}{\bar{T}_{z'=0,5}}\right)\right].$$

Dans cette expression, les températures sont dimensionnées. Le champ de température utilisé pour calculer μ' est le champ de température résultant du calcul numérique, redimensionné en fonction des températures en surface ($T_{\text{surf}}=273$ K) et à la base ($T_{\text{base}}=1873$ K). Quelques comparaisons sont présentées sur la figure 2-2. Les profils d'Arrhénius, comme les lois

exponentielles, respectent la partie adiabatique du profil thermique. Dans la couche limite inférieure, les deux profils de viscosité sont également en bon accord. En revanche, dans la partie supérieure (couche limite plus zone conductrice), la loi exponentielle et la loi d'Arrhénius divergent. En fait, le rapport global de viscosité prédit par les lois d'Arrhénius (avec une valeur de E_a proche de 300 kJ/mol) est beaucoup plus grand que le rapport global défini par la loi exponentielle. Enfin, on note que l'exponentielle se rapproche d'autant plus de la loi d'Arrhénius (y compris dans la couche limite supérieure) que le gradient de viscosité est élevé. A la limite d'un $\Delta\mu$ tendant vers l'infini, les deux lois se confondent.

2.3 - Flux thermique.

2.3.1 - Calcul du Nombre de Nusselt.

La comparaison des flux thermiques convectif et conductif permet de caractériser l'efficacité du transport de chaleur par convection. Le flux de chaleur convectif est la somme du flux diffusif et du flux advectif,

$$q_{\text{Convec}} = k \frac{\partial T}{\partial z} - \rho C_p u_z T. \quad (2-21)$$

Le flux de chaleur moyen à la profondeur z , $\bar{q}_{\text{Convec}}(z)$, se déduit simplement de la quantité de chaleur $E(z)$ traversant cette profondeur. En 2D, on a

$$E(z) = \int_0^L q_{\text{Convec}} \cdot dl \quad \text{et} \quad \bar{q}_{\text{Convec}}(z) = \frac{1}{L} \int_0^L q_{\text{Convec}} \cdot dl.$$

Si la chaleur était transportée uniquement par conduction, le flux de chaleur serait constant dans toute la boîte, et ne dépendrait que de la hauteur du domaine et des températures à sa surface et à sa base. Ce flux de chaleur est pris comme flux caractéristique,

$$q_0 = k(T_1 - T_0)/b. \quad (2-22)$$

Le nombre de Nusselt, Nu , est défini par la moyenne horizontale du flux convectif, divisé par le flux conductif,

$$Nu = \frac{\bar{q}_{\text{Convec}}}{k(T - T_0)/b}. \quad (2-23)$$

Nu s'écrit plus simplement en fonction des variables adimensionnées T' , u'_z et z' ,

$$Nu = \left(\overline{\frac{\partial T'}{\partial z} - u'_z T'} \right). \quad (2-24)$$

En l'absence de chauffage interne, la conservation de l'énergie implique un flux de chaleur constant sur toute la hauteur du domaine. En particulier, $Nu_{haut}=Nu_{bas}$. Si on rajoute une quantité h_s de production de chaleur interne, la conservation de l'énergie devient

$$Nu(z')=Nu_{bas}+(1-z').h_s. \tag{2-25}$$

La conservation de la masse implique une vitesse verticale nulle en surface. Il en découle une expression du nombre de Nusselt encore plus simple,

$$Nu = Nu_{haut} = \left. \frac{\partial T'}{\partial z'} \right|_{z'=0} + h_s. \tag{2-26}$$

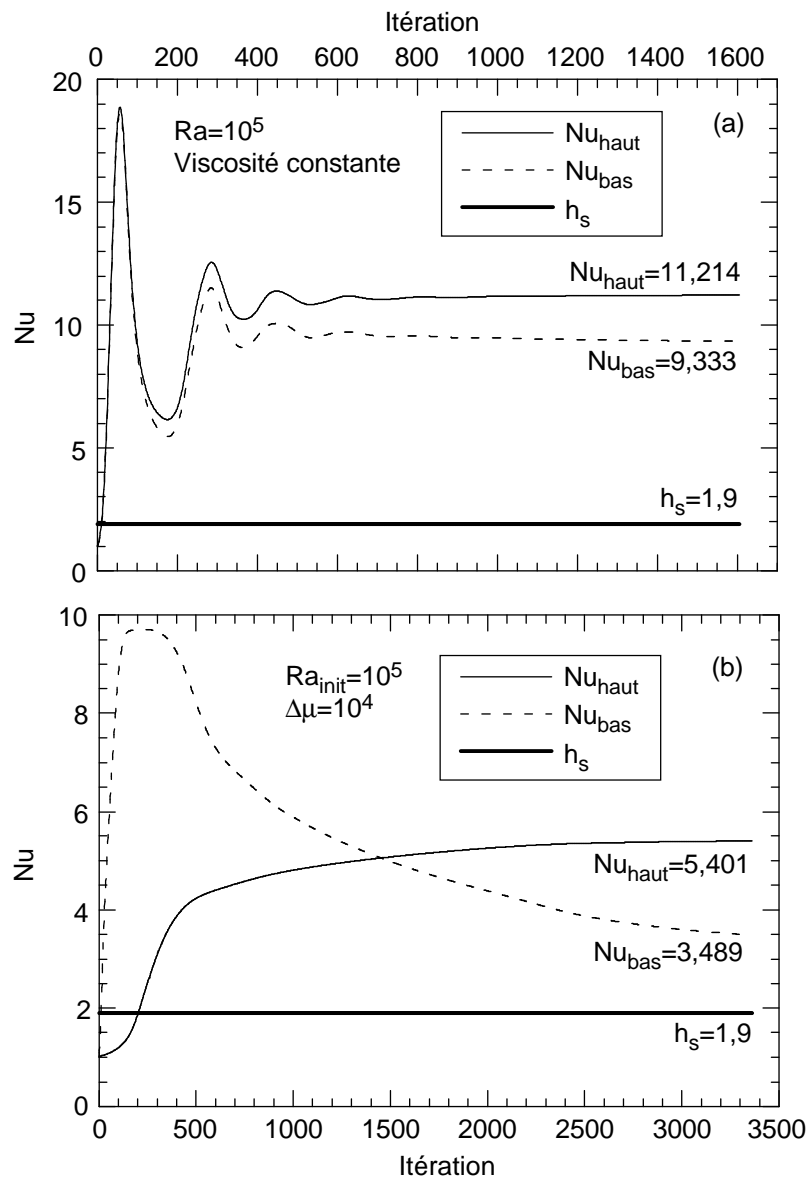


Figure 2-3. Comparaison des flux adimensionnés au sommet et à la base de la boîte. Chauffage interne: $h_s=1,9$. Taille de la grille: 32×32 , conditions de bords libres, $Ra=10^5$. (a) Viscosité constante; (b) $\Delta\mu=10^4$. En fin de calcul, on vérifie bien l'égalité: $Nu_{haut}=Nu_{bas}+h_s$.

2.3.2 - Conservation de l'énergie.

L'énergie qui traverse la base de la boîte est dissipée uniquement au sommet de ce domaine. Les frontières verticales sont supposées parfaitement adiabatiques. Cette approximation est justifiée par le fait que les planètes ne peuvent échanger de la chaleur avec le milieu extérieur qu'au niveau de leur surface. De même, l'énergie produite par désintégration radioactive h_s (s'il y en a une) est intégralement transportée vers la surface. Dans un premier temps, il est important de vérifier que la différence entre le flux de chaleur au sommet et à la base est égal à la quantité de chauffage interne (fig. 2-3).

L'égalité entre le nombre de Nusselt calculé en surface et celui calculé à la base n'est cependant pas un critère de convergence suffisamment strict. En particulier, elle ne vérifie pas nécessairement l'équation (2-25). Un autre critère, basé sur la stabilité du champ de température, sera utilisé pour décider de la convergence de la solution (§ 2.4.5).

2.3.3 - Influence de la dissipation visqueuse.

Lors de son mouvement, chaque particule du fluide dissipe une petite quantité de chaleur par frottement contre ses voisines. Cette énergie vient s'ajouter au flux de chaleur provenant de la base du domaine et au chauffage interne, mais elle est négligée dans la plupart des modèles numériques.

La densité volumique d'énergie produite par ces frottements est définie par le travail des contraintes visqueuses (p.e. *Jarvis and Peltier*, 1989), et elle s'exprime par la somme

$$\Phi = \tau_{ij} \cdot \frac{\partial V_i}{\partial x_j}, \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (2-27)$$

Le terme de dissipation visqueuse, Φ , est ajouté à la conservation de l'énergie,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + \frac{H}{C_p} + \frac{\Phi}{\rho C_p}. \quad (2-28)$$

En écrivant que Φ s'exprime en fonction de la densité d'énergie adimensionnée Φ' et d'une dissipation caractéristique $\Phi_0 = \mu_0 \kappa^2 / b^4$, on obtient une nouvelle expression pour l'équation adimensionnée de la conservation de l'énergie,

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \Delta T' - \vec{V}' \cdot \vec{\nabla}' T' + \frac{\rho H b^2}{k \delta T} + \frac{\mu_0 \kappa^2}{k \delta T b^2} \Phi', \quad \text{où} \quad \Phi = \mu_0 \frac{\kappa^2}{b^4} \Phi'. \quad (2-29)$$

On peut réécrire le coefficient numérique du terme dissipatif à l'aide du nombre de Rayleigh et d'un nouveau nombre sans dimension, Di , représentatif de l'énergie dissipée:

$$\frac{\mu_0 \kappa^2}{k \delta T b^2} = \frac{Di}{Ra} \quad \text{avec} \quad Ra = \frac{\rho g \alpha_v \delta T b^3}{\mu_0 \kappa} \quad \text{et} \quad Di = \frac{\rho g \alpha_v \kappa b}{k} \quad (2-30)$$

Avec $\rho=3500 \text{ kg/m}^3$, $g=9,81 \text{ m/s}^2$, $\alpha_v=2,4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\kappa=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $b=660 \text{ km}$, $k=3,0 \text{ W/m/K}$, $\mu=10^{21} \text{ Pa.s}$ et $\delta T=1600 \text{ K}$, on a $\Phi_0=5,3 \times 10^{-15} \text{ W/m}^3$, $Di=0,18$ et $Di/Ra=4,78 \times 10^{-7}$.

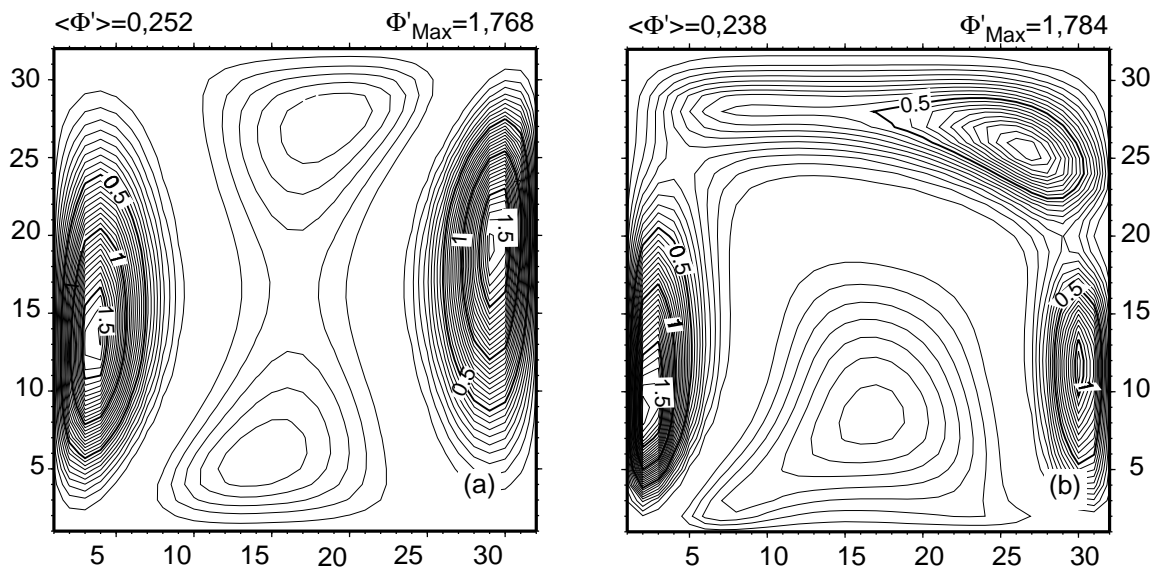


Figure 2-4. Dissipation visqueuse. $Ra_{init}=10^5$, $Di=0,18$. (a) viscosité constante; (b) $\Delta\mu=10^4$.

A priori, puisque $Di/Ra \ll h_s$, la dissipation visqueuse est négligeable devant les autres sources le chauffage interne. Il faut cependant tenir compte de la gamme de valeurs dans laquelle va se placer la densité d'énergie adimensionnée. En particulier, Φ' peut prendre des valeurs élevées dans les régions à forts gradients de vitesses ou à viscosité élevée (cas de la viscosité variable). La répartition de dissipation visqueuse adimensionnée ($D' = Di/Ra \cdot \Phi'$, fig. 2-4) montre que la chaleur dissipative est effectivement maximum dans le coeur des panaches ascendants et descendants (car la circulation est importante). Dans une moindre mesure et lorsque la viscosité varie, elle est également importante dans une zone de forte viscosité qui s'établit au sommet du fluide. A ces endroits, la dissipation visqueuse est comparable à la production de chaleur interne (de l'ordre de 2,0 en valeur adimensionnée). Mais en moyenne, le taux de dissipation visqueuse ne représente que 10% de la production de chaleur interne. Cette fraction dépend peu du rapport de viscosité: quelque soit $\Delta\mu$, la dissipation visqueuse moyenne reste comprise entre 0,2 et 0,3 (fig. 2-5a). Il y a peu de différence entre les nombres de Nusselt avec et sans dissipation

visqueuse (fig.2-5b). De même, les profils de température sont très proches (fig. 2-5 c et d), bien que les distributions thermiques ne soient pas complètement similaires : les champs thermiques dissipatifs sont plus chauds de 2% en moyenne.

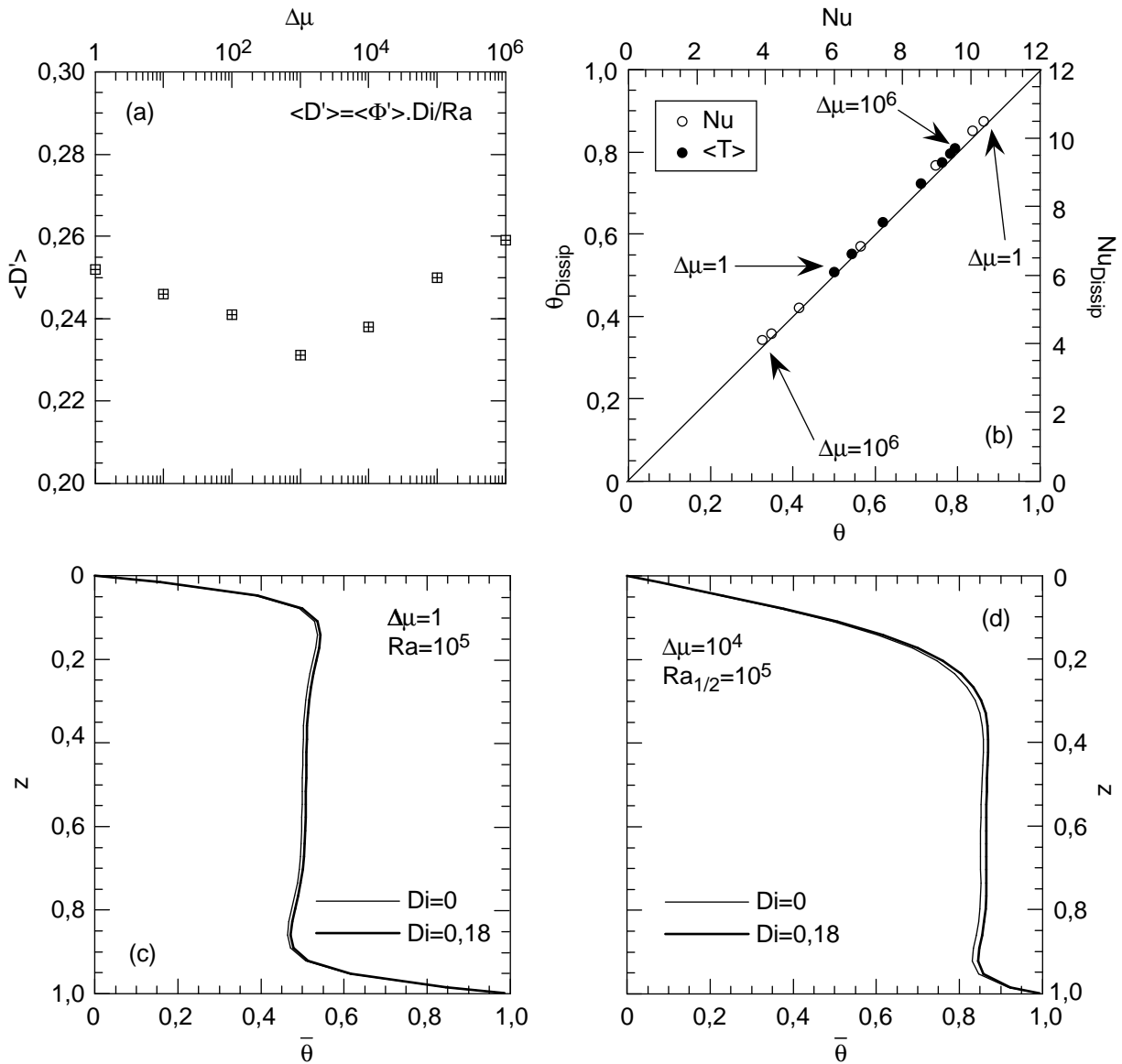


Figure 2-5. (a) Taux de dissipation visqueuse moyen en fonction du rapport de viscosité. (b) Influence de la dissipation visqueuse sur le nombre de Nusselt et la température moyenne. (c-d) Profils thermiques avec et sans dissipation, à viscosité constante (c) et pour $\Delta\mu=10^4$ (d). $Ra_{1/2}=10^5$, $Di=0,18$.

Sur l'ensemble du fluide, la dissipation visqueuse reste petite et ne modifie pas fondamentalement la structure de l'écoulement et le transfert thermique. Mais elle n'est sans doute pas négligeable dans les panaches et à l'interface couvercle/couche limite thermique. Par ailleurs, des calculs sur des grilles plus fines sont nécessaires pour mieux approcher la production de

chaleur par dissipation visqueuse et ses effets. Toutefois, dans la suite de ce travail, et par soucis de simplification, on négligera cet apport de chaleur.

2.4 - Formulation et résolution du problème numérique.

Les grandeurs géophysiques intéressantes (champs de température et de vitesse) découlent de la résolution des équations de la convection thermique. Dans le cas d'un fluide à viscosité variable, les équations à résoudre sont données (sous leur forme adimensionnée) par le système (2-15). Même simplifiées, ces équations restent non-linéaires. *Turcotte et Oxburgh* (1967) en proposent une solution analytique distinguant chaque partie de la cellule (le coeur, les couches limites thermiques, et les panaches), mais elles n'ont pas de solution analytique globale. En revanche, ces équations se prêtent bien à la modélisation numérique.

2.4.1 - Géométrie et conditions aux limites.

Le système (2-15) n'admet pas de solution unique. Par exemple, il conduit à des résultats différents selon la géométrie du domaine étudié, et selon les conditions physiques qui règnent aux frontières de ce domaine. Il est donc nécessaire de choisir une géométrie et de préciser des conditions aux limites, aussi bien sur la température que sur la vitesse.

- *Géométrie.* Cette étude se limite à des boîtes cartésiennes bidimensionnelles, carrées ou rectangulaires, de longueur L et de hauteur h . L'origine des abscisses est prise à gauche, l'origine verticale en haut de la boîte. En variables adimensionnées, $h=1$ et L est un entier.

- *Conditions aux limites thermiques.* Thermiquement, les échanges de chaleur avec l'extérieur ne se produisent qu'à la base et au sommet du domaine. Il n'y a aucune perte latérale d'énergie, les bords verticaux de la boîte étant parfaitement adiabatiques,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0, 0 \leq z \leq h} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L, 0 \leq z \leq h} = 0. \quad (2-31)$$

La base du domaine est en contact avec un milieu plus chaud. Un transfert d'énergie s'opère vers l'intérieur du domaine. Ce flux de chaleur peut être modélisé en imposant une température à la base du fluide. Le domaine se refroidit par le sommet, où il est en contact avec un milieu extérieur plus froid. Sur la surface de la boîte, la température doit être égale à la température de ce milieu

extérieur. Pour un système ramené en variables adimensionnées dans lequel la température de référence est la température imposée en base de boîte, on a

$$T(x,z=0)=0 \quad \text{et} \quad T(x,z=1)=1. \quad (2-32)$$

• *Conditions aux limites cinématiques et mécaniques.* D'autres conditions aux limites doivent fixer la vitesse $\vec{V}(u,v)$ sur les bords de la boîte. Deux critères interviennent. Premièrement, on impose au système d'être isolé : il n'y a pas d'échange de matière avec le milieu extérieur. En conséquence la vitesse a une composante horizontale nulle en chaque point des bords verticaux, et une composante verticale également nulle partout sur les limites horizontales,

$$u(x=0,z)=0, \quad u(x=L,z)=0, \quad v(x,z=0)=0 \quad \text{et} \quad v(x,z=h)=0. \quad (2-33)$$

On impose ensuite des conditions de bords libre, c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement s'annulent sur les frontières de la boîte,

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (2-34)$$

Etant donnés les relations (2-33), les conditions de bord libre impliquent à leur tour

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0, 0 \leq z \leq h} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=L, 0 \leq z \leq h} = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{0 \leq x \leq L, z=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{0 \leq x \leq L, z=h} = 0 \end{array} \right. . \quad (2-35)$$

Afin de modéliser la tectonique des plaques, on est amené à remplacer le bord libre supérieur de la boîte par un bord rigide sur lequel on fixe une vitesse horizontale U_{surf} , la composante verticale de la vitesse restant nulle,

$$u(x,z=0)=U_{\text{surf}} \quad \text{et} \quad v(x,z=0)=0. \quad (2-36)$$

2.4.2 - Discrétisation.

Les solutions numériques des équations de la convection ne calculent pas les variables de l'écoulement en chaque endroit de la boîte, mais seulement en certains points définis par une grille plus ou moins fine. La boîte est ainsi découpée en plusieurs petites cellules. Ce modèle utilise un système de grilles croisées (fig. 2-6). Les variables scalaires (T , μ et P) sont calculées au centre de chaque cellule. En revanche, la composante verticale de la vitesse entraîne la cellule vers le haut ou vers le bas. Elle est déterminée au milieu de chacun des deux bords horizontaux

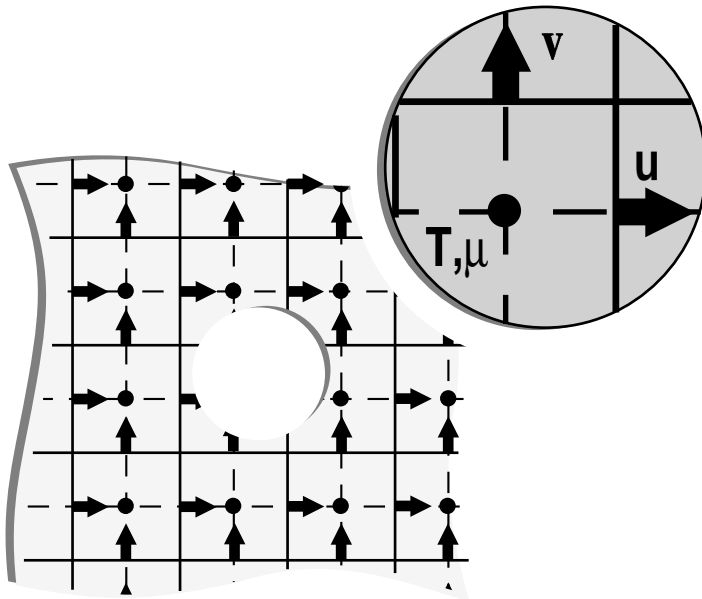


Figure 2-6. Principe des grilles croisées. Les variables scalaires (température et viscosité) sont calculées au centre des petites cellules, et les vitesses sur les milieux des segments de grille.

De chaque cellule. De même, la composante horizontale est définie au milieu des bords verticaux des petites cellules. Ce choix est bien adapté à la résolution des vitesses. En différences finies, il permet de calculer les termes $\partial(\mu \partial v / \partial z) / \partial z$, $\partial(\mu \partial v / \partial x) / \partial x$ et $\partial(\mu \partial u / \partial x) / \partial z$ au même point que v (de même, la composante horizontale de (2-15) est ramenée en u), moyennant une interpolation des viscosités sur les nœuds de la grille.

2.4.3 - Schéma numérique et relaxation.

A chaque itération, la température est réactualisée à partir des vitesses calculées lors du tour précédent. L'équation de Navier-Stokes est ensuite résolue pour cette nouvelle distribution thermique.

La résolution de la température est une simple relaxation explicite. Les dérivées sont exprimées en terme de différences finies. Le terme advectif est décrit par un schéma 'upwind' amélioré par *Spalding* (1972) (voir aussi *Patankar*, 1980, pp. 79-109). Les schémas classiques propagent les perturbations dans toutes les directions, sans tenir compte de la direction de la vitesse de propagation. Cela induit une diffusion artificielle dans de mauvaises directions. A l'inverse, le schéma 'upwind' tient compte du mouvement du fluide, ce qui inhibe partiellement d'éventuelles diffusions numériques parasites. La modification apportée par *Spalding* (le schéma exponentiel) est bien adaptée aux problèmes à haut nombre de Peclet ($Pe = Vb/\kappa$) (annexe 1).

Les équations de Navier-Stokes sont résolues par une méthode de relaxation ADI (Alternate Direction Implicit). Les composantes verticales et horizontales de la vitesse sont successivement réactualisées ligne par ligne (direction verticale), puis colonne par colonne (direction horizontale), chacun des deux balayages durant un demi pas de temps. Chaque ligne (colonne) est recalculée à

partir d'un schéma implicite et en différences finies (le schéma numérique est détaillé dans l'annexe 1). La pression est recalculée entre le balayage vertical et le balayage horizontal et à la fin du balayage horizontal. L'efficacité de la relaxation ADI est particulièrement sensible au choix du pas de temps de relaxation. Un pas de temps trop court conduit à des temps de calcul prohibitifs, tandis qu'un pas de temps trop long induit des erreurs numériques qui font diverger le calcul.

2.4.4 - Accélération de la convergence.

Dès que l'on cherche à résoudre exactement le problème numérique sur une grille relativement fine, le temps de calcul devient rapidement élevé, dans le cas d'une viscosité variable comme dans celui d'un fluide isovisqueux (fig. 2-7). Il peut sembler étrange que le temps utilisé pour une itération de température soit approximativement le même à viscosité variable et à viscosité constante. Ceci est simplement lié au fait que l'on a optimisé les paramètres de relaxation ADI. Ces paramètres sont différents selon le rapport de viscosité. En revanche, le temps nécessaire pour obtenir un état stationnaire est en général plus élevé dans le cas où la viscosité est variable.

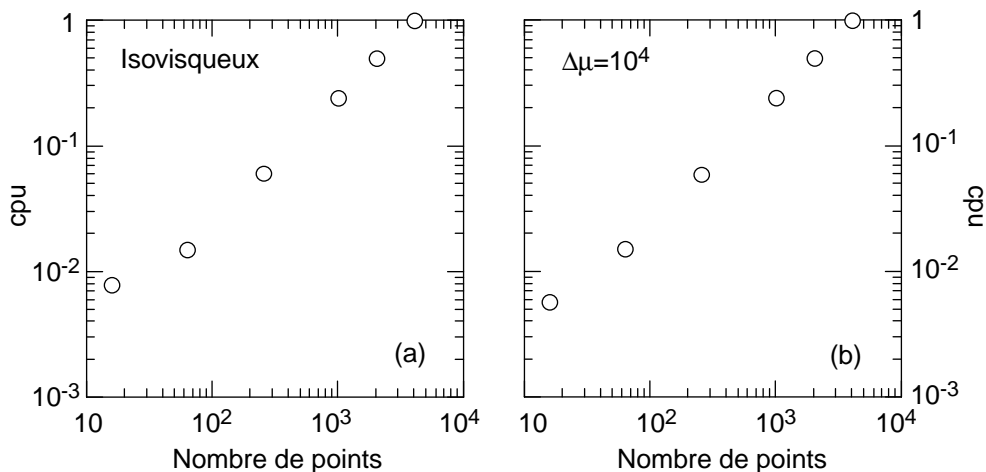


Figure 2-7. Evolution du temps cpu par itération de température avec le nombre de points de la grille ($N=n_z \times n_x$). (a) viscosité constante. (b) $\Delta\mu=10^4$.

Dans la résolution des équations de la convection, c'est plus spécialement l'équation de Navier-Stokes qui est coûteuse en temps. Dans ce travail, la résolution des équations de Navier-Stokes utilise une méthode d'accélération dite méthode multigrille. Une valeur approchée du champ de vitesse est d'abord obtenue en chaque point de la grille la plus fine. Les erreurs induites par cette approximation sont ensuite calculées précisément sur une série de grilles de plus en plus

grossières, la résolution exacte n'intervenant que sur la grille la plus grossière. Une description plus détaillée de la méthode multigrille est donnée dans l'annexe 1. Le résultat important est que cette technique est réellement efficace pour la résolution des équations de Navier-Stokes, y compris dans le cas de la viscosité variable.

2.4.5 - Critère de convergence.

Nous cherchons à obtenir l'état stationnaire des équations de Navier-Stokes. C'est précisément ce que font les méthodes numériques de relaxation. Il faut toutefois préciser à quel moment on considère que cet état stationnaire est atteint.

Dans un premier temps, on s'attachera à vérifier que le profil moyen du flux total est constant (ou, s'il y a du chauffage interne, que la pente de ce flux est égale à h_g) sur toute l'épaisseur du système (équation 2-25). Mais le critère d'arrêt le mieux adapté est basé sur l'évolution du champ de température. Le calcul est stoppé lorsque le maximum (recherché parmi les points de la grille) de la dérivée temporelle de la température est inférieure (en valeur absolue) à un certain seuil, ϵ . Une variante simple (mais valable seulement pour les fluides à viscosité variable) consiste à ne regarder que l'évolution de la température du milieu isotherme, $\bar{\theta}$. Cela revient à réaliser le test sur la moyenne des dérivées temporelles de la température.

Dans certains cas, il se peut que la température moyenne de la cellule, au lieu de tendre vers une asymptote, oscille autour d'une valeur moyenne. On dira que le champ thermique est convergé mais non-stationnaire. Le champ de température évolue dans le temps, mais reste autour d'une solution moyenne que l'on peut calculer, et il suffit de réaliser la moyenne sur un intervalle de temps suffisamment long.

2.4.6 - Incertitudes sur les résultats.

Deux types d'imprécisions doivent être prise en compte pour l'exploitation des résultats du modèle numérique. Il existe d'abord une petite erreur par rapport à l'état stationnaire. En toute rigueur, l'état stationnaire n'est obtenu qu'au bout d'un temps infini, et le calcul numérique n'en fournit qu'une approche plus ou moins précise. Cette précision est fixée par l'expérimentateur, qui décide de la durée du calcul. La précision sur le nombre de Nusselt est déduite du profil du flux thermique total. Ce profil est en principe constant sur toute l'épaisseur du fluide (§2.3.2). L'écart maximum à la valeur moyenne détermine l'incertitude sur le nombre de Nusselt. Dans le cas où les solutions sont convergées mais instationnaires, cette incertitude est plus importante.

La finesse du maillage se répercute directement sur la précision des calculs. Elle induit en général une incertitude bien supérieure à l'écart à l'état stationnaire. Il est possible de l'estimer par une série de calculs sur des grilles de différentes tailles. Pour chaque grille, un ensemble d'observables (Nu , $\bar{\theta}$, vitesse quadratique $U_q = \sqrt{U^2}$) est calculé et sert à définir un ensemble de valeurs extrapolées (table 2-3). L'écart à ces valeurs caractérise la précision atteinte par la grille. Il est important de noter que l'incertitude de grille augmente avec le nombre de Rayleigh. En effet, la finesse du maillage devient cruciale pour la description des couches limites thermiques, dont l'extension verticale peut devenir très fine (par exemple pour des nombres de Rayleigh élevés). Dans le cas d'un fluide isovisqueux, l'épaisseur moyenne d'une couche limite

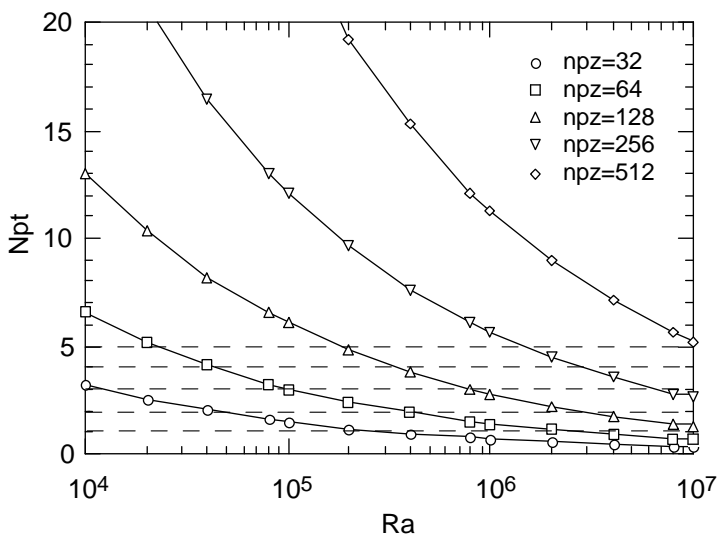


Figure 2-8. Nombre de points définissant la couche limite thermique moyenne (Npt) pour différents maillages verticaux (npz).

thermique est approchée par $\delta \sim b/Ra$. Plus Ra est élevé, meilleure doit être la définition de la grille (fig. 2-8). Cela rejoint les résultats du table 2-3. En viscosité variable, la couche limite thermique froide et le couvercle restent relativement épais, et le problème se pose plus particulièrement dans la couche limite thermique chaude, dont le comportement se rapproche d'une couche limite thermique isovisqueuse.

La table 2-3 suggère que les grilles 64x64 constituent un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats (~0,5% d'erreur sur $\bar{\theta}$ et ~2% sur Nu). La plupart des calculs utilisés dans ce travail ont une résolution verticale de 64 points.

2.4.7 - Benchmarking partiel.

Le modèle qui vient d'être présenté conduit à une loi paramétrisée isovisqueuse proche des résultats publiés dans de précédentes études (chapitre 1, §1.2.5). C'est déjà en soit un bon test de validité. Nous verrons dans le chapitre 3, que les résultats obtenus à viscosité variable sont également en bon accord avec les calculs de *Christensen* (1984a). Auparavant, il est intéressant

$Ra_{1/2}$	Grille	Nu	$\bar{\theta}$	$U_{surf}^{(1)}$	$U_{base}^{(1)}$	U_q
10^4	32x32	2,625	0,8738	2,703	-183,7	76,05
		2,3%	0,36%	1,2%	2,4%	1,2%
	48x48	2,652	0,8752	2,691	-182,3	76,49
		1,3%	0,21%	0,71%	1,6%	0,66%
	64x64	2,662	0,8758	2,686	-181,4	76,65
		1,0%	0,13%	0,52%	1,1%	0,45%
	96x96	2,669	0,8761	2,683	-180,7	76,77
0,7%		0,10%	0,41%	0,72%	0,30%	
128x128	2,672	0,8763	2,680	-180,4	76,82	
	0,6%	0,08%	0,30%	0,56%	0,23%	
	Extrapolation	2,688	0,877	2,672	-179,4	77,00
10^5	32x32	4,999	0,8629	22,76	-757,6	355,9
		4,8%	1,6%	7,1%	5,1%	2,2%
	48x48	5,107	0,8686	22,01	-751,1	355,5
		2,7%	0,96%	3,6%	4,2%	2,1%
	64x64	5,151	0,8712	21,73	-741,2	353,1
		1,9%	0,66%	2,3%	2,8%	1,4%
	96x96	5,188	0,8737	21,52	-731,8	351,1
1,2%		0,38%	1,3%	1,5%	0,80%	
128x128	5,203	0,8747	21,44	-727,9	350,3	
	0,9%	0,26%	0,89%	0,96%	0,57%	
	Extrapolation	5,250	0,877	21,25	-721,0	348,3

Table 2-3. Précision des observables selon la finesse du maillage, $\Delta\mu=10^4$: Nusselt, température moyenne, vitesse maximum en surface et à la base, vitesse quadratique.

d'effectuer quelques tests plus directs, en comparant un ensemble de paramètres issus de nos calculs avec une série de valeurs de référence (les 'benchmarks'). Le test proposé par *Blankenbach et al.* (1989) comprend le nombre de Nusselt, la vitesse quadratique (U_q), les gradients thermiques au coins de la boîte, et les extremum du profil de température à l'abscisse $x=0,5$ (le benchmarking suggéré par *Blankenbach et al.* donne aussi des valeurs de références pour la topographie et les anomalies du géoïde. Nous n'avons pas calculé ces quantités dans ce travail). Par ailleurs, on notera que les résultats adoptés par *Blankenbach et al.* (1989) sont quasiment ceux issus des modèles de *Christensen* (1984a). Au premier abord, les résultats peuvent paraître mitigés (table 2-4). Un premier point est que les calculs de résolution inférieure à 64x64 points ne donnent qu'une description approximative de la solution. Pour les calculs de résolution supérieure ou égale, les concordances sont bonnes en ce qui concerne Nu, U_q et les extremums de la température. En revanche, les gradients thermiques aux coins de la boîte posent problème, en particulier dans le coin inférieur droit. Ces quantités sont très sensibles à la façon dont on les calcule. Dans *Blankenbach et al.* (1989), les gradients de température sont

calculés en utilisant 3 points. A l'inverse, dans notre résolution numérique de la température, seuls la condition limite ($\theta=0$ en surface et $\theta=1$ à la base) et le point immédiatement sous la surface (ou au dessus de la base) sont considérés pour calculer le gradient en surface (ou à la base). Toujours dans notre modèle, la structure entrelacée des grilles (§2.4.2) est susceptible d'induire des modifications. Elle implique que la température est calculée au centre des petites cellules (les vitesses étant calculées sur les bords de cellules), et non aux noeuds de la grille. Les valeurs des gradients aux coins de grille ne peuvent donc être que des valeurs extrapolées, et les valeurs de $T_{x=1/2}$ ne sont pas tout à fait calculée à la même profondeur que dans le cas du Benchmark.

Grille	Nu	$T_{x=1/2}$		Gradients thermiques				U_q
		min	max	1	2	3	4	
$Ra=10^5, \Delta\mu=1$								
32x32	10,035 4,7%	0,4352 1,6%	-	17,862 6,4%	1,193 -	-	-	189,07 2,1%
48x48	10,263 2,6%	0,4312 0,65%	-	18,499 3,0%	0,872 21%	-	-	190,97 1,2%
64x64	10,367 1,6%	0,4304 0,45%	-	18,744 1,6%	0,796 10%	-	-	191,82 0,72%
96x96	10,454 0,76%	0,4296 0,28%	-	18,925 0,81%	0,752 4,0%	-	-	192,54 0,35%
128x128	10,487 0,45%	0,4290 0,14%	-	18,993 0,45%	0,737 1,9%	-	-	192,82 0,20%
Benchmark	10,534	0,4284	-	19,079	0,723	-	-	193,21
$Ra_{surf}=10^4, \Delta\mu=10^3$								
32x32	10,620 5,5%	0,6769 9,4%	0,7642 8,2%	22,243 27%	0,970 3,9%	20,593 23%	4,503 -	456,74 4,9%
48x48	10,194 1,3%	0,7137 3,6%	0,8014 3,7%	18,997 8,4%	0,963 4,6%	23,815 11%	2,584 -	475,05 1,1%
64x64	10,101 0,35%	0,7245 2,1%	0,8130 2,3%	18,248 4,1%	0,973 3,6%	25,316 5,6%	1,499 -	477,37 0,63%
96x96	10,065 0,01%	0,7327 1,1%	0,8224 1,2%	17,817 1,6%	0,989 2,0%	26,259 2,1%	0,809 63%	478,55 0,39%
128x128	10,061 0,05%	0,7359 0,62%	0,8263 0,72%	17,687 0,88%	0,996 1,3%	26,548 1,0%	0,649 31%	479,16 0,35%
Benchmark	10,066	0,7405	0,8323	17,531	1,009	26,809	0,497	480,43

Table 2-4. Benchmarking pour les cas $Ra=10^5$, isovisqueux et $Ra_{surf}=10^4$, $\Delta\mu=10^3$. Les Gradients thermiques q_i sont numérotés à partir du coin inférieur gauche et dans le sens trigonométrique. Dans les cas isovisqueux $q_3=q_2$ et $q_4=q_1$. Les 'benchmarks' sont d'après *Blankenbach et al.* (1989).

Conclusion.

Le modèle numérique développé dans ce travail est fiable, pour peu que les calculs soient effectués sur des grilles suffisamment fines. Il s'accorde bien avec de précédentes études, et permet d'atteindre des rapports de viscosité élevés dans une gamme de nombre de Rayleigh étendue. Numériquement, nous avons vu que la méthode multigrille était bien adaptée à la résolution des équations de la convection à viscosité variable.

Une étude systématique du flux de chaleur en fonction du contraste de viscosité et du nombre de Rayleigh peut être entreprise, avec pour objectif d'obtenir une paramétrisation de ce flux de chaleur et une meilleure compréhension des effets de la viscosité variable.

Chapitre 3

Expériences numériques: résultats et paramétrisations.

Mes prévisions se trouveraient vérifiées complètement, si seulement nous avions un vent favorable. Bien d'autres avant nous, n'ont ils pas attendu une bonne brise?

(Fridtjof Nansen, Vers le Pôle, 1897)

Sommaire

Introduction	73
3.1 Quelques expériences numériques et analogiques	73
3.2 Les résultats du modèle numérique	76
3.2.1 Flux de chaleur	76
3.2.2 Profils et distributions thermiques	77
3.2.3 Vitesses et contraintes	82
3.2.4 Relation entre le nombre de Rayleigh et le flux de chaleur	84
3.3 Importance de la condition limite en surface	87
3.3.1 Surface rigide et fixe	87
3.3.2 Surface mobile	91
3.4 Le régime de couvercle conductif	93
3.4.1 Condition d'apparition du couvercle	94
3.4.2 Jeu de données	97
3.4.3 Détermination du couvercle : méthode du flux de chaleur	99
3.4.4 Définition d'une échelle de température visqueuse	103
3.4.5 Saut de température dans la couche limite thermique du bas	107
3.4.6 Paramétrisation sur toute l'épaisseur de la boîte	108
3.4.7 Paramétrisation des autres observables	111
3.4.8 Régime transitoire	112

3.5 Discussion : détermination du couvercle et rôle des couches

limites thermiques 113

3.5.1 Comparaison avec d'autres études 113

3.5.2 Délimitation du régime de couvercle 116

3.5.3 Détermination des couches limites thermiques 119

3.5.4 Erosion thermique du couvercle 126

3.5.5 Saut thermique dans la couche limite du bas:

 redimensionnement 128

3.5.6 Application au manteau inférieur 129

3.6 Les limites du modèle 131

3.6.1 Rôle du chauffage interne 131

3.6.2 Géométrie 133

3.6.3 Rhéologie non-newtonienne 134

Conclusion 135

Introduction.

Une application directe du modèle numérique présenté dans le chapitre précédent est de mieux comprendre les modifications induites par la viscosité variable sur les transferts de chaleurs. Ce problème est activement étudié expérimentalement et numériquement depuis plus d'un quart de siècle. Ces travaux ont mis en évidence deux difficultés à la paramétrisation du flux de chaleur. Tout d'abord, le flux de chaleur n'est pas décrit par un unique paramètre, le nombre de Rayleigh. Ensuite, un seul régime de convection n'explique pas l'ensemble des combinaisons $(Ra, \Delta\mu)$. On peut cependant, pour un régime donné, déterminer une paramétrisation du flux de chaleur.

Lorsque les variations de viscosité sont suffisantes et que le nombre de Rayleigh de surface ne dépasse pas une valeur critique (de l'ordre de 1500 pour un rapport de viscosité de 10^4), la convection se produit selon le régime de couvercle conducteur. Dans le cas de chauffage interne seul, une méthode de détermination de ce couvercle donne de bon résultats (*Davaille et Jaupart, 1993; Grasset et Parmentier, 1997*). En chauffage par le bas, la présence d'une couche limite à la base du fluide modifie les données du problème.

3.1 - Quelques expériences analogiques et numériques.

Les premiers modèles numériques se limitent à l'observation de l'impact des variations de viscosité sur la structure l'écoulement. Dans les calculs de *Foster (1969)*, la viscosité dépend uniquement de la profondeur. Les variations de viscosité ont pour effet de réduire l'épaisseur de la zone convective : la circulation reste confinée dans les régions de faible viscosité, alors que dans la couche où la viscosité est la plus élevée l'écoulement est freiné. *Torrance et Turcotte (1971)* font les mêmes observations, mais pour une viscosité dépendant directement de la température. Il notent également que la température au centre de la cellule augmente avec le rapport de viscosité : le couvercle visqueux qui se développe au sommet de la zone convective freine l'évacuation vers la surface de la chaleur contenue dans la cellule. Ces premières études ne proposent pas de loi paramétrisée, en particulier parce qu'elles n'atteignent pas encore des nombres de Rayleigh suffisamment élevés.

Les expériences analogiques ont permis d'aller plus loin, au moins dans le cas de frontières rigides. Parallèlement, elles mettent bien en évidence l'apparition d'un couvercle conducteur et rigide au sommet de la boîte. Plutôt que d'occuper toute l'épaisseur du domaine, la convection s'établit dans une sous-couche, plus instable que la couche totale. L'épaisseur plus faible de la

sous-couche, qui devrait rendre le démarrage de la convection plus difficile, est compensée par la chute de la viscosité. *Booker* (1976) réalise des expériences dans l'intervalle de rapport de viscosité $1,4 \leq \Delta\mu \leq 300$, et observe une diminution du nombre de Nusselt lorsque le rapport de viscosité augmente. Représentés en fonction de $Ra_{1/2}$ (le nombre de Rayleigh médian, défini à la température médiane $T_{1/2} = 1/2(T_{\text{surf}} + T_{\text{base}})$), ces nombres de Nusselt s'écartent d'au maximum 12% (pour $\Delta\mu = 300$) d'une loi isovisqueuse obtenue par *Rossby* (1969). Pour un $\Delta\mu$ donné, les points $(Ra_{1/2}, Nu)$ ont la même pente ($\beta = 0,281$) que la loi isovisqueuse, mais sont légèrement décalées vers des valeurs plus basses. *Booker et Stengel* (1978) montrent que le comportement du nombre de Nusselt peut être expliqué par une augmentation du nombre de Rayleigh critique Ra_c du système. Il est ainsi possible d'obtenir une paramétrisation (Ra, Nu) indépendante de $\Delta\mu$. En fait, la dépendance reste implicite, par l'intermédiaire de Ra_c . *Stengel et al.*, (1982) montrent numériquement et expérimentalement que Ra_c possède un maximum vers $\Delta\mu = 3000$. *Nataf et Richter* (1982) réalisent des expériences jusqu'à $\Delta\mu = 10^5$, qui confirment et complètent les résultats précédents. En particulier, le nombre de Nusselt semble amorcer une remontée vers $\Delta\mu = 5000$. Là encore, quelque soit $\Delta\mu \leq 10^5$, les points expérimentaux se rangent dans un intervalle de 20% par rapport à la loi isovisqueuse de *Rossby* (*Richter et al.*, 1983), et vérifient la paramétrisation: $Nu = 1,46 \cdot (Ra_{1/2} / Ra_c)^{0,281}$.

Un résultat important de ces expériences est que la majorité du saut de viscosité est supporté par le couvercle, la sous-couche se comportant comme un fluide presque isovisqueux. La loi du couvercle, proposée par *Nataf et Richter* (1982) (voir aussi *Nataf*, 1986), énonce que passé un $\Delta\mu$ seuil, le saut de viscosité dans la cellule convectrice reste constant et ne dépend plus de $\Delta\mu$. Autrement dit, un incrément supplémentaire de $\Delta\mu$ renforce le couvercle, mais ne modifie pas d'avantage les propriétés de la sous-couche convectrice. La loi du couvercle permet d'extrapoler des résultats obtenus pour un certain rapport de viscosité à des contrastes plus élevés.

Le modèle numérique de *Christensen* (1984a) ne dégage pas de loi simple indépendante de $\Delta\mu$. A l'inverse, la paramétrisation du flux chaleur requiert un second paramètre pour tenir compte de l'amplitude des variations de viscosité. Pour cette raison, la paramétrisation proposée par *Booker* (1976) n'est pas satisfaisante. Les résultats de *Christensen* soulèvent un autre problème: pour un contraste de viscosité donné, la pente logarithmique dépend également du nombre de Rayleigh. Cette caractéristique est atténuée lorsque le nombre de Nusselt est représenté en fonction de $Ra_{1/2}$. En revanche, elle est très marquée lorsque c'est le Rayleigh défini à la température

moyenne ($Ra_{\bar{\theta}}$) qui est utilisé. Le choix du nombre de Rayleigh se révèle donc important. $Ra_{\bar{\theta}}$ dépend de la température moyenne et prend ainsi en compte les variations de viscosité. En revanche, l'information sur la viscosité contenue dans $Ra_{1/2}$ ne se répercute pas sur sa valeur numérique, mais sur sa localisation (plus précisément sur la localisation de l'isotherme 0,5). En choisissant de paramétrer le flux de chaleur en fonction du $Ra_{1/2}$, on perd l'information sur la viscosité variable, ce qui biaise de fait la paramétrisation.

Les résultats de Christensen suggèrent l'existence de différents régimes selon les valeurs de Ra et $\Delta\mu$. La délimitation de ces différents régimes a fait l'objet d'études récentes (*Solomatov, 1995* et *Moresi et Solomatov, 1995*). Pour des petites variations de viscosité ($\Delta\mu \leq 10^{-10^2}$), il n'apparaît pas de couvercle, et la convection n'est que légèrement modifiée par rapport au cas isovisqueux (régime global). A l'inverse, passé $\Delta\mu \geq 10^4-10^5$, le rôle du couvercle est prépondérant et définit un second régime (régime de couvercle). Entre ces deux limites, la convection suit un régime transitoire. Sur la base de calculs numériques, *Moresi et Solomatov (1995)* situent la frontière régime transitoire/régime de couvercle autour de $\Delta\mu = 10^4$, indépendamment du nombre de Rayleigh.

Christensen (1984a) et *Moresi et Solomatov (1995)* présentent leurs résultats en fonction de l'épaisseur totale de la boîte. Une paramétrisation limitée à la seule sous-couche convectrice pourrait constituer une solution alternative. L'hypothèse de base est que le saut de viscosité dans cette sous-couche est suffisamment faible (10^2 au grand maximum) pour qu'on puisse la décrire à l'aide du régime global. Le principal problème est la détermination de la limite couvercle/couche limite thermique. Par exemple, *Moresi et Solomatov (1995)* ne font pas de distinction entre le couvercle et la couche limite. La détermination de la profondeur du couvercle nécessite en fait une hypothèse supplémentaire. Dans le cas d'un fluide refroidi en surface (ou, ce qui revient au même, avec chauffage interne), *Davaille et Jaupart (1993)* supposent que le saut de viscosité dans les couches limites thermiques est indépendant de Ra et de $\Delta\mu$. Cela conduit à une relation simple entre le saut de température dans la couche limite supérieure ΔT_e et une 'échelle de température visqueuse' ΔT_v , dérivée de la loi de viscosité:

$$\Delta T_e = c \Delta T_v \quad (3-1)$$

$$\text{avec } \Delta T_v = - \frac{\mu(\bar{T})}{\frac{d\mu}{dT}(\bar{T})} \quad (3-2)$$

Davaille et Jaupart (1993) montrent que cette formulation est effectivement cohérente avec leurs expériences analogiques, et trouvent $c=2,24$. Une confirmation numérique de ce résultat a récemment été apportée (*Grasset et Parmentier*, 1997). Enfin, dans le cas d'un fluide chauffé par la base, l'étude analytique de *Morris et Canright* (1984) prévoit $\Delta T_e \sim 3\Delta T_v$, et un saut de viscosité dans la zone convectrice $\mu_c/\mu_{base} \sim 55$.

3.2 - Les résultats du modèle numérique.

Les variations de viscosité induisent un certain nombre de modifications sur les observables de l'écoulement. Toutes vont dans le sens d'une diminution de la vigueur et de l'efficacité de la convection. La relation entre le flux de chaleur et le nombre de Rayleigh s'en trouve modifiée.

3.2.1 - Flux de chaleur.

Puisque les variations de viscosités s'opposent à l'écoulement, la quantité de chaleur transportée par convection diminue. Un fluide dont la viscosité varie évacue moins bien la chaleur qu'un fluide isovisqueux, et doit limiter le flux de chaleur à sa base. La quantité de chaleur advectée diminue lorsque $\Delta\mu$ augmente (fig. 3-1). Passée une valeur de $\Delta\mu$ seuil (qui dépend du nombre de Rayleigh), elle s'annule dans une zone qui correspond au couvercle conductif. Cette zone augmente de façon importante entre $\Delta\mu=10^2$ et $\Delta\mu=10^4$, puis plus progressivement.

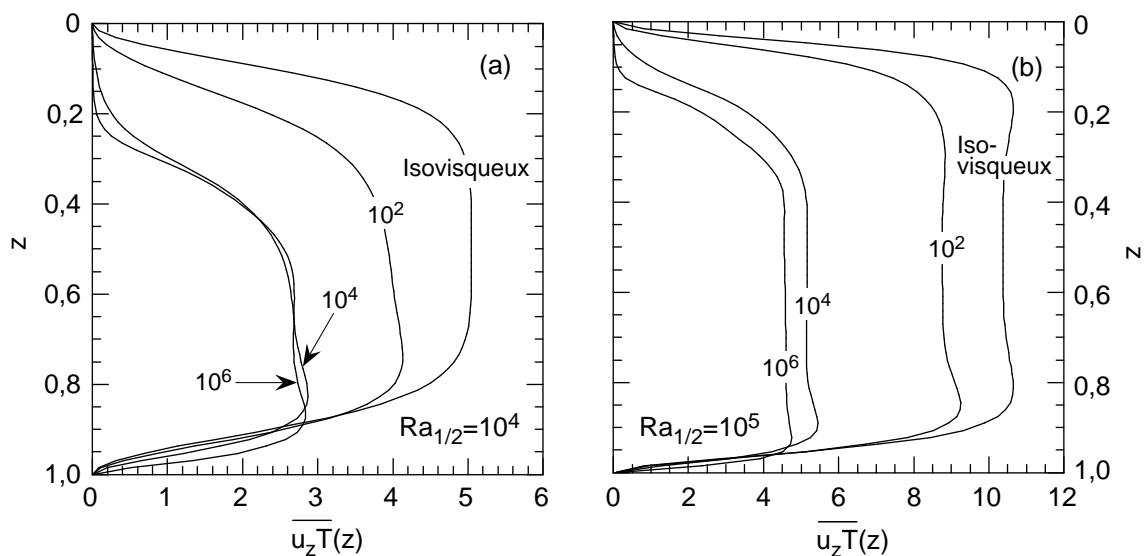


Figure 3.1. Influence de la viscosité variable sur le profil de flux advectif. La viscosité du nombre de Rayleigh médian ($Ra_{1/2}$) est prise à $T_{1/2}=1/2(T_{surf}+T_{base})$.

Pour un nombre de Rayleigh donné, le nombre de Nusselt diminue lorsque le contraste $\Delta\mu$ augmente. Aux $\Delta\mu$ élevés, cette perte d'efficacité est limitée par la loi du couvercle. *Booker et Stengel* (1978) relie ce comportement à celui du nombre de Rayleigh critique: Ra_c , dépend de $\Delta\mu$ et passe par un maximum. Pour des conditions aux limites de bords rigides, les calculs de *Stengel et al.* (1982) et *Richter et al.* (1983), et les expériences de *Nataf et Richter* (1982) fixent le seuil de viscosité vers $\Delta\mu=5000$.

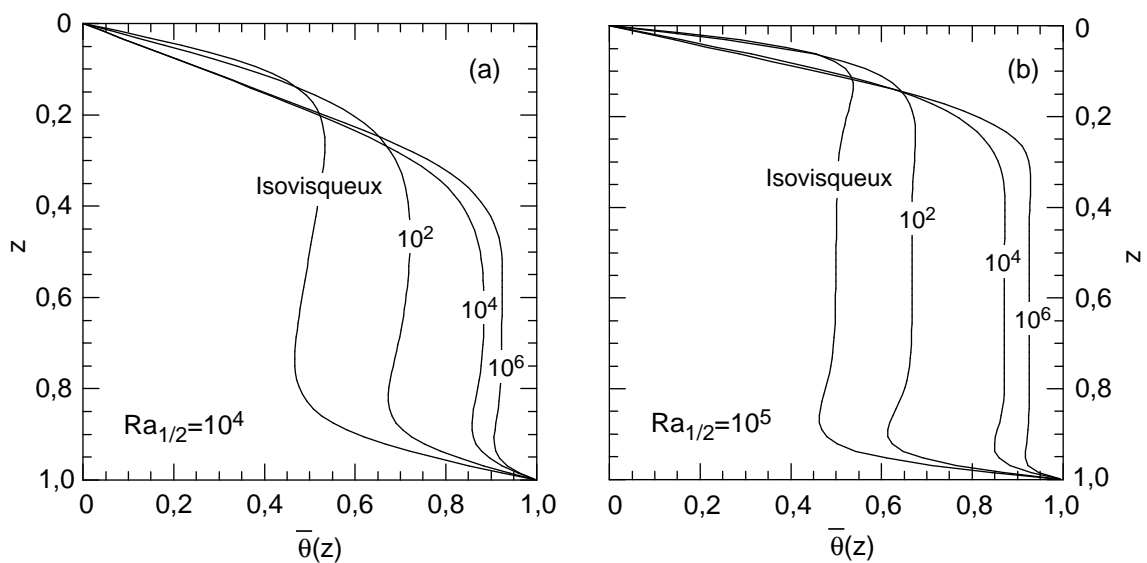


Figure 3.2. Profils thermiques pour différents rapport de viscosité. (a) $Ra_{1/2}=10^4$; (b) $Ra_{1/2}=10^5$. Grilles 64x64, $r_a=1$.

3.2.2 - Profils et distributions thermiques.

La diminution du flux de chaleur a pour conséquence de réduire la couche limite thermique du bas, ou, ce qui revient au même d'augmenter la température du milieu isotherme (fig. 3-2). Sur les profils thermiques, le sommet (la base) d'un panache chaud (froid) est caractérisé par une légère bosse positive (négative). Cette inversion du gradient thermique est liée à l'étalement du panache chaud (froid) contre le sommet (la base) du domaine. Dans nos calculs 2D, une telle signature est bien observée sur les profils isovisqueux, mais elle disparaît progressivement lorsque $\Delta\mu$ augmente: la déflexion du haut est absorbée par la portion linéaire du profil. Les champs de température montrent effectivement que le panache ascendant ne parvient pas à remonter jusqu'en surface, mais reste bloqué sous un couvercle (fig. 3-3a).

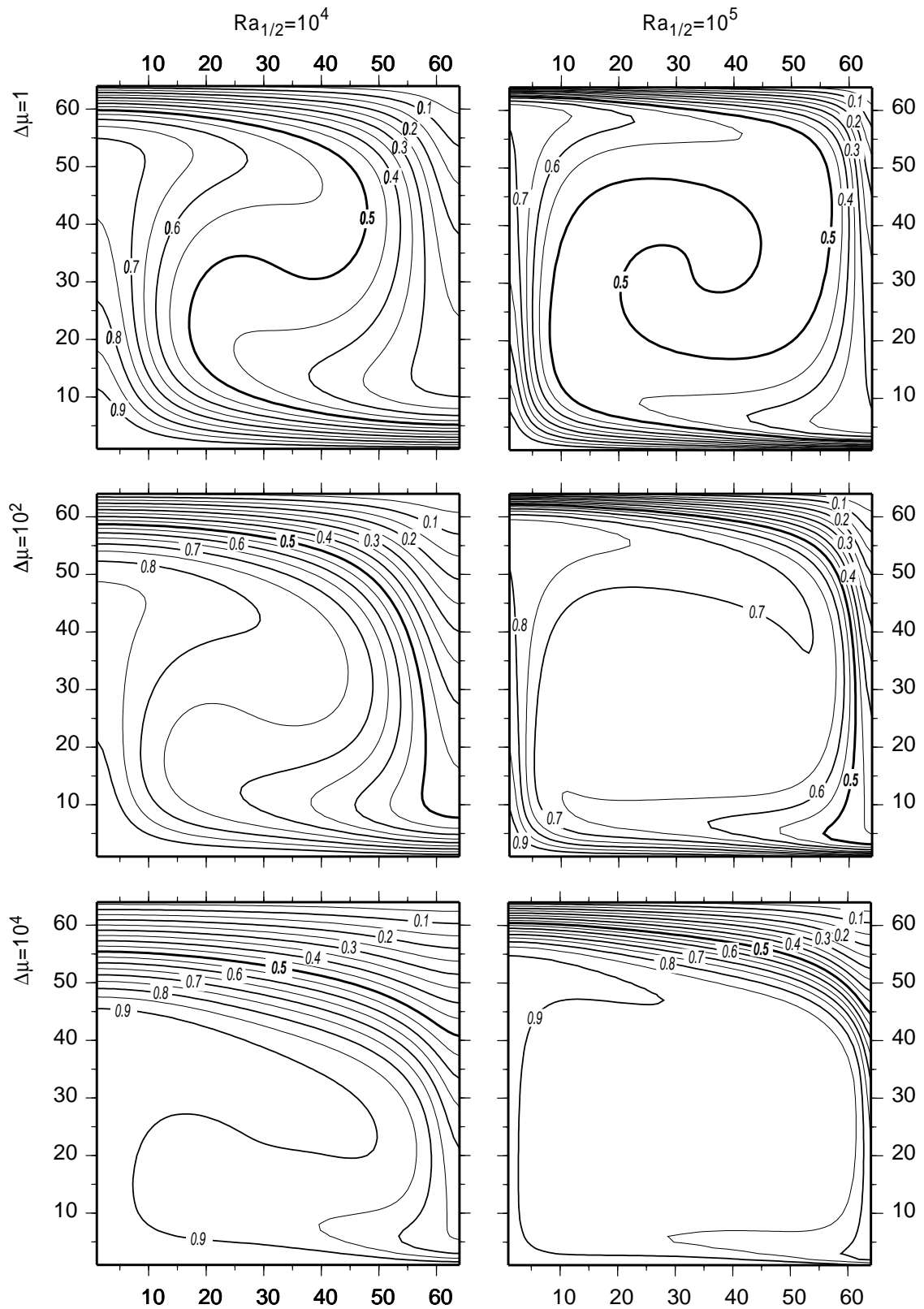


Figure 3-3a. Champs de température.

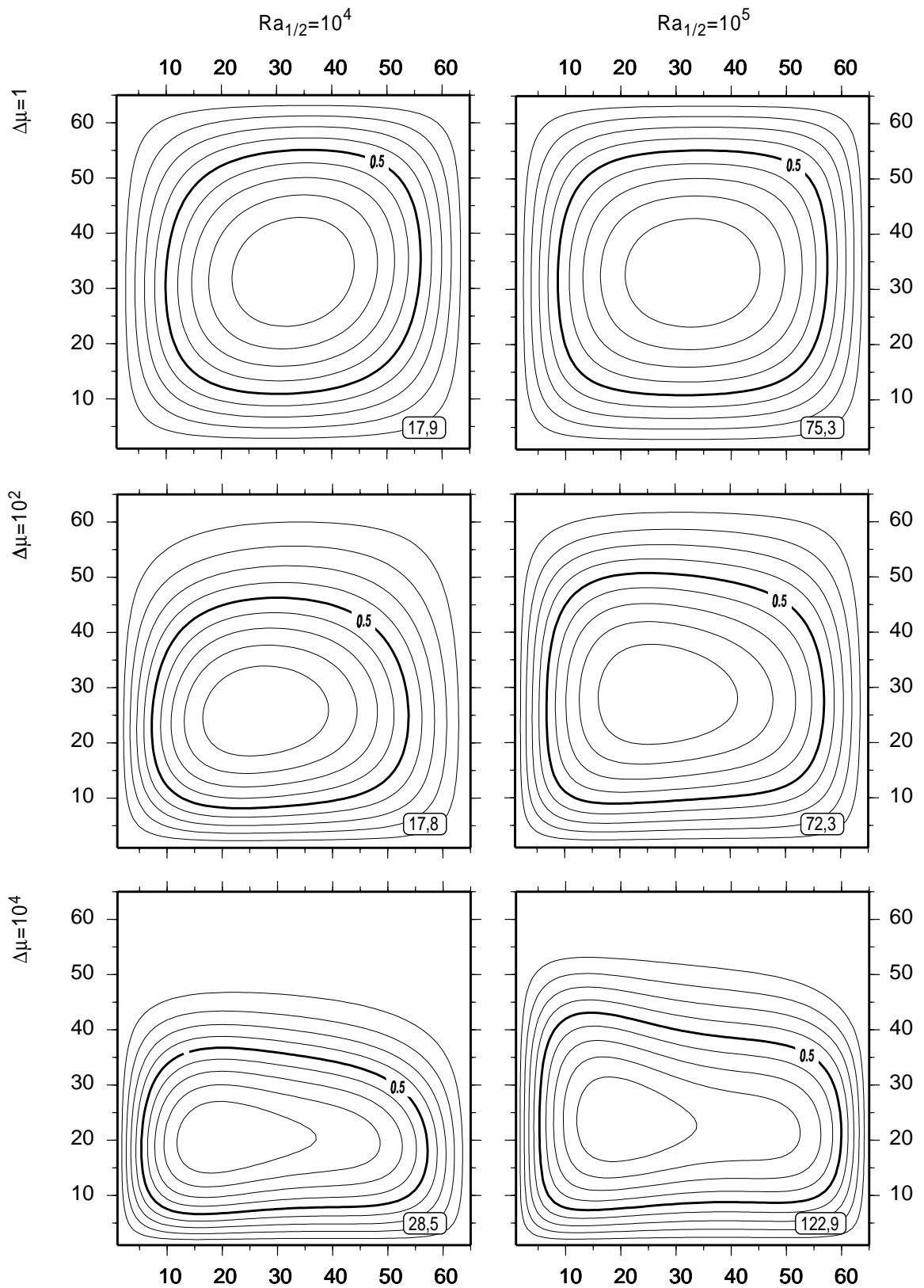


Figure 3-3b. Fonctions de courant normalisées (le maximum est indiqué en cartouche).

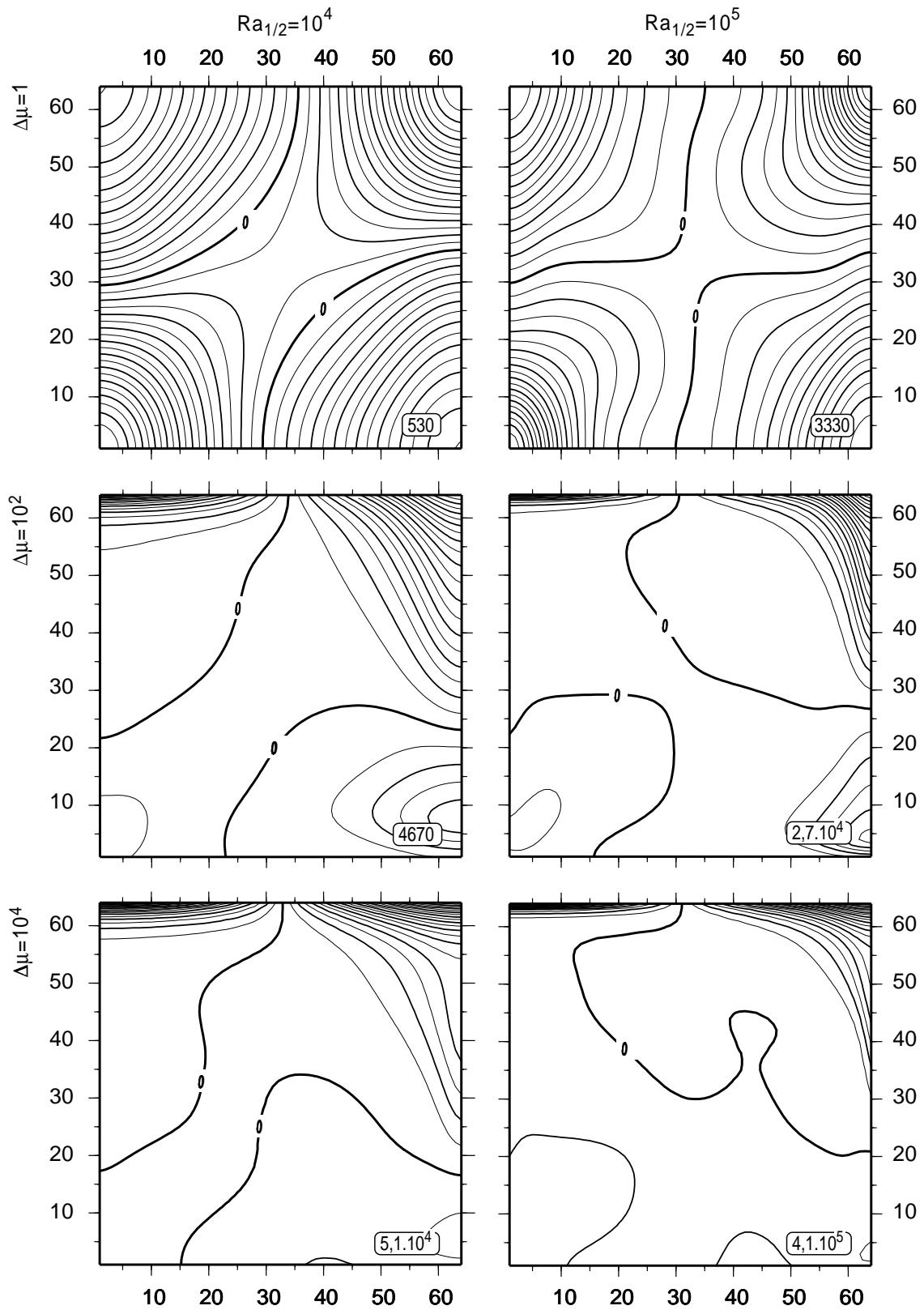


Figure 3-3c. Contraintes normales normalisées (le maximum est indiqué en cartouche).

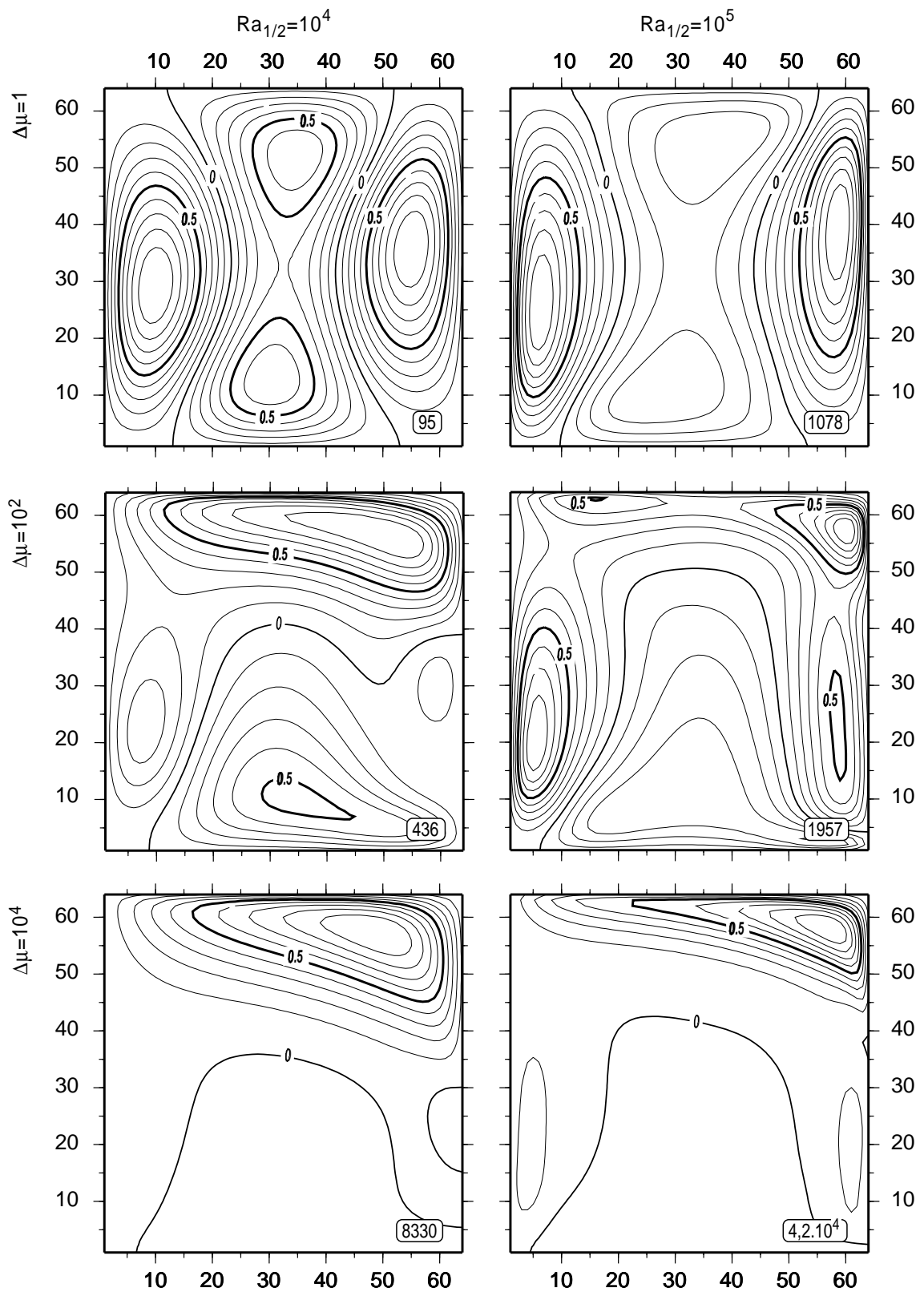


Figure 3-3d. Contraintes cisillantes normalisées (le maximum est indiqué en cartouche).

Par ailleurs, la symétrie des profils thermiques (et des champs de température) qui existe pour un fluide isovisqueux est complètement brisée pour un fluide à viscosité variable. Le panache froid est plus développé que son homologue chaud. L'amplitude thermique cumulée de la couche limite thermique du haut et couvercle conductif est nettement plus élevée que celle de la couche limite thermique du bas.

3.2.3 - Vitesses et contraintes.

Au sommet de la boîte se forme une zone plus visqueuse que le reste du fluide. La circulation du fluide, visualisée par la fonction de courant, est très clairement confinée sous le couvercle conductif (fig. 3-3b), tandis que l'écoulement de la zone visqueuse est fortement inhibé.

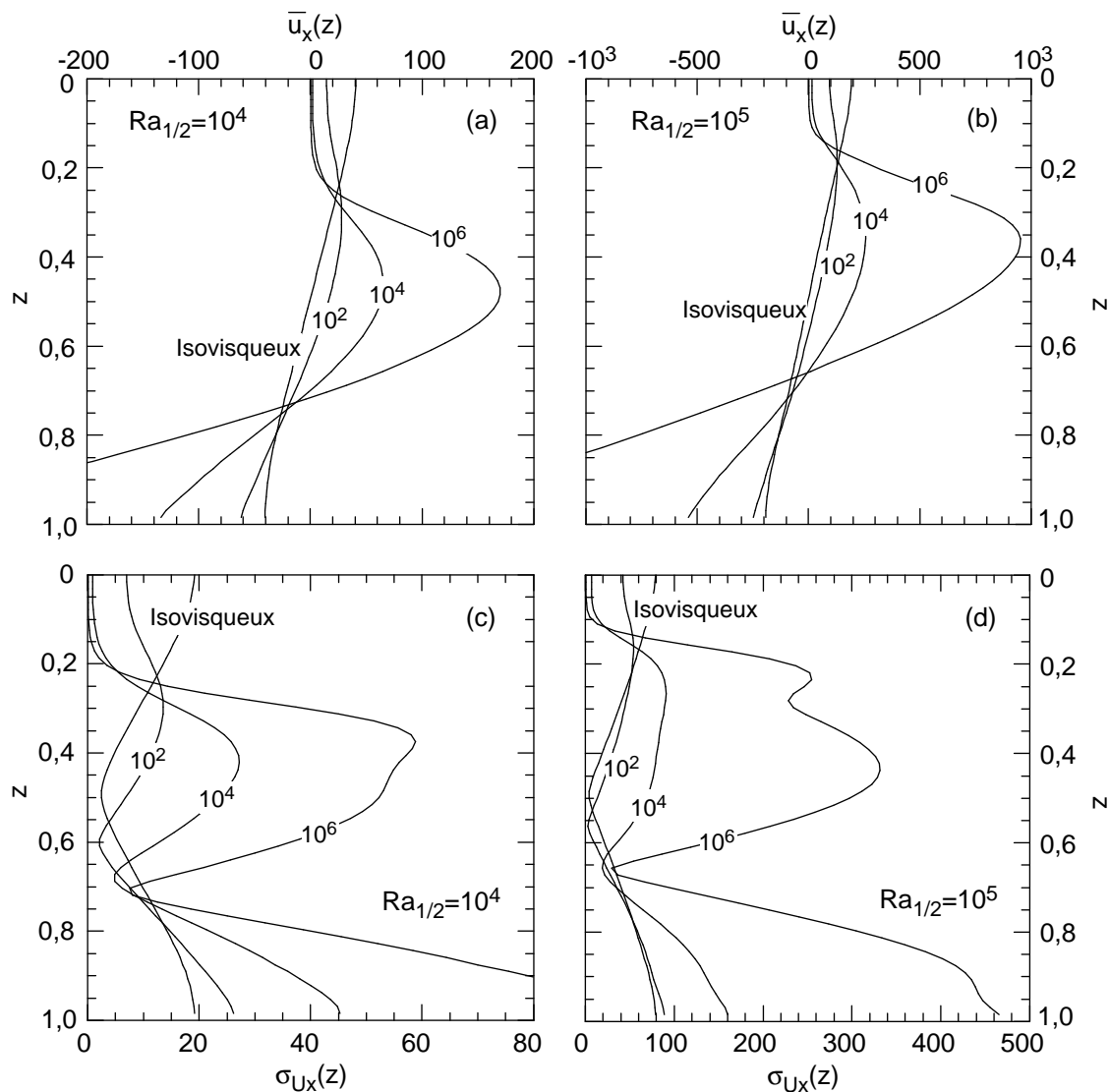


Figure 3.4. Profils de vitesse horizontale moyenne (a et b), et variance (c et d) pour différents rapport de viscosité. (a et c) $Ra_{1/2}=10^4$; (b et d) $Ra_{1/2}=10^5$. Grilles 64x64, $r_a=1$.

Les profils de vitesses horizontale (fig. 3-4) montrent que pour des $\Delta\mu$ élevés, le couvercle est quasiment immobile par rapport à la sous-couche convectrice. En fait, le couvercle peut bouger légèrement, comme le lui autorise la condition limite de surface. La vitesse du couvercle est de toute façon très petite devant celle de l'écoulement convectif dans la sous-couche. Par ailleurs, elle est approximativement uniforme sur toute l'épaisseur du couvercle. Le maximum de vitesse est renvoyé plus en profondeur, et une couche limite mécanique assure la transition entre ce maximum et la base du couvercle. Le zéro de vitesse suit ce décalage. De son côté, la base du fluide est animée de courants horizontaux rapides: la viscosité y est réduite, et l'écoulement rencontre peu de résistance. Au total, les variations de viscosité ont rompu la symétrie du profil de vitesse horizontale. Ces profils se rapprochent de ceux que l'on trouve dans le cas d'une condition limite de surface rigide (§3.3.1). Par ailleurs, on vérifie qu'il y a peu d'écart à la vitesse moyenne dans le couvercle (fig. 3-4 c et d): celui-ci se comporte comme une plaque rigide vis-à-vis de l'écoulement sous-jacent.

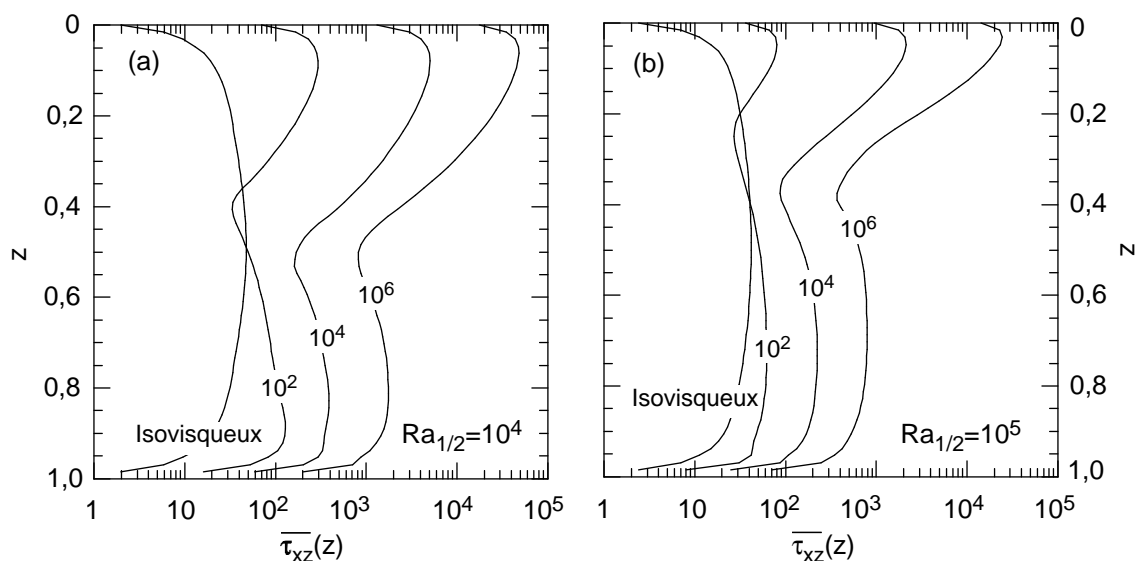


Figure 3.5. Profils de contrainte cisailante pour différents rapport de viscosité. (a) $Ra_{1/2}=10^4$; (b) $Ra_{1/2}=10^5$. Grilles 64×64 , $r_a=1$.

Si l'écoulement est fortement ralenti en surface, c'est aussi parce que sous l'influence de la viscosité, les contraintes y sont élevées. Ainsi, le maximum des profils de contraintes cisailantes est situé dans le couvercle, juste sous la surface (fig. 3-5). Dans le cas d'un fluide isovisqueux les contraintes cisailantes sont les plus intenses dans les panaches et, dans une moindre mesure, à la base des couches limites thermiques. En viscosité variable, le couplage entre le couvercle et

l'écoulement sous-jacent crée un cisaillement important qui se transmet au couvercle (fig. 3-3c). En s'éloignant du panache chaud, le couvercle s'épaissit, et les lignes d'iso-contraintes deviennent plus profondes. Des maximums locaux de contrainte cisailante restent présents dans les panaches. Le maximum des contraintes normales est localisé dans les coins supérieurs du couvercle (fig. 3-3d), reflétant la poussée positive (négative) du panache chaud (froid). Dans un fluide isovisqueux, par symétrie, les coins inférieurs sont également des maximums de contrainte normale. Là encore, la valeur élevée de la viscosité du couvercle amplifie les contraintes au sommet de la boîte.

3.2.4 - Relation entre le flux de chaleur et le nombre de Rayleigh.

Contrairement au cas d'un fluide isovisqueux, il n'apparaît pas de paramétrisation simple entre le flux de chaleur et le nombre de Rayleigh lorsque la viscosité est variable. Dans un diagramme $\log(\text{Nu})/\log(\text{Ra})$, les résultats numériques se rangent en fonction de leur rapport de viscosité, que l'on choisisse d'utiliser $\text{Ra}_{1/2}$ (fig. 3-6a) ou $\text{Ra}_{\bar{\theta}}$ (fig. 3-6b). La pente logarithmique est fonction de ce contraste de viscosité. Elle passe de 0,24 pour $\Delta\mu=10^6$, à 0,37 si $\Delta\mu=10^2$. De plus, dans la majorité des cas, cette pente varie avec le nombre de Rayleigh, et devient plus élevée au delà d'une certaine valeur du nombre de Rayleigh. Cette valeur critique augmentant avec le contraste de viscosité. Remarquons que la représentation en fonction de $\text{Ra}_{\bar{\theta}}$ accentue ces caractéristiques, en particulier le changement de pente. Ces observations sont qualitativement et quantitativement en accord avec le modèle de *Christensen* (1984a). Pour décrire le flux de chaleur, Christensen propose alors d'introduire un paramètre supplémentaire tenant compte des variations de viscosité. Cependant, il ne déduit pas de paramétrisation simple de ces calculs.

Enfin, il n'apparaît pas non plus de relation simple entre le nombre de Rayleigh et la température moyenne adimensionnée du coeur isotherme, $\bar{\theta}$ (fig.3-7). Dans ce travail, $\bar{\theta}$ est définie par la température moyenne à mi-hauteur:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{L} \int_0^L \theta(x, z = 1/2) \cdot dx \quad (3-3)$$

où L est la longueur du système. Cette température est plus élevée que la moyenne volumique de la température : le couvercle, plus froid, tire cette moyenne vers le bas. On notera que pour un nombre de Rayleigh donné, elle est d'autant plus importante que le contraste de viscosité est élevé. Dans le cas précis du régime de couvercle conducteur, on verra qu'il est toutefois possible de déterminer $\bar{\theta}$ en fonction d'un seul paramètre, représentant les variations locales de viscosité.

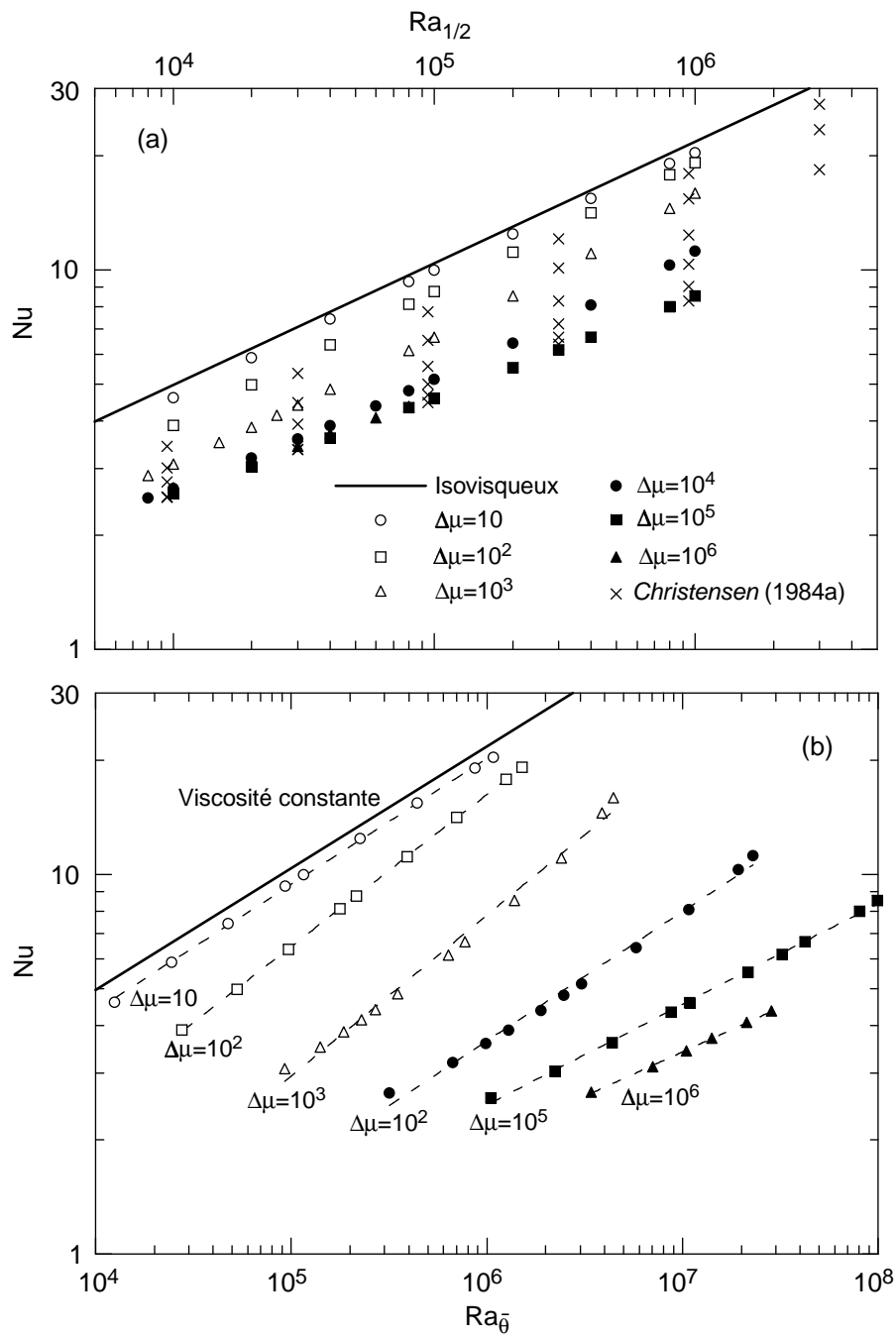


Figure 3.6. Nombre de Nusselt. (a) En fonction du nombre de Rayleigh médian; (b) en fonction du nombre de Rayleigh du milieu isotherme.

On pourra remarquer que dans certains cas où le profil thermique à mi-hauteur n'est pas encore tout à fait isotherme (par exemple lorsque le couvercle est épais), ce choix peut biaiser les résultats. L'erreur ainsi commise est surtout importante lorsque $\Delta\mu$ et Ra sont simultanément

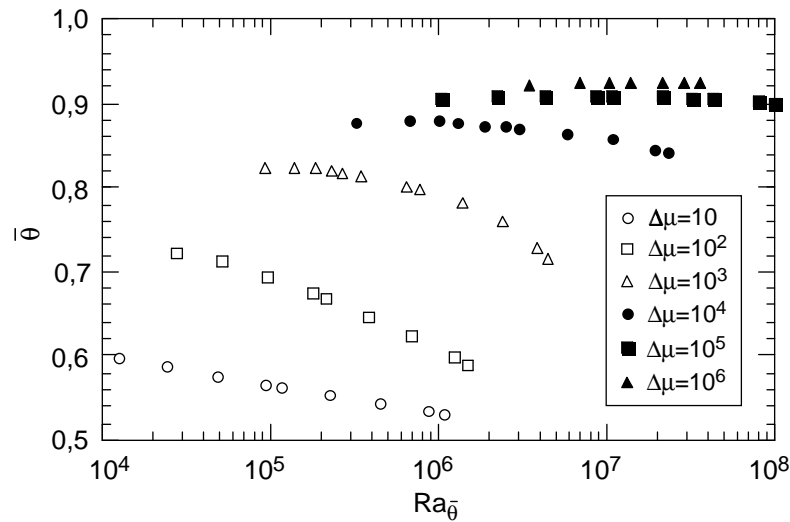


Figure 3.7. Température du coeur isotherme pour quelques $\Delta\mu$.

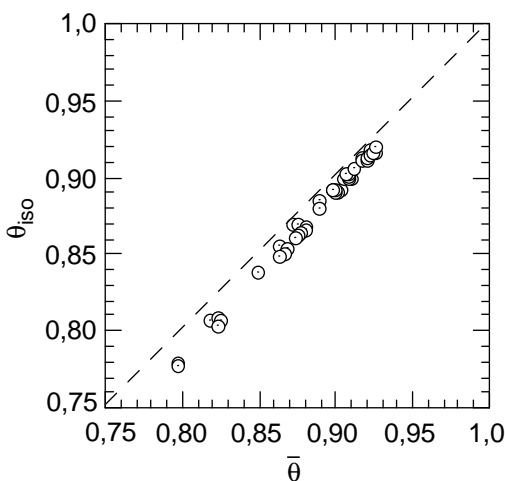


Figure 3.8. Erreur commise en confondant la température du cœur isotherme avec la température moyenne à mi-hauteur.

petits. Un calcul plus rigoureux consisterait à ne moyenner la température que sur l'épaisseur de la zone isotherme (c'est par ailleurs ce que font *Moresi et Solomatov* (1995)). Cette différence reste cependant très petite (fig. 3-8): l'écart maximum (correspondant au cas $\Delta\mu=500$, $Ra=10^4$) est de 2%, et pour des rapports de viscosité plus élevés ($\Delta\mu \geq 10^4$) il n'y a quasiment pas de différence. Finalement, cette correction n'apporte aucun changement aux résultats qui seront présentés plus loin (en particulier les paramétrisations 3-20 et 3-22 restent inchangées).

Il est clair qu'un seul régime ne parvient pas à expliquer l'ensemble des points de la figure 3-6. . La rupture de pente (plus marquée lorsque le nombre de Nusselt est présenté en fonction de $Ra_{\bar{\theta}}$) peut elle même s'interpréter comme un changement de régime. *Solomatov* (1995) distingue trois cas:

- Pour de petits $\Delta\mu$, le fluide se comporte presque comme un fluide isovisqueux, et la convection occupe toute la hauteur de la boîte. Par exemple, les points $\Delta\mu=10$ se rangent bien le long de la loi $Nu=0,206.Ra^{0,332}$, qui est très proche de la loi isovisqueuse. Les faibles variations de viscosité ont tout de même pour effet d'atténuer la vigueur de la convection et le transfert de chaleur.

- Pour des rapports de viscosité plus élevés (à partir de 10^4 - 10^5), la convection fonctionne selon le régime de couvercle décrit précédemment. L'efficacité du transfert de chaleur est cette fois-ci nettement diminuée, et les panaches ascendants ne parviennent pas jusqu'en surface.

- Entre les deux, s'établit un régime transitoire. C'est par exemple le cas de fluides dont le contraste de viscosité est intermédiaire entre 10 - 10^2 et 10^4 - 10^5 , ou bien lorsque le nombre de Rayleigh devient très élevé.

Nous précisons la limite entre ces deux derniers régimes lorsque nous nous intéresserons plus particulièrement à la paramétrisation du régime de couvercle (§3.4.1). Auparavant, il est intéressant de regarder quel peut être l'effet d'une surface rigide sur la convection.

3.3 - Importance de la condition limite en surface.

3.3.1 - Surface rigide et fixe.

A l'inverse d'un bord libre, une condition limite de bord fixe introduit un couplage mécanique entre le fluide et le milieu extérieur. La frontière est considérée comme parfaitement rigide (indéformable) et immobile.

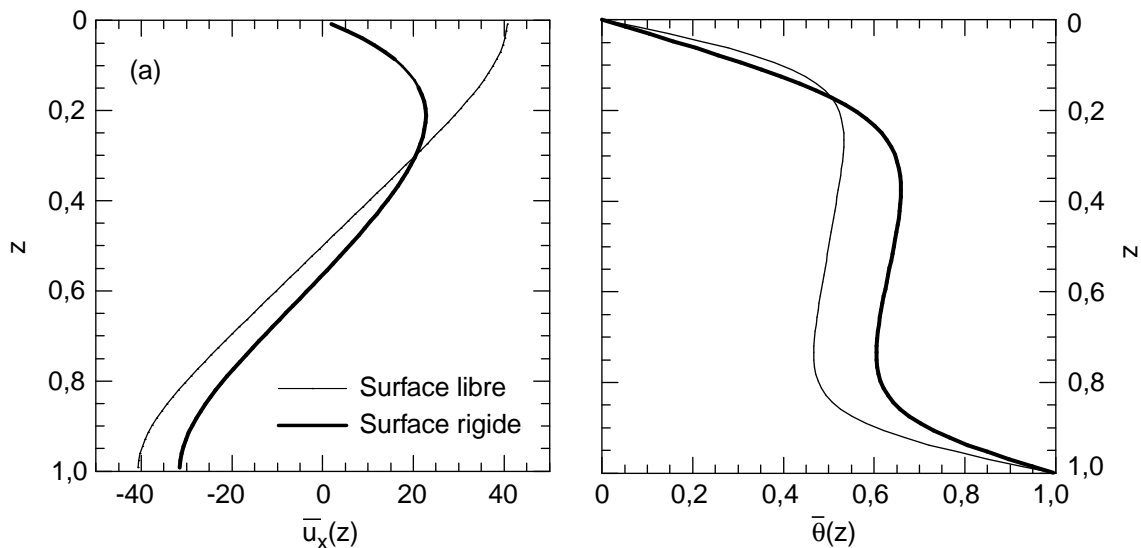


Figure 3.9. Comparaison des profils de vitesse surface (a) et de température (b) pour une surface rigide (en gras) et une surface libre. Viscosité constante, $Ra=10^4$.

3.3.1.1 - Renforcement du couvercle.

La condition limite de bord fixe induit un frottement qui s'oppose à la circulation du fluide : il se forme une couche limite mécanique qui assure la transition vers une vitesse nulle en surface,

et freine l'écoulement subsurface (fig. 3-9a et 3-10b). L'épaisseur de cette transition décroît avec la vigueur de la convection. Parallèlement, l'évacuation de la chaleur par convection est moins efficace. La température du cœur isotherme augmente (fig. 3-9b), et la couche limite thermique froide, devenue plus importante, limite le flux de chaleur. Au niveau du panache ascendant, les isothermes chaudes ont plus de mal à monter (fig. 3-10a). Les contraintes cisillantes sont maintenant concentrées près de la surface (fig. 3-10c). A viscosité constante, et pour un nombre de Rayleigh donné, le nombre de Nusselt est plus faible que dans le cas d'un bord libre. Ainsi, les conséquences d'une surface rigide fixe sont comparables aux effets d'un couvercle conducteur généré par les variations de viscosités.

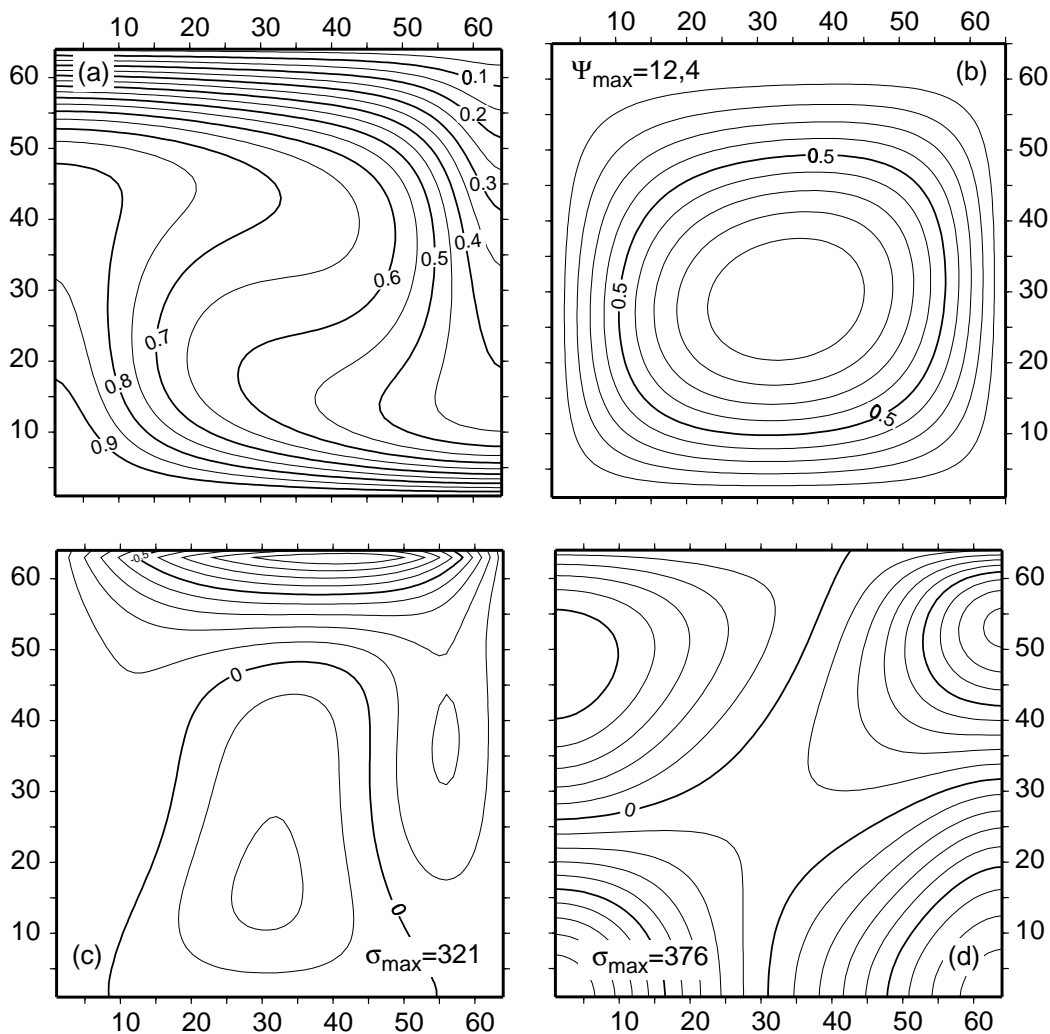


Figure 3-10. Cas d'un fluide isovisqueux limité par une surface rigide, $Ra=10^4$. (a) Champ de température. (b) Fonction de courant. (c) Contraintes cisillantes. (d) Contraintes normales.

En comparant, pour un couple $(\Delta\mu, Ra_{1/2})$ donné, les nombres de Nusselt obtenus en bord libre et en bord fixe, tout se passe effectivement comme si l'effet du couvercle conducteur était amplifié dans le cas d'une surface fixe (fig. 3-11a): les effets de la viscosité variable et de la condition limite s'ajoutent et réduisent d'autant plus facilement l'efficacité du transport convectif de la chaleur (fig. 3-11b). Cependant, il est intéressant de noter que pour des rapports de viscosité élevés ($\Delta\mu \geq 10^5$), les solutions des calculs à bord libre et à bord fixe deviennent similaires (fig. 3-12). L'influence de la condition limite en surface n'est plus que de second ordre devant l'effet du couvercle. C'est celui-ci qui contraint la solutions thermiques et dynamiques.

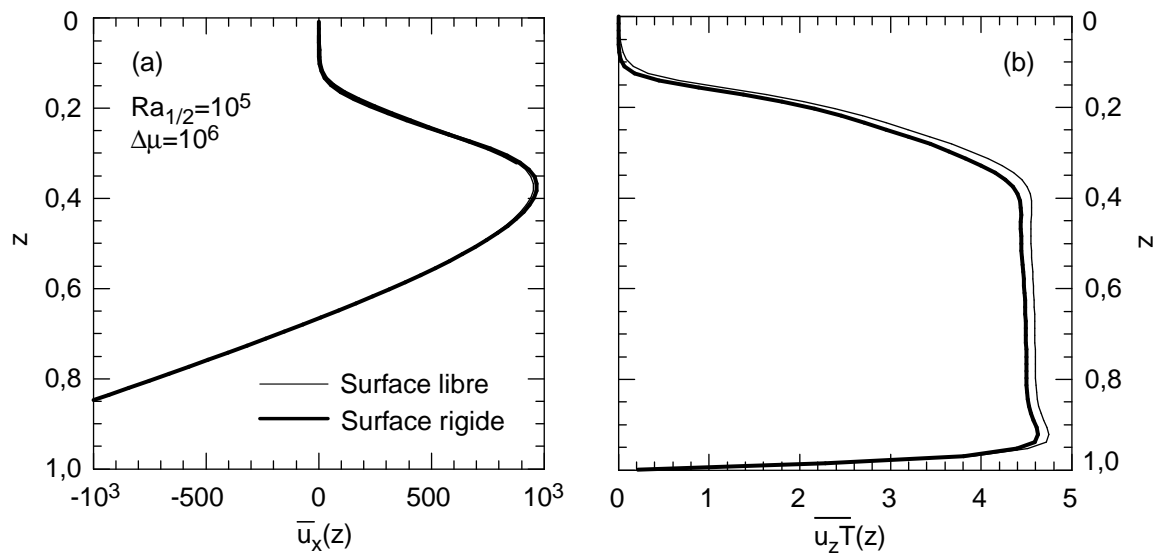


Figure 3.11. Comparaisons des solutions avec bord supérieur libre et bord supérieur fixe pour $\Delta\mu=10^6$. (a) profils de vitesse horizontale; (b) profils advectifs. Grilles 64x64, $r_a=1$ et $Ra_{1/2}=10^5$.

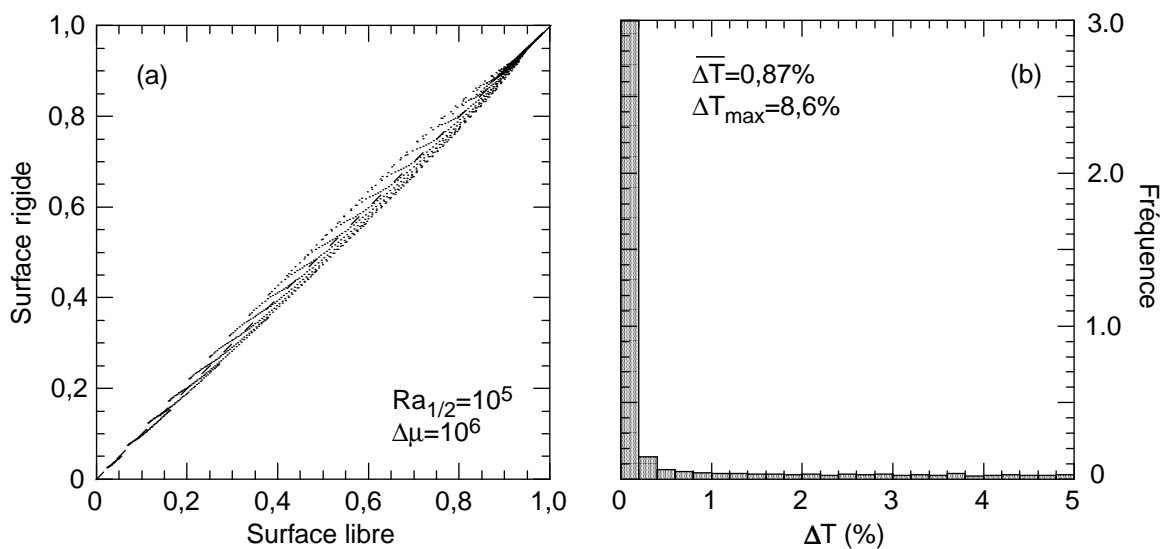


Figure 3.12. Comparaisons des solutions avec bord supérieur libre et bord supérieur fixe pour $\Delta\mu=10^6$. (a) Distributions de température; (b) histogramme des différences relatives.

3.3.1.2 - Paramétrisation dans le cas d'un fluide isovisqueux.

Même dans le cas d'un fluide isovisqueux, une frontière rigide constitue un obstacle à la convection: l'écoulement est ralenti, et l'efficacité du transport de la chaleur diminue. Ainsi, la paramétrisation obtenue pour une surface libre n'est certainement pas applicable au cas d'une surface rigide. Pour un fluide isovisqueux, une simple loi de puissance $Nu=aRa^\beta$ donne des résultats satisfaisants (fig. 3-13). Dans l'intervalle $10^4 \leq Ra \leq 10^6$, les points issus d'une série de calculs sur une grille 64x64 vérifient:

$$Nu=0,336.Ra^{0,252} \quad (3-4)$$

Kvernvoid (1979) fait des calculs en fixant une base de boîte rigide et laissant la surface libre. Le fluide est chauffé par le bas, et le rapport d'aspect du système physique est de 1,2. Ces résultats sont bien s'expliqués par la relation $Nu=0,195.Ra^{0,3}$. Notre résultat est en assez bon accord avec celui de *Kvernvoid*, même si la pente est légèrement plus faible.

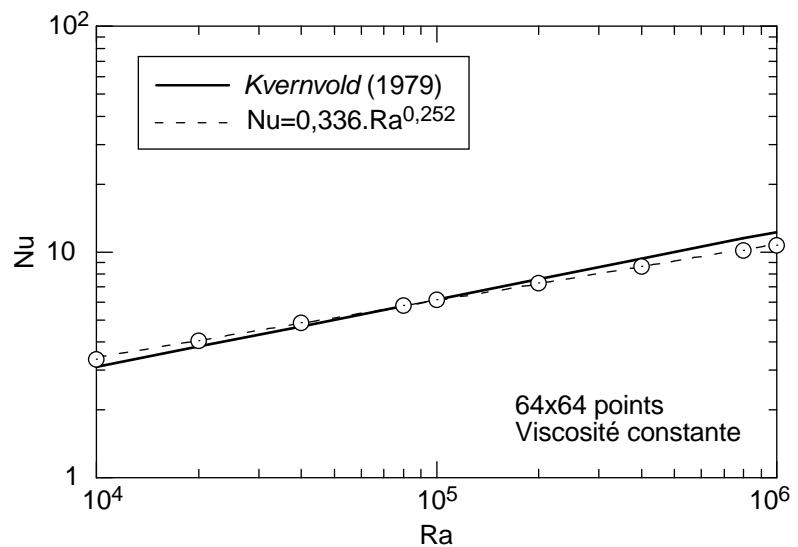


Figure 3.13. Loi paramétrisée pour un fluide isovisqueux limité par une surface rigide et fixe. Comparaison avec les calculs de *Kvernvoid* (1979).

La principale différence entre les deux modèles est la localisation du bord rigide, *Kvernvoid* la situant au même endroit que les sources de chaleurs. Enfin, la différence de rapport d'aspect peut aussi avoir une petite influence sur la valeur de la pente. La température du milieu isotherme, plus élevée que dans le cas d'une surface libre, dépend légèrement du nombre de Rayleigh (fig. 3-14). Elle est approchée par $\bar{\theta} = 0,542 \cdot Ra^{0,018}$. Le rapport entre l'amplitude thermique des couches limites thermiques du haut et du bas suit cette variation, mais reste de l'ordre de 2 (fig. 3-14).

3.3.1.3 - Paramétrisation du nombre de Rayleigh de couche limite.

La surface rigide introduit une forte dissymétrie dans le problème physique, et l'analyse des couches limites (§1.2.6) doit refléter cette différence. De fait, suivant l'équation (1-13), la paramétrisation proposée dans le paragraphe précédent induit une dépendance en Ra^+ beaucoup

plus importante que dans le cas d'une surface libre. Par ailleurs, la température à mi-hauteur n'est plus égale à 0,5: Ra_{haut}^+ et Ra_{bas}^+ ne sont plus équivalents. De plus, $\bar{\theta}$ n'est pas strictement indépendant du nombre de Rayleigh, ce qui induit une dépendance supplémentaire. Au total, la paramétrisation de la couche limite thermique du haut englobe les changements intervenus dans la paramétrisation 3-2 (on trouve $Ra_{\delta} \sim 5,3 \cdot (Ra_{haut}^+)^{0,314}$ et $Ra_{\delta} \sim 2,3 \cdot Ra^{0,319}$), tandis que la couche limite du bas se comporte comme une couche limite de bord libre (fig. 3-15).

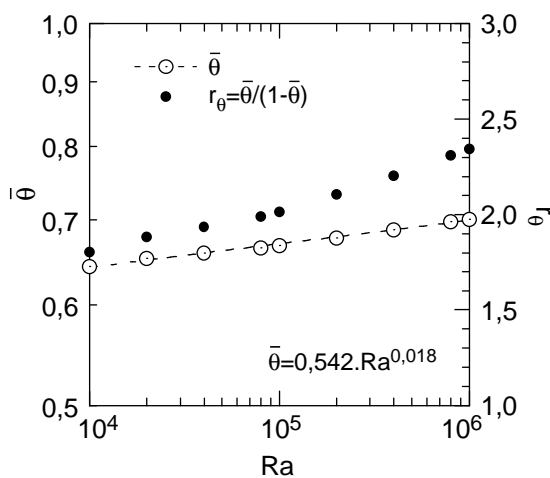


Figure 3.14. Température moyenne, en fonction du nombre de Rayleigh (points blancs), et rapport d'amplitude des couches limites (points noirs).

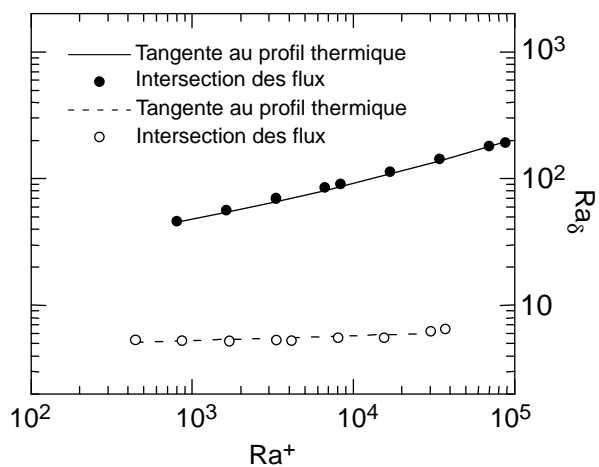


Figure 3.15. Nombre de Rayleigh de couche limite en fonction du nombre de Rayleigh de champ lointain, pour un fluide isovisqueux et une surface rigide. Ra_{δ} a été déterminé et par la méthode de la tangente au profil thermique (droites) ou par la méthode de l'intersection des flux (points). La couche limite thermique du bas se comporte comme une couche limite de bord libre, et la surface rigide modifie considérablement le comportement de la couche limite du haut.

Notons que l'effet du bord rigide est nettement plus important que ce qui est rapporté par *Bergholz et al.* (1979) : à partir d'une compilation de mesures expérimentales, ils trouvent $Ra_{\delta} \propto (Ra^+)^{0,171}$. Une explication possible à ce désaccord est la différence de géométrie : les études compilées par Bergholz et al. sont des études expérimentales 3D.

3.3.2 - Surface mobile.

Dans ce cas, comme dans le cas d'un bord fixe, la frontière supérieure est parfaitement rigide. Mais cette fois-ci, elle est animée d'une vitesse fixée par l'expérimentateur. Sur Terre, la tectonique des plaques constitue manifestement une frontière mobile. Cependant, il n'est pas certain que la lithosphère soit couplée avec le reste du manteau. Dans les modèles, il faudrait considérer une

condition limite de type bord libre. Mais s'il existe, le couplage mécanique doit modifier la structure de l'écoulement et le transport de chaleur qui lui est associé. D'où l'intérêt d'imposer une surface mobile plutôt qu'un glissement parfait au sommet du fluide.

3.3.2.1 - Rôle de la vitesse de surface.

Dans son mouvement, la surface entraîne le fluide situé sous elle. Comme dans le cas d'un bord fixe, une couche limite mécanique se développe, dont l'extension verticale dépend de la viscosité du fluide. Si le mouvement forcé a la même direction que l'écoulement subsurface, il dope localement (sur toute l'épaisseur de la couche limite mécanique) le champ de vitesse créé par une

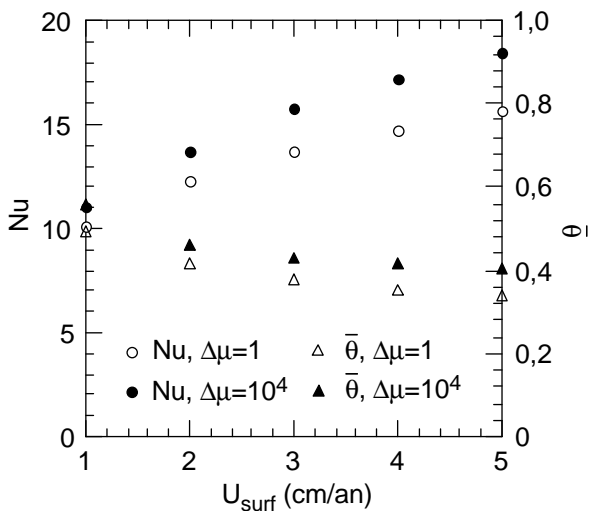


Figure 3.16. Influence de la vitesse de surface sur le nombre de Nusselt. Symboles creux: fluide iso-visqueux; symboles pleins: viscosité variable. Les cercles représentent les nombre de Nusselt, et les triangles les températures adimensionnées à $z=1/2$. Grilles 32x32, $Ra_{1/2}=10^5$.

convection purement thermique. Ce coup de pouce se répercute ensuite sur le reste l'écoulement. Dans le même temps, la vitesse de surface favorise la remontée des isothermes, en particulier au niveau du panache ascendant. Intuitivement, il devrait en résulter une meilleure évacuation de la chaleur que dans le cas d'un bord fixe ou même d'un bord libre. De même, ce gain d'efficacité devrait croître avec l'intensité de la vitesse de surface. Les résultats numériques montrent effectivement une augmentation du nombre de Nusselt (fig. 3-16) et une diminution de $\bar{\theta}$ avec la vitesse de surface.

3.3.2.2 - Conséquences dans le cas d'un fluide à viscosité variable.

Les remarques du paragraphe précédent restent valables dans le cas d'un fluide à viscosité variable. La température moyenne à mi-hauteur n'augmente pas de façon importante (fig. 3-17a), le flux advectif ne s'annule plus à l'approche de la surface (fig. 3-17b), et nombre de Nusselt varie peu en fonction du contraste de viscosité. La frontière mobile s'oppose à la formation d'un couvercle conductif, et le transfert convectif de la chaleur est de nouveau efficace.

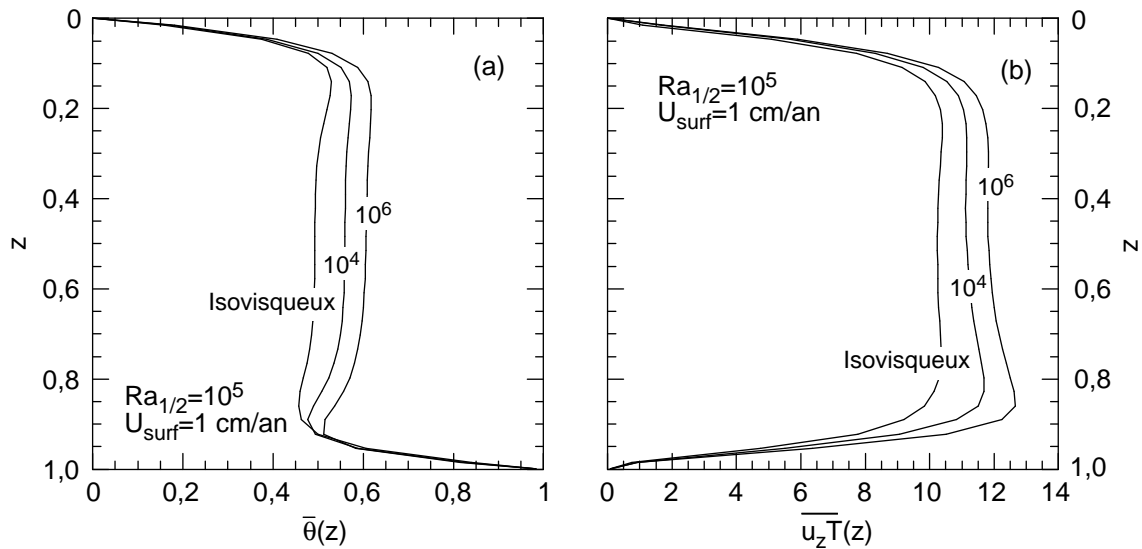


Figure 3.17. Profils thermiques (a) et advectifs (b) pour différents rapport de viscosité. $Ra_{1/2}=10^5$, $U_{surf}=1$ cm/an, grilles 32x32.

3.4 - Le régime de couvercle conductif.

Le régime de couvercle conductif confine la convection dans une couche d'épaisseur réduite. Vis à vis de cette sous-couche, le couvercle se comporte approximativement comme un corps rigide et immobile, c'est-à-dire comme une frontière de type 'bord fixe'. La couche limite thermique du bas n'absorbe que de faibles variations de viscosité, et son amplitude diminue. Les études analytiques montrent que les couches limites du haut et du bas doivent être du même ordre de grandeur (*Morris et Canright, 1984; Fowler, 1985*). Le couvercle doit donc supporter la majorité du saut de viscosité, et la sous-couche convectrice se comporte comme un fluide presque isovisqueux.

Les nombres sans dimension utilisés jusqu'à présent ont été définis sur toute l'épaisseur de la boîte. De la même façon, il est possible de définir une température moyenne $\overline{\theta}_{SC}$, un nombre de Rayleigh Ra_{SC} et un nombre de Nusselt Nu_{SC} adaptés aux caractéristiques de la sous-couche. Ra_{SC} , Nu_{SC} et $\overline{\theta}_{SC}$ se déduisent facilement de $Ra_{\bar{\theta}}$, Nu , $\bar{\theta}$, de θ_c (la température moyenne à la limite couvercle/sous-couche), et de δ_c , (l'épaisseur adimensionnée du couvercle):

$$\begin{cases} Ra_{SC} = (1 - \delta_c)^3 \cdot (1 - \theta_c) \cdot Ra_{\bar{\theta}} \\ Nu_{SC} = \left(\frac{1 - \delta_c}{1 - \theta_c} \right) \cdot Nu \\ \overline{\theta}_{SC} = \left(\frac{\bar{\theta} - \theta_c}{1 - \theta_c} \right) \end{cases} \quad (3-5)$$

La seconde équation exprime la continuité du flux de chaleur à l'interface couvercle/sous-couche.

3.4.1 - Condition d'apparition du couvercle.

Les variations de viscosité n'induisent pas systématiquement la formation d'un couvercle. La convection peut rester suffisamment vigoureuse pour opérer sur toute la hauteur de la boîte, ou bien selon le régime transitoire. Autrement dit, l'écoulement est alors suffisamment important pour casser le couvercle. La condition limite mécanique de surface libre autorise le couvercle à bouger, et donc à participer à la convection. C'est le couplage (cisaillement) entre la base du couvercle et le sommet de la sous-couche convectrice qui fournit la force pour guider le couvercle (*Nataf*, 1986). Le couvercle est rigide, et sa vitesse est approximativement constante sur toute l'épaisseur du couvercle. Dans le cas du régime de couvercle, ce mouvement est très lent. Mais plus la convection est vigoureuse, et plus le couvercle se déplace rapidement. A partir d'une certaine limite, le mouvement du couvercle participe au flux de chaleur observé en surface, en advectant de la chaleur au niveau du panache chaud. *Fowler* (1985) montre que le couvercle peut également glisser latéralement sous l'influence de son propre poids. Les forces ainsi créées peuvent être comparables ou supérieures au cisaillement induit par l'écoulement convectif à la base du couvercle. Incluant cet effet, *Nataf* (1986) calcule la limite pour laquelle 50% du flux de chaleur sont dus à la conduction à travers le couvercle de la chaleur disponible au sommet de la sous-couche convectrice, et les 50% restant sont liés à l'advection induite par le mouvement du couvercle.

Solomatov (1995), puis *Moresi et Solomatov* (1995) considèrent une limite entre le régime transitoire et le régime de couvercle qui est indépendante du nombre de Rayleigh. Ils fixent la transition pour un contraste de viscosité de l'ordre de 10^4 . Cette valeur est obtenue en considérant que la couche limite du bas absorbe un saut de viscosité de 3 à 4 quelque soit $\Delta\mu$, et que le contraste de viscosité dans la couche limite du haut est proche de la valeur critique $(\Delta\mu)_c = e^8 \sim 3000$ définie par *Stengel et al.* (1982). Au dessous de $(\Delta\mu)_c$, la convection occupe toute l'épaisseur de la boîte. Mais passé e^8 , seule une partie de la couche du haut est instable et participe à la convection. La valeur de $(\Delta\mu)_c$ est calculée en maximisant le nombre de Rayleigh médian (i.e. que la viscosité est prise à la température moyenne entre la base du couvercle et la

base de la boîte) dans la sous-couche. Un calcul concernant le nombre de Rayleigh du coeur isotherme est plus approprié et pourrait modifier la valeur de $(\Delta\mu)_c$.

Nos résultats numériques suggèrent qu'il existe une transition entre les deux régimes même pour $\Delta\mu=10^3$. Dans ce cas, et pour des nombres de Rayleigh suffisamment faibles, le régime de couvercle peut s'installer. Ainsi, il semble que la transition entre les deux régimes dépende du nombre de Rayleigh. Il ne se forme de couvercle que si les frottements en surface sont assez importants pour inhiber les instabilités qui se développent sous la surface du fluide. C'est précisément le cas si le nombre de Rayleigh de surface (Ra_{surf}) est inférieur au nombre de Rayleigh critique Ra_c . Ra_c dépend à la fois des conditions aux limites et de $\Delta\mu$. Dans le cas d'un fluide isovisqueux limité par des bords libres et de rapport d'aspect $\sqrt{2}$, Ra_c vaut 657. Selon les calculs de *Stengel et al.* (1982) et *Richter et al.* (1983), il atteint ensuite un maximum pour $\Delta\mu\sim 3000$. Pour des rapports de viscosité élevés, Ra_c est approché par l'expression:

$$Ra_c \sim 20.9 \cdot \gamma^4 \cdot \exp(-\gamma/2) \quad (3-6)$$

Le facteur γ est l'inverse de l'échelle de température visqueuse. Il est représentatif des variations locales de viscosité. Pour une loi de viscosité exponentielle, $\gamma=\ln(\Delta\mu)$. Les applications à la Terre et aux satellites de glace font intervenir une loi d'Arrhénius. Cela modifie l'échelle de température visqueuse et γ n'est plus simplement le logarithme du contraste de viscosité global. En remplacement, γ s'exprime en fonction de la température (dimensionnée) du coeur isotherme, du saut de température entre le sommet et la base (ΔT), de l'énergie d'activation Q et de la constante des gaz parfaits:

$$\gamma = \frac{Q\Delta T}{RT^2} \quad (3-7)$$

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à la loi de viscosité exponentielle.

Dans le cas de frontières libres, l'approximation (3-6) est en bon accord avec la courbe théorique pour $\Delta\mu\geq 10^2$ (fig. 3-18). Pour connaître le seuil des nombres de Rayleigh médian (fig. 3-19; table 3-1) et de base (fig. 3-20), il faut utiliser les relations (2-16b) et (2-16c), qui donnent respectivement:

$$Ra_{c,1/2} \sim 20.9 \cdot \gamma^4 \quad (3-8a)$$

$$Ra_{c,base} \sim 20.9 \cdot \gamma^4 \cdot \exp(\gamma/2) \quad (3-8b)$$

Lorsque $\Delta\mu \leq 10^2$, ce critère réduit considérablement les possibilités de l'apparition du régime de couvercle. Nos calculs ne voient effectivement pas de couvercle pour $\Delta\mu < 250$. En revanche, un couvercle peut s'installer dès $\Delta\mu = 500$, pour des petits nombres de Rayleigh.

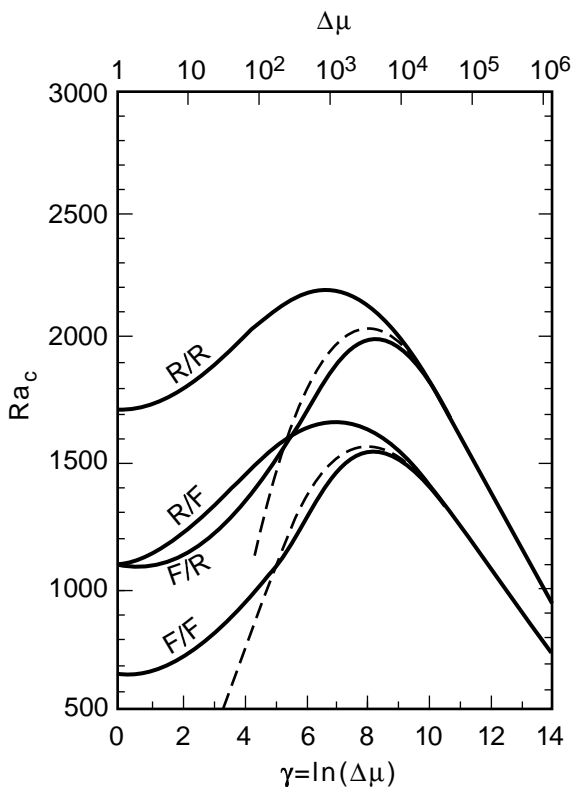


Figure 3-18. Evolution du nombre de Rayleigh critique pour le démarrage de la convection en fonction du rapport de viscosité. Différents cas de conditions aux limites mécaniques sont représentés: base et surface rigides (R/R), libres (F/F) et conditions mixtes (R/F et F/R). Le cas F/F est bien approché par la fonction $20,9 \cdot \gamma^4 \cdot \exp(-\gamma/2)$ (en pointillés) dès $\gamma = 4,605$ ($\Delta\mu = 10^2$). D'après *Stengel et al.* (1982).

$\Delta\mu$	$\ln(\Delta\mu)$	Ra_c	$Ra_{c,1/2}$
10^3	6,908	1505	$4,8 \times 10^4$
10^4	9,210	1504	$1,5 \times 10^5$
10^5	11,51	1161	$3,7 \times 10^5$
10^6	13,82	761	$7,6 \times 10^5$
10^7	16,12	446	$1,4 \times 10^6$

Table 3.1. Quelques valeurs de $Ra_{c,1/2}$.

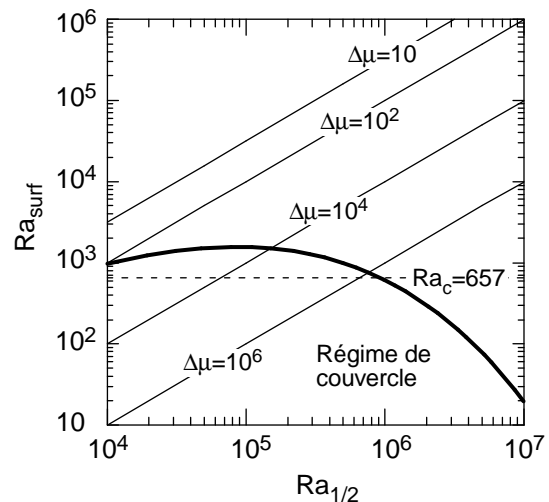


Figure 3.19. Correspondance entre Ra_{surf} et $Ra_{1/2}$ pour différents $\Delta\mu$. La correspondance entre Ra_c et $Ra_{c,1/2}$ est représentée en trait gras.

Si on applique ce critère à l'apparition du régime de couvercle, un passage du régime de couvercle vers le régime transitoire est possible pour des nombres de Rayleigh élevés. *Moresi et Solomatov* (1995) n'observent pas cette limite, et concluent que pour $\Delta\mu \geq 10^6$, seul le régime de couvercle est présent. Pour autant, cela ne tranche le problème puisque tous leurs points ont été obtenus pour $Ra_{base} \leq 10^8$. Pour des contrastes de viscosité supérieurs à 10^6 , cela conduit à de petits nombres de Rayleigh de surface ($Ra_{surf} \leq 100$). Ces valeurs sont inférieures au seuil imposé par le critère que l'on vient de définir. Des calculs à nombres de Rayleigh et rapport de viscosité élevés sont nécessaires pour éclaircir ce point. Se posent alors des problèmes numériques

(difficulté d'obtenir une convergence, et surtout faible définition de la couche limite du bas) et physiques: dans ces gammes de nombres de Rayleigh et de rapport de viscosité, les solutions sont instationnaires, et les solutions moyennées ont une précision plus faible.

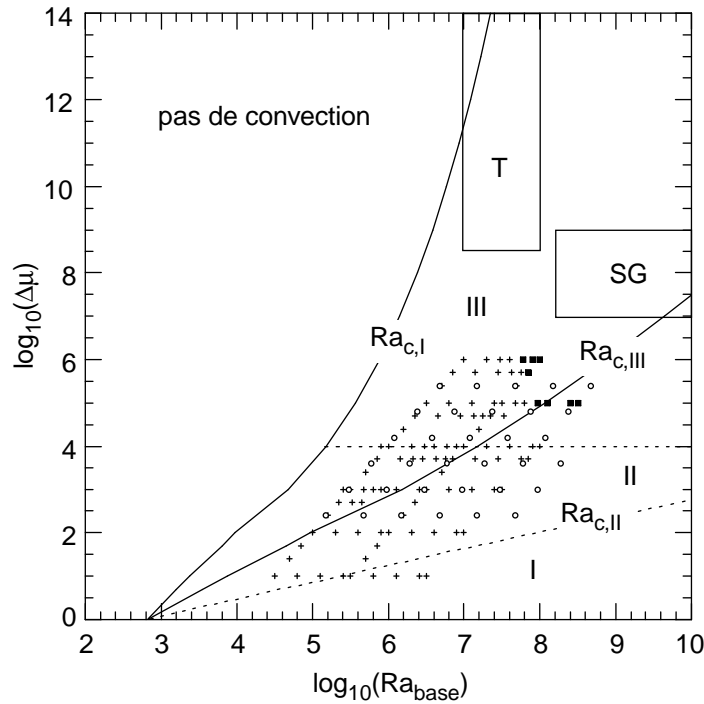


Figure 3.20. Répartition des différents régimes dans le plan $(Ra_{base}, \Delta\mu)$. I: régime de couche totale; II: régime transitoire; III: régime de couvercle. Les pointillés indiquent les transitions d'après *Solomatov* (1995). Les croix représentent l'ensemble de nos calculs, les carrés noirs les solutions instationnaires, et les ronds blancs les résultats de *Christensen* (1984a). Les domaines approximatifs correspondant au manteau inférieur terrestre (T) et à l'enveloppe de glace des satellites des planètes géantes (SG) sont représentés à titre indicatif. La viscosité utilisée pour le calcul des Ra_{base} est la viscosité à la base de la boîte.

3.4.2 - Jeu de données.

Suivant le critère précédent, 45 de nos expériences numériques ont été retenues pour étudier plus précisément le régime de couvercle (table 3-2). Tous les points vérifient $Ra_c \leq 780$, ce qui constitue un critère (volontairement) plus stricte que le critère précédemment défini. Certains points pourront être 'rattrapés' à posteriori. Tous les calculs ont été conduits sur des grilles 64×64 , de rapport d'aspect 1. Le rapport de viscosité se situe dans l'intervalle $5 \cdot 10^2 \leq \Delta\mu \leq 10^6$, et les nombres de Rayleigh médians vérifient $8 \cdot 10^3 \leq Ra_{1/2} \leq 2 \cdot 10^5$.

L'étude du transfert thermique dans le régime de couvercle repose sur la connaissance du nombre de Nusselt et de la température du milieu isotherme. Ces deux quantités sont deux observables de nos modèles numériques, et sont donc facilement accessibles. Pour autant, il ne

faut pas perdre de vue que les valeurs ainsi déterminées ne sont pas exemptes d'incertitudes. L'écart à l'état stationnaire et, de façon plus marquée, la finesse de la grille de calcul sont les principales erreurs dont il faut tenir compte (§2.4.5). Pour les points sélectionnés, l'écart à l'état stationnaire induit une erreur de quelques 10^{-3} (de l'ordre de 0,1% en relatif) sur Nu, et de seulement 10^{-4} (0,02% en relatif) sur $\bar{\theta}$. Certaines solutions, bien qu'appartenant au régime de couvercle, sont instationnaires. L'étude du flux de chaleur peut se contenter d'une solution moyenne, intégrée sur un intervalle de temps suffisamment long. Mais même pour ces solutions, σ_{Nu} est compris entre 5 et 10%. Afin d'éviter cette imprécision supplémentaire, les points instationnaires n'ont pas été retenus pour le processus d'inversion. En ce qui concerne les cas stationnaires, l'erreur de grille est de l'ordre de quelques pourcents sur le nombre de Nusselt (on tient ainsi compte des erreurs plus importantes observées aux nombres de Rayleigh élevés), et moins de 1% sur la température du coeur isotherme, $\bar{\theta}$.

$\Delta\mu$	R _{surf}	$\bar{\theta}$	Nu	$\Delta\mu$	R _{surf}	$\bar{\theta}$	Nu
5.10 ²	447,2	0,797	3,295	5.10 ⁴	268,3	0,900	4,066
-	670,8	0,798	3,773	-	357,8	0,899	4,409
10 ³	253,0	0,819	2,872	-	447,2	0,899	4,691
-	316,2	0,822	3,082	-	670,8	0,898	5,253
-	474,3	0,824	3,505	10 ⁵	31,6	0,903	2,575
-	632,5	0,823	3,846	-	63,3	0,909	3,032
2,5.10 ³	200,0	0,848	2,863	-	126,5	0,907	3,597
5.10 ³	141,42	0,863	2,744	-	253,0	0,907	4,337
-	282,8	0,868	3,336	-	316,2	0,907	4,559
-	424,3	0,866	3,756	-	474,3	0,907	5,117
-	565,7	0,863	4,096	-	632,5	0,907	5,522
10 ⁴	80	0,871	2,512	2.5.10 ⁵	20,0	0,912	2,595
-	100	0,876	2,662	-	200,0	0,916	4,550
-	200	0,881	3,203	5.10 ⁵	14,1	0,917	2,625
-	300	0,880	3,585	-	28,3	0,921	3,071
-	400	0,878	3,891	-	56,6	0,920	3,629
-	600	0,874	4,393	-	84,9	0,921	4,031
-	800	0,873	4,801	-	113,1	0,921	4,319
2.5.10 ⁴	63,2	0,889	2,598	10 ⁶	10	0,922	2,667
-	632,5	0,889	4,841	-	20	0,925	3,116
5.10 ⁴	44,7	0,897	2,577	-	30	0,924	3,425
-	89,5	0,903	3,049	-	40	0,925	3,697
-	178,9	0,900	3,635				

Table 3.2. Données utilisées pour l'inversion du régime de couvercle.

3.4.3 - Détermination du couvercle: méthodes basées sur le flux de chaleur.

3.4.3.1 - Détermination à partir du profil moyen de flux advectif.

Cette méthode, proposée par *Davaille et Jaupart* (1993), est basée sur le profil de flux advectif. Précisément, elle consiste à déterminer le point d'inflexion de ce profil, puis de tracer la tangente en ce point. La profondeur du couvercle est donnée par l'intersection de cette tangente avec l'axe de flux advectif nul (fig. 3-21). On définit ainsi une zone dans laquelle le profil de flux décroît rapidement, puis s'annule.

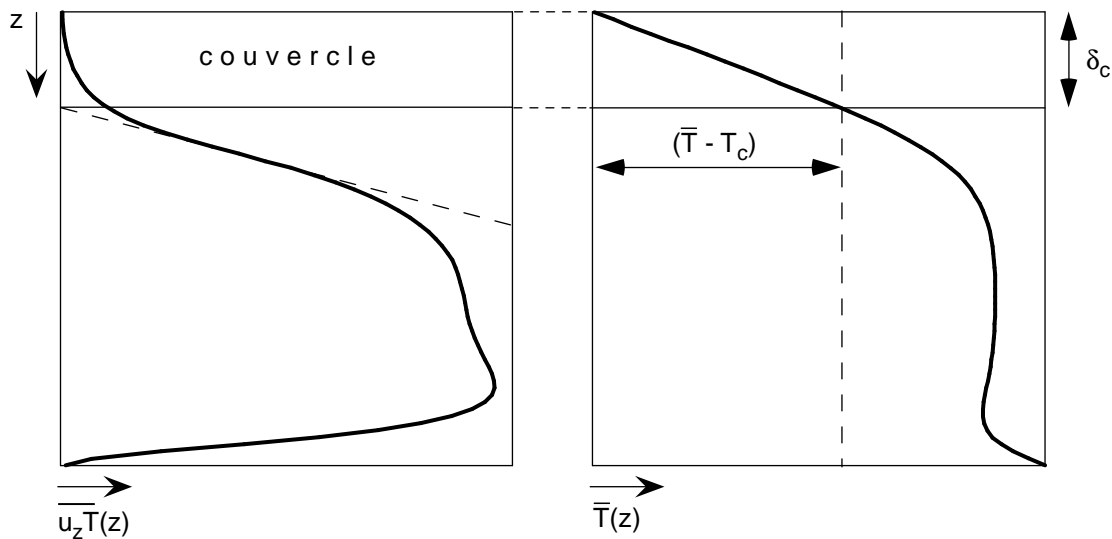


Figure 3.21. Méthode géométrique pour déterminer l'épaisseur du couvercle.

La détermination de l'épaisseur δ_c permet de redimensionner le problème, en calculant Ra_{SC} et Nu_{SC} . Appliquée aux données du table 3-2, la méthode du point d'inflexion conduit à une relation $Nu_{SC}=f(Ra_{SC})$ qui dépend du paramètre γ (fig. 3-22b). Une inversion (la méthode générale est esquissée plus loin, §3.4.4) montre que les nombres de Nusselt redimensionnés vérifient la relation:

$$Nu_{SC} = 1,3 \cdot \gamma^{-0,21} \cdot Ra_{SC}^{0,152} \quad (3-9)$$

La pente logarithmique est nettement plus faible que celle d'un fluide isovisqueux, et il apparaît une légère dépendance en γ . Le saut de viscosité dans la couche limite thermique du haut dépend fortement de Ra et de $\Delta\mu$ (fig. 3-22b), ce qui est contraire avec l'hypothèse selon laquelle le couvercle absorbe la majorité des variations de viscosité. Comme dans le cas isovisqueux/surface rigide, la température moyenne de la sous-couche, $\overline{\theta}_{SC}$, dépend légèrement du nombre de Rayleigh de sous-couche (fig. 3-22d), avec une pente logarithmique de 0,022. Cette valeur est proche de ce qui a été trouvé pour le cas isovisqueux (0,018). Cependant, à nombre de Rayleigh

donné, $\overline{\theta_{SC}}$ est en moyenne 20 à 25% plus élevée que la température d'un fluide isovisqueux limité par une surface rigide. La dispersion peut être réduite si on tient compte du facteur γ , et la relation $\overline{\theta_{SC}} = 0,583 \cdot \gamma^{0,1} Ra^{0,013}$ s'ajuste assez bien avec les valeurs de $\overline{\theta_{SC}}$.

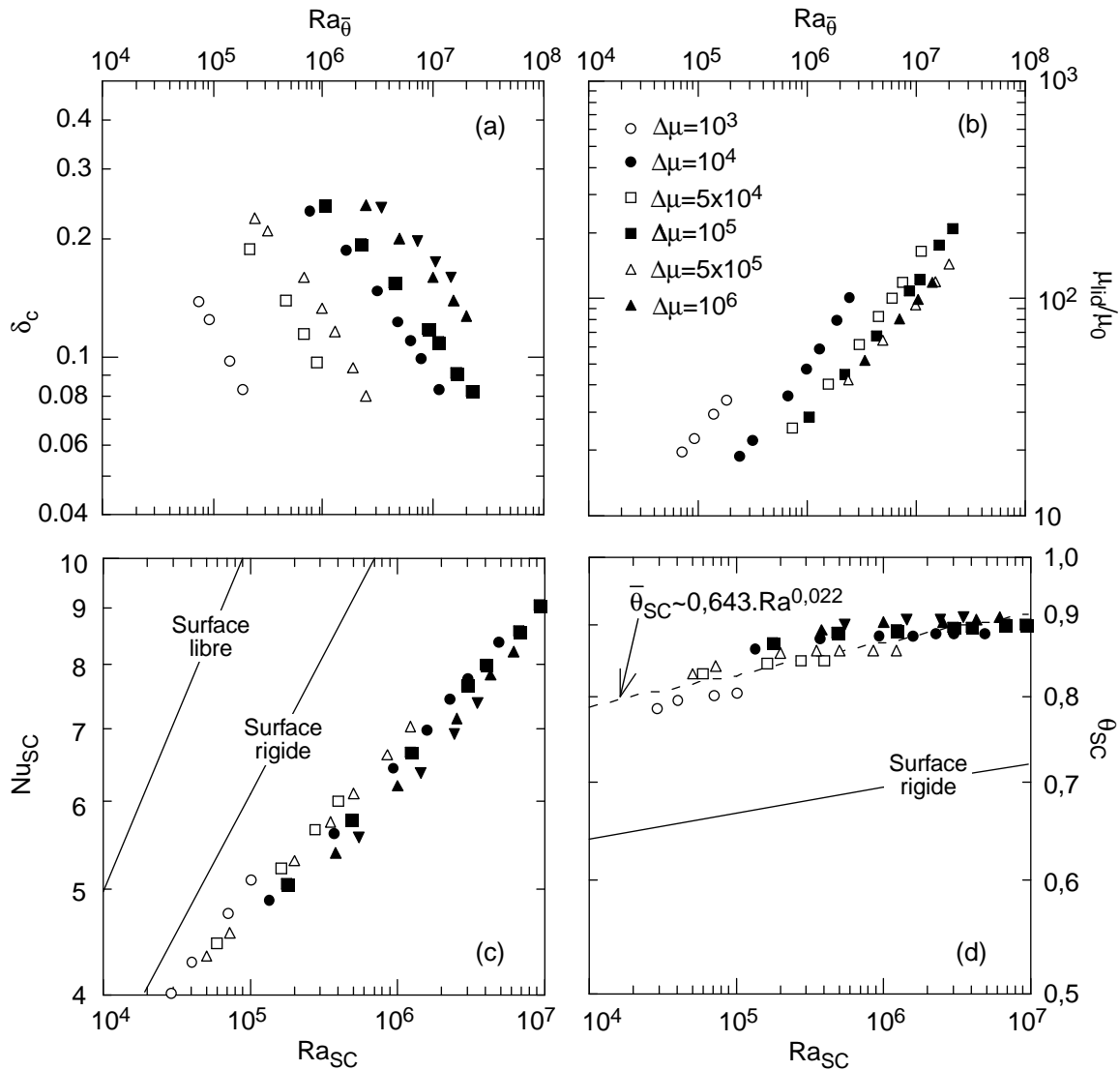


Figure 3.22. Méthode géométrique. (a) Epaisseur de couvercle; (b) Saut de viscosité dans la couche limite du haut; (c) paramétrisation du flux de chaleur dans la sous-couche. Le saut de viscosité, comme la paramétrisation du flux de chaleur dépendent du rapport de viscosité global ($\Delta\mu$). (d) Température moyenne redimensionnée à l'échelle de la sous-couche convective, $\overline{\theta_{SC}}$.

3.4.3.2 - Comparaison des flux advectés et conductifs.

Cette méthode est une alternative de la précédente tenant compte de la composante horizontale du flux advecté. La norme du flux advecté ($\Phi_{\vec{V},T}$) est directement comparée à celle du flux conductif ($\Phi_{\vec{V},T}$):

$$\Phi_{\vec{v} \cdot T} = \left[(uT)^2 + (vT)^2 \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \Phi_{\vec{\nabla} T} = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Il est important d'avoir une bonne idée de l'advection horizontale: les courants horizontaux en base et au sommet de la boîte sont susceptibles de transporter une quantité de chaleur non négligeable. Dans le cas d'un fluide à viscosité variable (fig. 3-23), il existe effectivement une forte advection horizontale dans la couche limite thermique du bas, et une autre plus modeste dans la couche limite thermique du haut (fig 3-23a). Dans le couvercle, l'advection horizontale comme l'advection verticale s'annulent (fig 3-23a-c). La conduction, qui est également importante dans les couches limites prend le relais (fig. 3-23d). L'advection verticale est évidemment importante dans le panache chaud (fig 3-23b). Mais le panache froid, plus visqueux, est aussi plus enclin à la conduction.

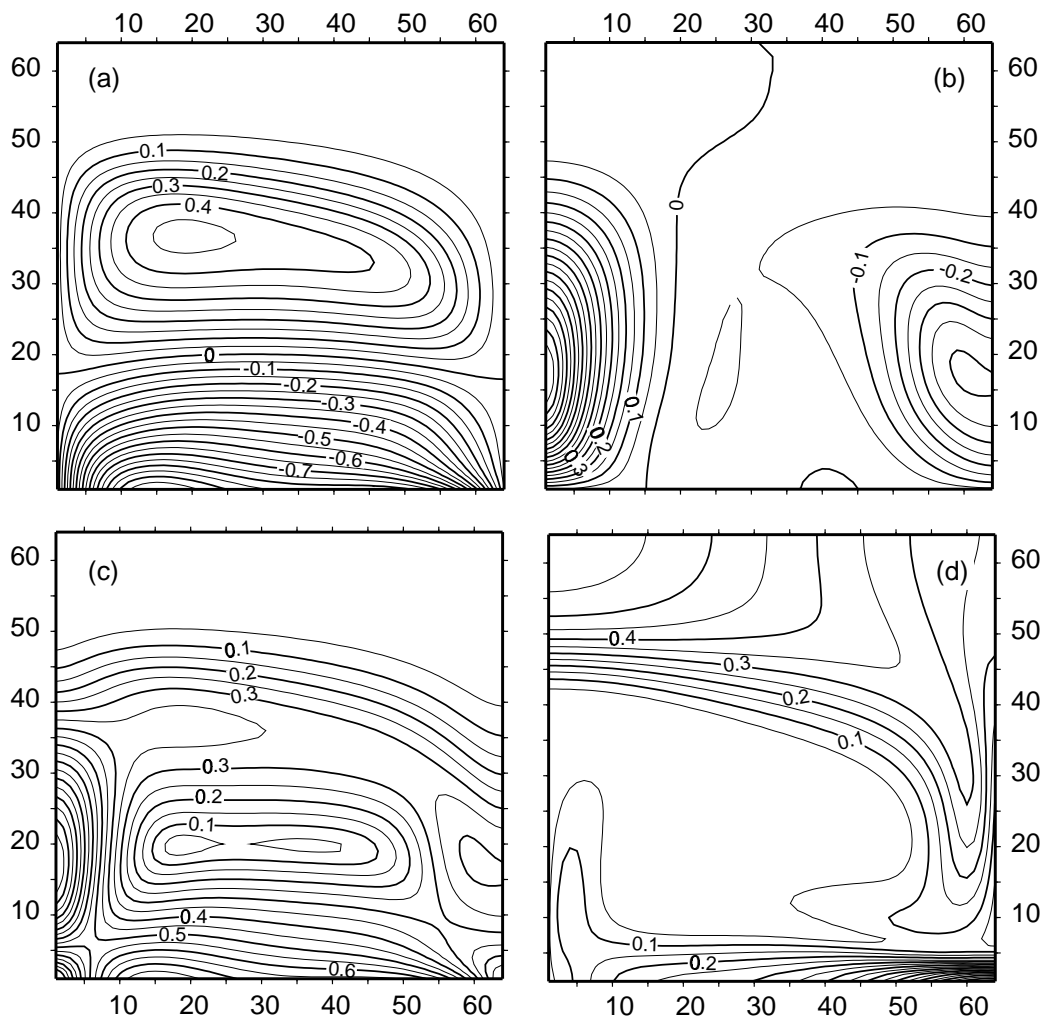


Figure 3-23. Flux de chaleur. (a) Advection latérale; (b) Advection verticale; (c) Advection totale; (d) Conduction totale. L'advection horizontale reste importante dans les couches limites thermiques. La conduction augmente progressivement dans les couches limites et dans le couvercle. $\Delta\mu=10^4$ et $Ra_{1/2}=10^4$.

La quantité $\Delta\Phi = (\Phi_{\bar{v}.T} - \Phi_{\bar{v}T})$ permet de cartographier le mode de transport dominant (fig. 3-24). Pour un fluide isovisqueux, l'advection reste importante même dans les couches limites grâce au courant horizontal. Pour un fluide à viscosité variable, la conduction est dominante dans la partie supérieure de la cellule, apparentée au couvercle. La profondeur où les flux conductif et advectif s'égalisent varie légèrement avec la coordonnée horizontale. Sa forme bombée résulte du courant horizontal au niveau de la couche limite thermique du haut. La distribution des flux de chaleur reflète bien la structure dynamique de la cellule. Une définition possible de la base du couvercle serait donc la profondeur minimale de l'isocontour $\Delta\Phi=0$.

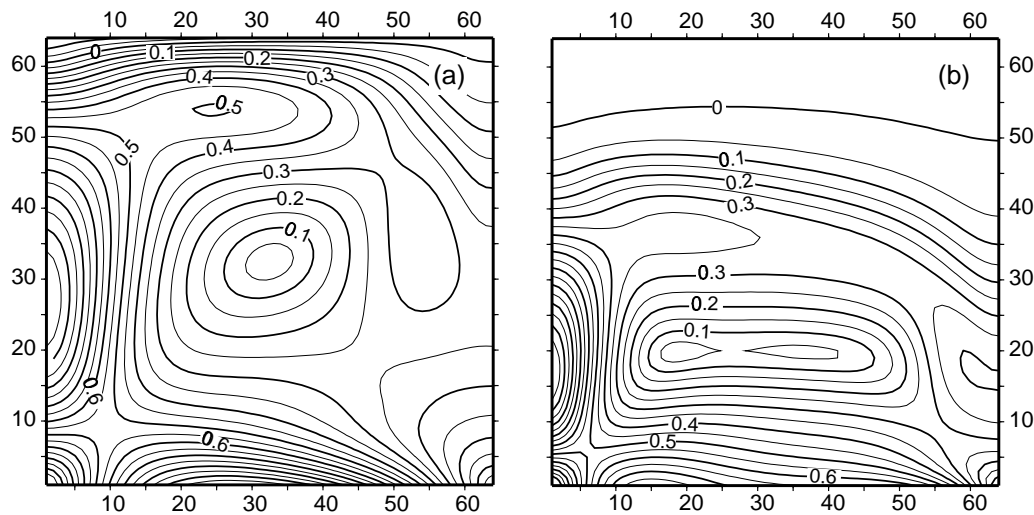


Figure 3-24. Différence des flux advectés et conduits ($\Delta\Phi$). (a) Viscosité constante; (b) $\Delta\mu=10^4$. Dans ce dernier cas, le transport conductif est dominant dans toute la partie supérieure de la boîte.

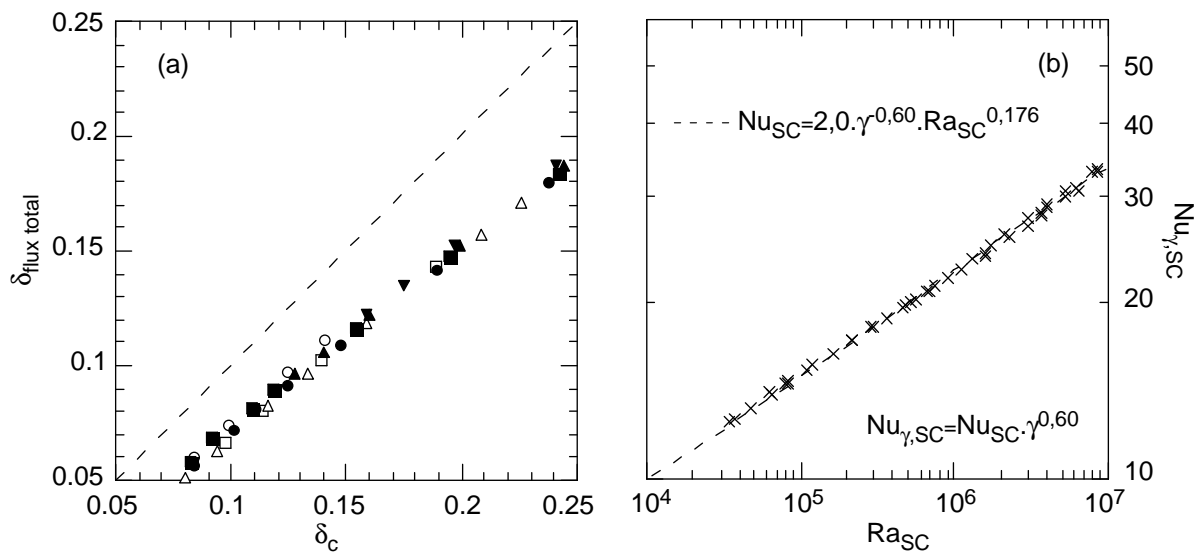


Figure 3.25. Base du couvercle déterminée par l'égalité entre les flux advectif et conductif ($\Delta\Phi=0$). (a) Epaisseur du couvercle, comparée à celle obtenue par la méthode du point d'inflexion. Les symboles sont les mêmes que ceux de la figure (3-22). (b) Flux de chaleur au sommet de la sous-couche. En ordonnées est porté le nombre de Nusselt modifié pour tenir compte de la dépendance en γ .

Pas plus que la précédente, cette méthode ne conduit à un flux de chaleur de sous couche indépendant du contraste de viscosité global (fig. 3-25b). On a:

$$\text{Nu}_{\text{SC}} = 2,0 \cdot \gamma^{-0,60} \cdot \text{Ra}_{\text{SC}}^{0,176} \quad (3-10)$$

De même, le saut de viscosité dans la sous-couche n'est pas constant. En fait, cette méthode donne des résultats très proches de ceux obtenus à partir du profil advectif, avec toutefois un décalage systématique pour des nombres de Rayleigh élevés (fig. 3-25a).

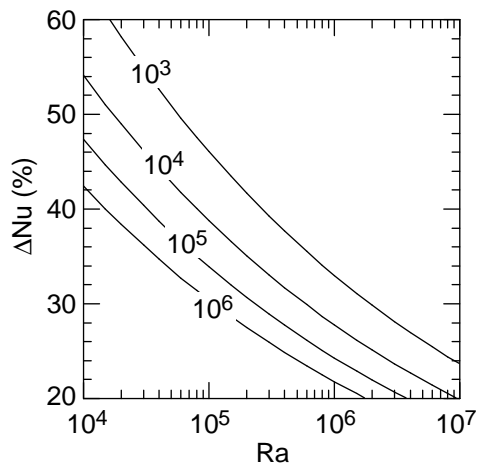


Figure 3.26. Pourcentage de chaleur évacuée par la sous-couche convective d'un fluide à viscosité variable, par rapport à un fluide isovisqueux. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de $\Delta\mu$ (nombres portés sur les courbes).

Ces résultats suggèrent que dans le cas d'un chauffage par le bas, la sous-couche ne se comporte pas comme un fluide isovisqueux, et qu'on ne peut pas lui appliquer les paramétrisations du flux de chaleur obtenues à viscosité constante. Pour un nombre de Rayleigh fixé, le flux de chaleur transporté par la convection est systématiquement plus faible (fig. 3-26). Par exemple, à $\text{Ra}=10^5$, la quantité de chaleur évacuée par un fluide à $\Delta\mu=10^4$ n'atteint que 40% de la quantité de chaleur évacuée par un fluide isovisqueux.

3.4.4 - Définition d'une échelle de température visqueuse.

3.4.4.1 - Echelle de température visqueuse (modèle 1).

Ce premier modèle s'inspire de l'étude menée par *Davaille et Jaupart* (1993) dans le cas d'un chauffage interne seul. Bien que les résultats du paragraphe précédent semblent montrer le contraire, nous allons faire l'hypothèse que le saut de viscosité dans la sous-couche est quasiment indépendant de $\Delta\mu$. Dans ce cas, le nombre de Rayleigh et le nombre de Nusselt calculés sur l'épaisseur de la sous-couche convective vérifient en première approximation:

$$\text{Nu}_{\text{SC}} = a \cdot \text{Ra}_{\text{SC}}^{\beta} \quad (3-11)$$

Ra_{SC} et Nu_{SC} sont calculés par (3-5), et une expression de δ_c peut être obtenue en utilisant le fait que le transport de chaleur dans le couvercle est conductif:

$$\delta_c = \frac{\theta_c}{\text{Nu}} \quad (3-12)$$

La détermination de θ_c suit la méthode proposée par *Davaille et Jaupart* (1993). Dans le cas d'une source de chaleur interne, le saut de température effectif dans la couche limite du haut, ΔT_e , est donnée par (3-1). Dans le cas d'un fluide chauffé par la base, une légère correction doit être apportée à cette expression (Annexe 2):

$$\begin{cases} \Delta T_e = a_1 \cdot \Delta T_y + a_2 \\ \Delta T_v = -\frac{\mu(\bar{T})}{\frac{d\mu}{dT}(\bar{T})} \end{cases} \quad (3-13)$$

Le terme a_2 rend compte du fait qu'il existe aussi une couche limite thermique à la base du fluide, où sont susceptibles de se développer des instabilités. En toute rigueur, a_2 n'est pas complètement indépendant des paramètres de la loi de viscosité. Dans le cas de la loi de viscosité exponentielle, la forme adimensionnalisée de (3-13) est:

$$\theta_c = \bar{\theta} - \left(\frac{c_1}{\gamma} + c_2 \right) \quad (3-14)$$

où $c_1 = a_1 \Delta T$ et $c_2 = a_2$. Les paramètres c_1 et c_2 doivent être déterminés par inversion. On voit que c_2 introduit une dépendance en $\Delta\mu$, contrairement à l'hypothèse de départ. Les résultats de l'inversion montrent à posteriori que cette variation est de second ordre. Finalement, en utilisant (2-16a), Nu est donné en fonction de Ra_{surf} :

$$Nu = a \cdot \left(1 - \frac{\bar{\theta} - c_1/\gamma - c_2}{Nu} \right)^{(3\beta-1)} \left(1 - \bar{\theta} + \frac{c_1}{\gamma} + c_2 \right)^{(\beta+1)} \exp(\beta\gamma\bar{\theta}) \cdot Ra_{surf}^\beta \quad (3-15)$$

Dans cette expression, les Ra_{surf} et γ sont fixés, Nu et $\bar{\theta}$ sont les observables, et 4 paramètres (a , β , c_1 , et c_2) doivent être déterminés par inversion des couples $(Nu, \bar{\theta})$.

3.4.4.2 - Méthode d'inversion.

La méthode d'inversion utilisée dans ce travail suit la théorie de l'inversion non-linéaire développée par *Tarantola et Valette* (1982) et appliquée par *Sotin* (1986). Un modèle est d'abord établi, reliant les variables (ici Nu et $\bar{\theta}$) et les constantes (Ra et γ) du problème physique. Cette expression fait également intervenir un certain nombre de paramètres qu'il faut déterminer. Le processus d'inversion cherche le jeu de paramètres qui minimise les sommes:

$$S_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^N (\bar{\theta} - \bar{\theta}_{th})^2 \quad \text{et} \quad S_{Nu} = \sum_{i=1}^N (Nu - Nu_{th})^2 \quad (3-16)$$

$\bar{\theta}_{th}$ et Nu_{th} étant respectivement la température moyenne et le nombre de Nusselt calculés d'après le modèle (équation 3-15). Pour un point donné, l'ajustement est considéré comme bon lorsque $\bar{\theta}_{th}$ et Nu_{th} tombent respectivement dans l'intervalle d'incertitude de $\bar{\theta}$ et de Nu :

$$\bar{\theta}_{th} = \bar{\theta} \pm \sigma_{\bar{\theta}} \quad \text{et} \quad Nu_{th} = Nu \pm \sigma_{Nu} \quad (3-17)$$

L'histogramme des erreurs relatives caractérise la qualité de l'inversion:

$$e_{\bar{\theta}} = \frac{(\bar{\theta} - \bar{\theta}_{th})}{\sigma_{\bar{\theta}}} \quad \text{et} \quad e_{Nu} = \frac{(Nu - Nu_{th})}{\sigma_{Nu}} \quad (3-18)$$

Ces erreurs doivent rester petites en valeur absolue, et se répartir équitablement autour de zéro. La fonction chi-2, définie par la somme des carrés des erreurs relatives, renseigne également sur la qualité de l'inversion:

$$K^2 = \sum_{i=1}^N (e_{\bar{\theta}}^2 + e_{Nu}^2) \quad (3-19)$$

Une bonne inversion vérifie $K^2 \leq 2N^2$.

3.4.4.3 - Résultats.

Les données de la table (3-2) sont inversées selon la relation (3-15). Le meilleur ajustement est obtenu pour (table 3-3):

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0,69 \pm 0,2 \\ \beta = 0,276 \pm 0,005 \\ c_1 = 0,83 \pm 0,5 \\ c_2 = -0,03 \pm 0,01 \end{array} \right.$$

avec $\sigma_{Nu} = 3\%$ et $\sigma_{\bar{\theta}} = 0,5\%$. Le K^2 (~12), et les histogrammes des erreurs relatives (fig. 3-27) indiquent que la qualité de l'inversion est bonne. En revanche, les paramètres a et c_1 sont mal contraints. Il existe une 'vallée' de faible K^2 dans l'espace (a, c_1) (fig. 3-28), et les valeurs inversées correspondent au minimum absolu de K^2 . Le paramètre c_2 , lui aussi mal contraint, n'apporte qu'une petite correction par rapport au ΔT_e avec chauffage interne. En revanche, la pente logarithmique β est bien déterminée. La matrice de corrélation (table 3-3) indique que a et c_1 (et dans une moindre mesure c_2) sont fortement liés. Une variation de a entraîne systématiquement une variation de c_1 (fig. 3-29). La raison de cette corrélation réside dans le fait

que a et c_1 dépendent tous deux des propriétés de la couche limite thermique du haut: a est relié au nombre de Rayleigh de couche limite, et c_1 fixe le saut thermique dans cette couche limite.

Modèle	K^2	Matrice de corrélation à postériori				Valeur inversée	σ	
		a	β	c_1	c_2			
1	11,7	a	1,000	0,411	-0,991	0,981	0,69	0,2
		β	0,411	1,000	-0,518	0,387	0,276	0,005
		c_1	-0,991	-0,518	1,000	-0,981	0,83	0,5
		c_2	0,981	0,387	-0,981	1,000	-0,03	0,01

Table 3.3. Résultat de l'inversion pour le modèle 1: test du K^2 , matrice de covariance, valeur inversée et incertitude sur cette valeur.

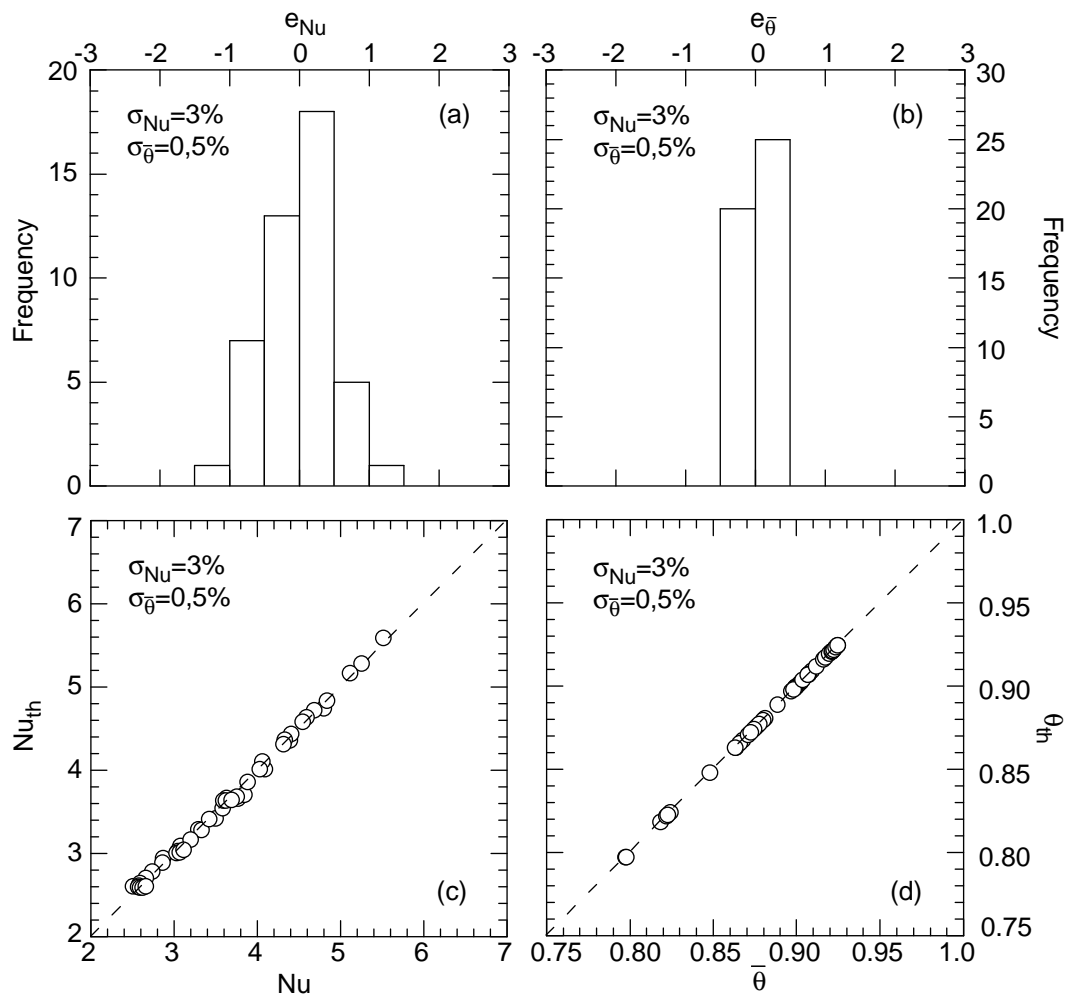


Figure 3.29. Histogrammes de répartition des erreurs relative sur Nu (a) et (b), pour l'inversion des résultats numériques suivant (3-15). (c) et (d) Correspondance entre les variables d'entrée et les variables calculées par le modèle.

Le fait que c_1 soit mal contraint ($\sigma_{c_1}=0,5$) montre que l'inversion ne parvient pas à séparer le couvercle conductif et la couche limite thermique de la sous-couche convectrice. Un grand nombre de couple (a, c_1) expliquent les résultats numériques et sont autant de modèles possibles.

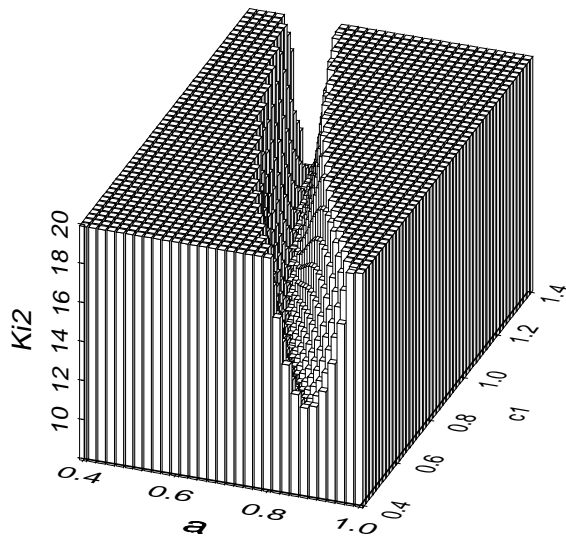


Figure 3-28. Surface de Ki^2 dans le plan (a, c_1) .

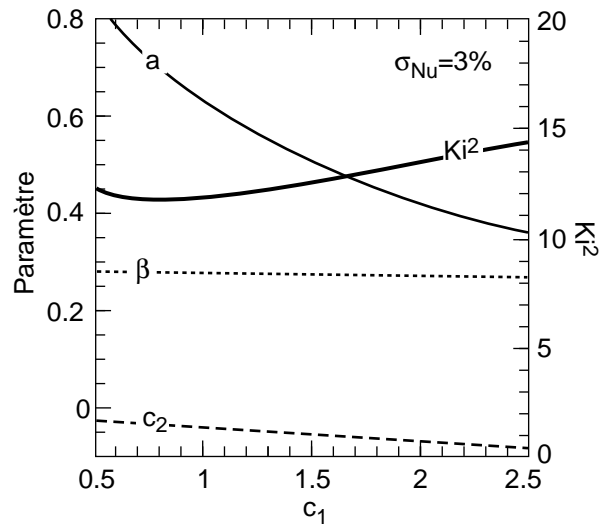


Figure 3-29. Lien entre les différents paramètres, pour une valeur de c_1 bien contrainte. Le Ki^2 correspondant est également indiqué.

3.4.5 - Saut de température dans la couche limite thermique du bas.

L'amplitude de la couche limite thermique du bas est plus facile à déterminer. Les théories analytiques de *Morris et Canright* (1984) et de *Solomatov* (1994) prévoient un comportement en $1/\gamma$ pour le saut de température dans la couche limite thermique du bas. Puisque $\bar{\theta}$ est une

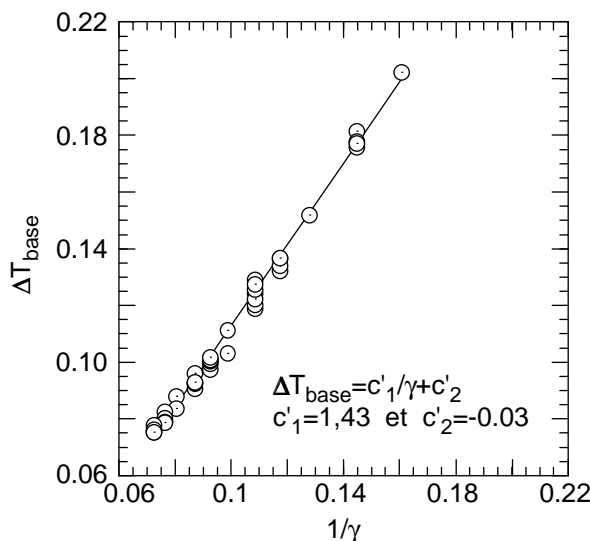


Figure 3.30. Saut de température observée à la base du fluide.

observable de notre modèle, on peut directement calculer la différence $(1 - \bar{\theta})$. Une méthode de moindre carrés appliquée aux données 3-2 montre que le saut de température est de la forme:

$$(1 - \bar{\theta}) = \frac{c'_1}{\gamma} + c'_2 \quad (3-20a)$$

$$\text{avec } \begin{cases} c'_1 = 1,43 \pm 0,01 \\ c'_2 = -0,03 \pm 0,01 \end{cases} \quad (3-20b)$$

et un coefficient de corrélation de 97% (fig. 3-30). La correction due à la présence de la couche limite thermique

du haut (paramètre c_2) est petite. Une conséquence importante de ce résultat est que le saut de viscosité à travers la couche limite du bas (ξ) est, en première approximation, indépendant de $\Delta\mu$: $\xi \sim e^{1,43} = 4,2$. Cette valeur est en bon accord avec le contraste de viscosité dans la couche du bas prédit par les modèles analytiques: $\xi = e^{1,7} \sim 2,7$ (Morris et Canright, 1984; Fowler, 1985).

3.4.6 - Paramétrisation sur toute l'épaisseur de la boîte (modèle 2).

Plutôt que d'écrire l'équation (3-11) pour la sous-couche convectrice, il est possible de l'appliquer à l'épaisseur totale du fluide, moyennant une petite modification rendant compte des variations de viscosité. Il faut donc introduire un second paramètre (Christensen, 1984a). Les travaux de Morris et Canright (1984), et de Fowler (1985) suggèrent une loi de la forme:

$$Nu = a \cdot \gamma^c \cdot Ra_{\theta}^{-\beta} \tag{3-21}$$

où $\gamma = \ln(\Delta\mu)$ pour une loi de viscosité exponentielle. Appliquée à cette loi (modèle 2a), l'inversion des données de la table 3-2 conduit à:

$$\begin{cases} a = 3,8 \pm 0,2 \\ \beta = 0,258 \pm 0,006 \\ c = -1,63 \pm 0,04 \end{cases}$$

où il a été entré $\sigma_{Nu} = 3\%$ et $\sigma_{\theta} = 0,5\%$. La qualité de l'inversion est bonne ($K^2 \sim 14$, voir aussi les histogrammes sur la figure 3-31). Les paramètres a et β sont indépendants. En revanche, le paramètre c, qui contrôle l'importance du rapport de viscosité, est légèrement corrélé aux deux autres (cf. la matrice de corrélation, table 3-4).

Modèle	K^2	Matrice de corrélation à postériori			Valeur inversée	σ	
		a	β	c			
2a	14,1	a	1,000	0,135	-0,593	3,8	0,2
		β	0,135	1,000	-0,876	0,258	0,009
		c	-0,593	-0,876	1,000	-1,63	0,04
2b	4,5	a	1,000	0,129	-0,590	3,8	0,3
		β	0,129	1,000	-0,875	0,260	0,006
		c	-0,590	-0,875	1,000	-1,64	0,07

Table 3.4. Résultat de l'inversion pour les modèles 2a et 2b (θ fixée par $\Delta\mu$): test du K^2 , matrice de covariance, valeur inversée et incertitude sur cette valeur.

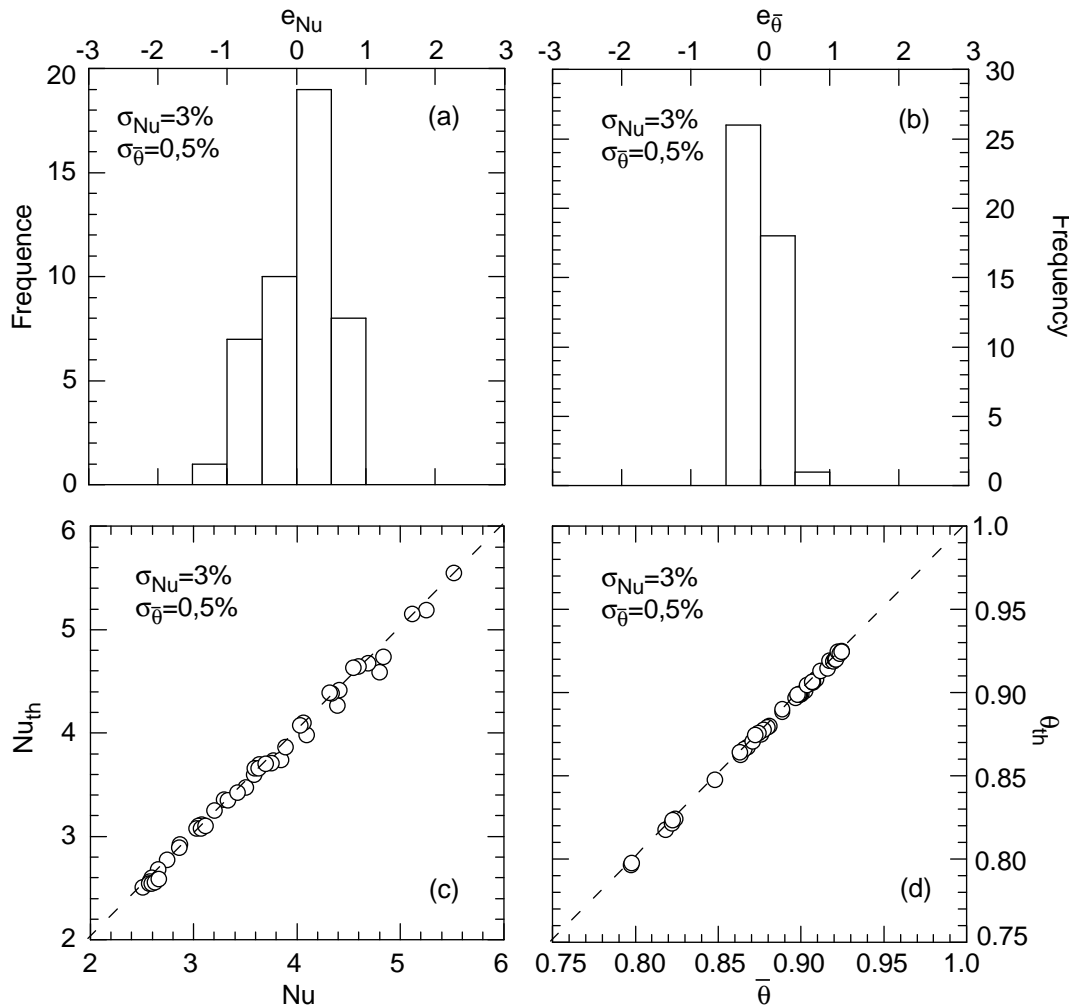


Figure 3.31. Histogrammes de répartition des erreurs relative sur Nu (a) et (b), pour l'inversion des résultats numériques suivant (3-15). (c) et (d) Correspondance entre les variables d'entrée et les variables calculées par le modèle.

Il est intéressant de reprendre l'inversion précédente en remplaçant la valeur de $\bar{\theta}$ calculée numériquement par celle issue de la loi (3-20): $\bar{\theta}$ n'est plus une variable, mais une constante de l'inversion, au même titre que γ et Ra (modèle 2b). Dans ce cas, l'inversion des nombres de Nusselt reste de bonne qualité, et les paramètres obtenus sont très proches des valeurs du modèle 2a (tableau 3-4). La définition (3-20) de $\bar{\theta}$ est compatible avec la paramétrisation (3-21). Au total, la relation:

$$Nu = 3,8 \cdot \gamma^{-1,63} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{0,258} \tag{3-22}$$

décrit bien le flux de chaleur véhiculé par le régime de couvercle. Elle explique les nombre de Nusselt à 3% près et les température du coeur isotherme ($\bar{\theta}$) à 0,5% seulement (fig. 3-32). Les points instationnaires (représentés par des points blancs sur la fig. 3-32), qui n'ont pas été retenus pour l'inversion, se calent bien sur la cette loi.

Le terme $\gamma^{1,63}$ de la paramétrisation (3-22) freine considérablement l'évacuation de la chaleur. Pour un nombre de Rayleigh de 10^5 , la quantité de chaleur amenée en surface pour un contraste de viscosité de 10^3 n'est que 30% de celle apportée par un fluide isovisqueux, 20%

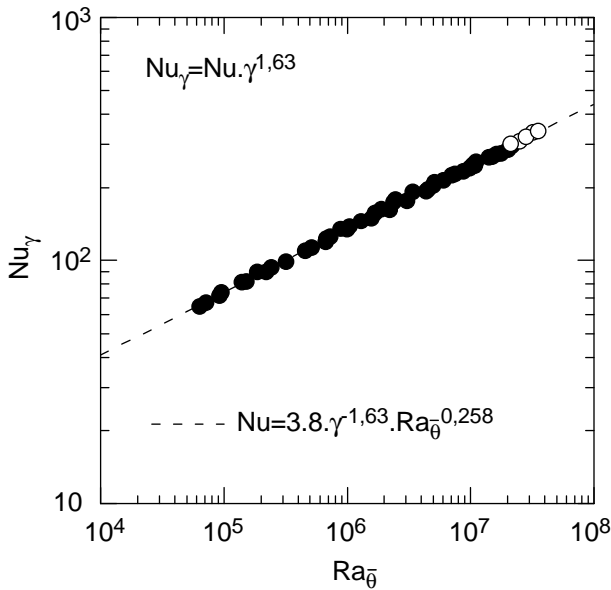


Figure 3.32. Paramétrisation du régime de couvercle. Les points blancs correspondent à des cas instationnaires moyennés et se câlent bien sur la loi (3-20).

pour $\Delta\mu=10^4$, et seulement 10% pour $\Delta\mu=10^6$ (fig. 3-33a). Enfin, la différence entre le flux du régime de couvercle et le flux isovisqueux s'accroît avec le nombre de Rayleigh: une convection plus vigoureuse profite d'avantage au fluide isovisqueux.

Le flux de chaleur ne peut pas être décrit avec une loi indépendante du contraste de viscosité globale. Le contraste de viscosité à travers la couche limite thermique du bas est indépendant de γ , mais pas le saut température ΔT (équation 3-20). Cette dépendance se répercute sur le flux de

chaleur que peut transmettre la couche limite du bas:

$$q = \frac{k\Delta T_{\text{bas}}}{d} = \frac{k\Delta T}{b} \frac{(1-\bar{\theta})}{\delta} \tag{3-23}$$

où $(1-\bar{\theta})$ est donné par (3-20), d est l'épaisseur de la couche limite et δ cette même épaisseur adimensionnée. En reprenant l'analyse de couche limite (§1.2.6), on trouve une expression de l'épaisseur δ , et on retrouve la dépendance en γ du nombre de Nusselt:

$$\frac{b}{\delta} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{\text{bas}}} \cdot \frac{Ra_{\bar{\theta}}}{Ra_{\delta}} \right)^{1/3} \tag{3-24}$$

$$Nu = (1-\bar{\theta})^{4/3} \cdot \left(\frac{Ra_{\bar{\theta}}}{Ra_{\delta}} \right)^{1/3} \tag{3-25}$$

où Ra_{δ} est le nombre de Rayleigh de couche limite. En utilisant (3-20), et en négligeant c_2 , on fait apparaître un terme en $\gamma^{1,33}$, proche de $\gamma^{1,63}$.

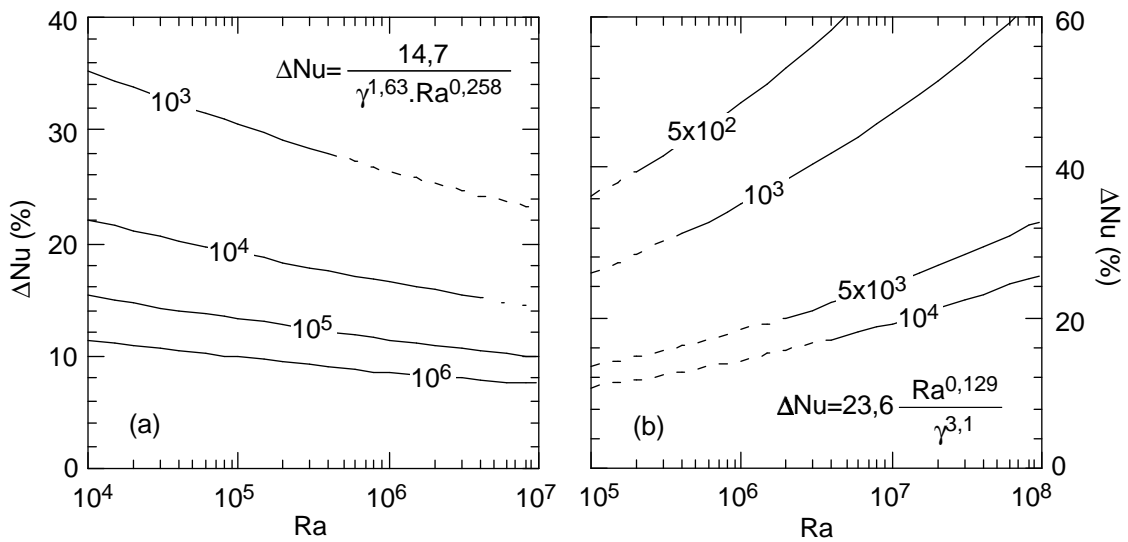


Figure 3.33. Rapport entre le flux de chaleur transporté par un fluide à viscosité variable et le flux de chaleur pour un fluide isovisqueux, en fonction du nombre de Rayleigh. Plusieurs rapports de viscosité sont représentés (valeur portée sur les courbes). Les résultats sont en pourcentages. (a) Régime de couvercle, relation (3-22). Les pointillés représentent le prolongement de (3-22) dans le régime transitoire. (b) Régime transitoire, équation (3-26). Les pointillés représentent le prolongement de (3-26) dans le régime de couvercle.

3.4.7 - Paramétrisation des autres observables.

En plus du nombre de Nusselt et de la température du coeur isotherme, la vitesse maximale aux frontières de la boîte, et le maximum de la contrainte déviatorique $\tau = (\tau_{ij}^2 / 2)^{1/2}$ peuvent être paramétrisés à l'échelle de la boîte totale, toujours à l'aide d'une inversion.

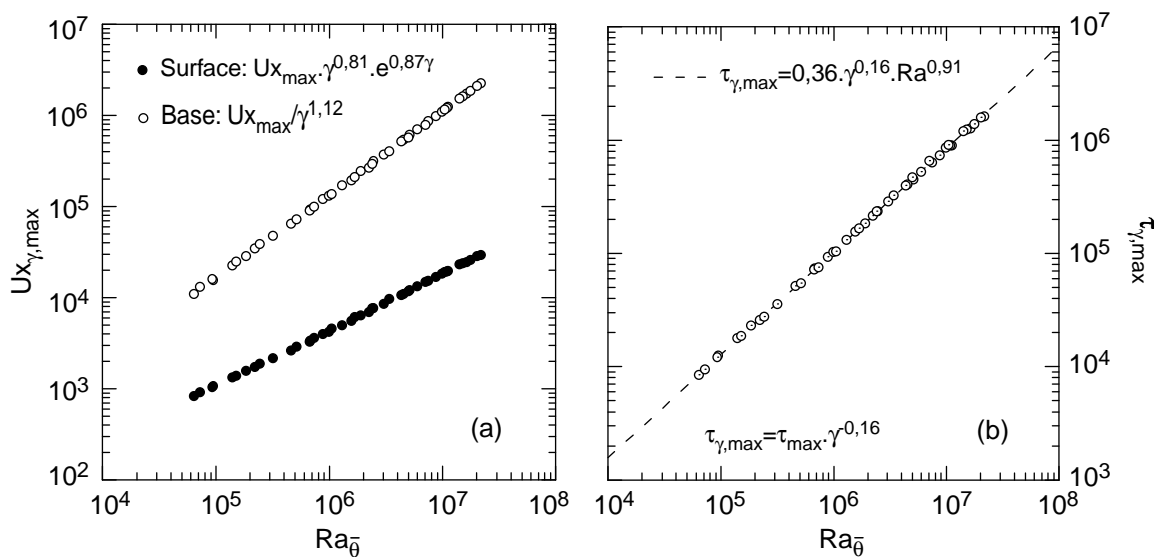


Figure 3.34. Paramétrisation de la vitesse maximale aux frontières (a) et du maximum de contrainte (b).

En surface, la vitesse maximale devient très faible, et la dépendance en $\Delta\mu$ est très prononcée: il est nécessaire de faire apparaître un terme en $e^{-c\gamma}$. Cette vitesse est représentative de la vitesse du couvercle. Quant à la vitesse en base de fluide, elle dépend également de $\Delta\mu$, mais moins fortement (fig. 3-34a). Elle est dopée par la faible viscosité en base de boîte.

3.4.8 - Régime transitoire.

Dans le cas du régime transitoire, il n'existe pas de relation simple entre la température du coeur isotherme et le rapport de viscosité (fig. 3-7). En particulier, la loi (3-20) n'est plus valable. Une paramétrisation du flux de chaleur suivant une loi de la forme (3-21) donne des résultats acceptables. Les calculs utilisés pour l'inversion sont listés dans le tableau 3-6, et le meilleur jeu de paramètres est:

$$\begin{cases} a = 6,1 \pm 0,9 \\ \beta = 0,45 \pm 0,02 \\ c = -3,1 \pm 0,2 \end{cases}$$

avec $K^2=22,0$ et $\sigma_{Nu}=5\%$. La relation :

$$Nu = 6,1 \cdot \gamma^{-3,1} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{0,45} \tag{3-26}$$

explique assez bien les données, malgré une dispersion plus importante que dans le cas du régime de couvercle (fig. 3-35). Le paramètre multiplicatif a est moins bien contraint que pour le régime de couvercle ($\sigma_a=0,9$). La valeur obtenue pour le paramètre c suggère que le régime transitoire est effectivement très sensible à la valeur du saut de viscosité. Un autre point important est que cette paramétrisation n'est pas valable pour $\Delta\mu \leq 10^2$.

$\Delta\mu$	Ra_{surf}	$\bar{\theta}$	Nu	$\Delta\mu$	Ra_{surf}	$\bar{\theta}$	Nu
5×10^2	4472,1	0,761	7,282	5×10^3	2828,4	0,846	6,925
10^3	2529,8	0,800	6,140		5656,9	0,835	8,817
	3162,3	0,796	6,643	11314	0,819	11,391	
	6324,6	0,780	8,527	14142	0,811	12,435	
	12649	0,760	11,039	10^4	2000,0	0,866	6,429
	25298	0,729	14,502		4000,0	0,858	8,092
	31623	0,715	15,926		8000,0	0,846	10,316
$2,5 \times 10^3$	2000,0	0,832	5,918	10000	0,840	11,204	

Table 3.6. Données utilisées pour l'inversion du régime transitoire.

Enfin, il est intéressant de noter la valeur élevée de β . Celle-ci compense en partie l'effet du terme $\gamma^{3,1}$. Aux petits nombres de Rayleigh, le régime transitoire transporte la chaleur moins efficacement que le régime isovisqueux (fig. 3-33b). Mais cette différence s'estompe lorsque le nombre de Rayleigh augmente: le régime transitoire se rapproche du régime du régime isovisqueux, d'autant plus rapidement que $\Delta\mu$ est petit.

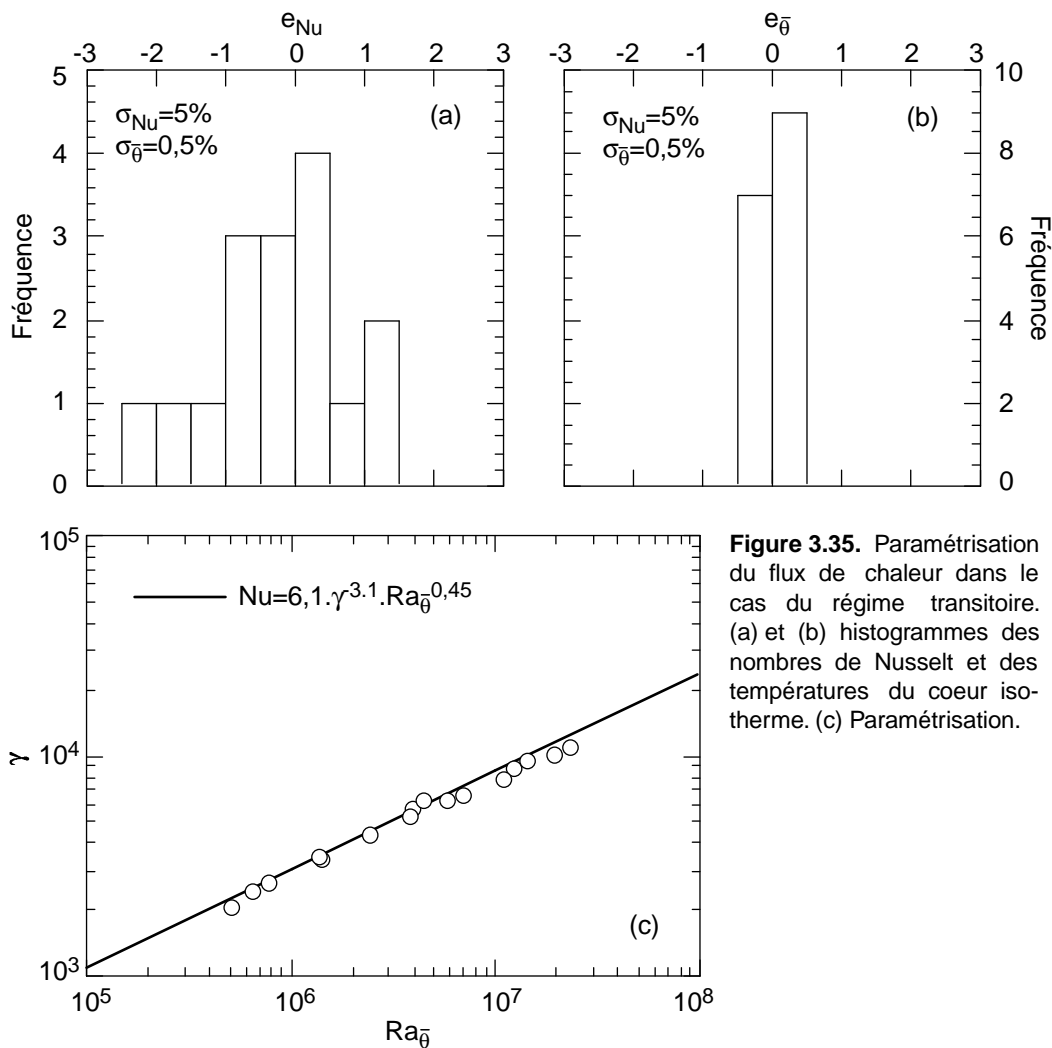


Figure 3.35. Paramétrisation du flux de chaleur dans le cas du régime transitoire. (a) et (b) histogrammes des nombres de Nusselt et des températures du coeur isotherme. (c) Paramétrisation.

3.5 - Discussion: détermination du couvercle et rôle des couches limites thermiques.

3.5.1 Comparaison avec d'autres études.

Une paramétrisation à l'échelle de la boîte totale donne une bonne description du régime de couvercle, étant entendu qu'un paramètre supplémentaire est nécessaire. D'autres études, théoriques et numériques et ont déjà proposé ce type de loi. *Morris et Canright* (1984) définissent

un nombre de Rayleigh adapté à la couche limite du bas, à ceci près qu'il garde comme échelle de hauteur totale du fluide:

$$Ra_\gamma = \frac{\rho g \alpha \Delta T_{base} d^3}{\mu_{base} \kappa} \tag{3-27}$$

Lorsque Ra_γ est remplacé par $Ra_{\bar{\theta}}$, leur équation 24 devient $Nu = C_1 \cdot \gamma^{-6/5} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{1/5}$. C_1 est une constante qui dépend du rapport d'aspect. Pour $r_a=1$, $C_1=1.822$. La loi prédite par *Fowler* (1985) est légèrement différente: $Nu = C_2 \cdot \gamma^{-1} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{1/5}$, où $C_2=2.043$ pour $r_a=1$. Nos résultats ont une pente systématiquement plus forte que la valeur de 0,2 prédite (fig. 3-36). Le résultat (3-22) est donc assez éloigné des résultats théoriques de *Morris et Canright* (1984) et de *Fowler* (1985), et en particulier, il accentue la dépendance en γ du flux de chaleur.

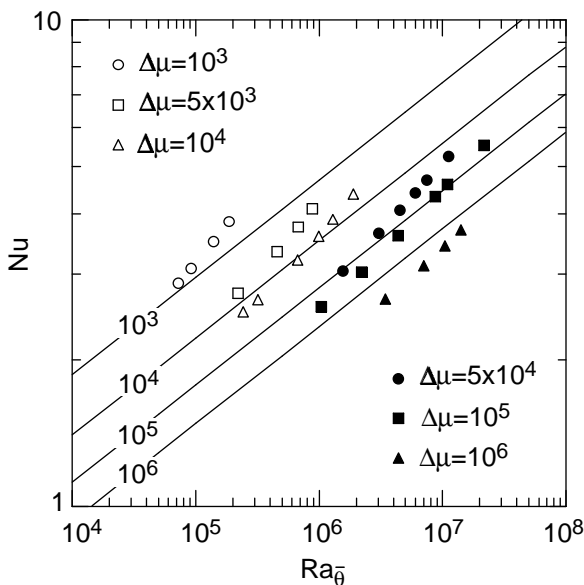


Figure 3.36. Comparaison de nos résultats avec la loi de *Fowler* (1985) (droites) tracée pour différents rapport de viscosité.

Il est également en désaccord avec la paramétrisation récemment proposée par *Moresi et Solomatov* (1995) (fig. 3-37a). Forcée avec les paramètres proposés par *Moresi et Solomatov* ($a=1,89$ $\beta=0,2$ et $c=-1,02$), l'inversion de nos données est de mauvaise qualité (on a $K^2=269$; voir aussi l'histogramme des nombre de Nusselt, fig. 3-37b).

Moresi et Solomatov ne publient pas de valeurs de nombres de Nusselt, si bien qu'il n'est pas possible de tester notre paramétrisation avec leur résultats. En revanche, il est possible de l'appliquer aux résultats d'un troisième modèle, celui de *Christensen* (1984a). Les points de

cette étude satisfaisant le critère défini au §3.4.1 sont rappelés dans le table 3-7. Dans un premier temps, la température de sous-couche a été recalculée (*Christensen* ne donne que des températures moyennées sur toute la boîte) à partir de la loi (3-18) (ou, dans le cas de *Moresi et Solomatov*, par itération successive de la relation $(1 - \bar{\theta}) = 1,1 \cdot \gamma^{-0,73} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{-0,04}$). On s'aperçoit alors que la relation (3-20) explique bien les résultats de *Christensen* (fig. 3-38a). En revanche, la paramétrisation proposée par *Moresi et Solomatov* (1995) les décrit assez mal (fig. 3-38b).

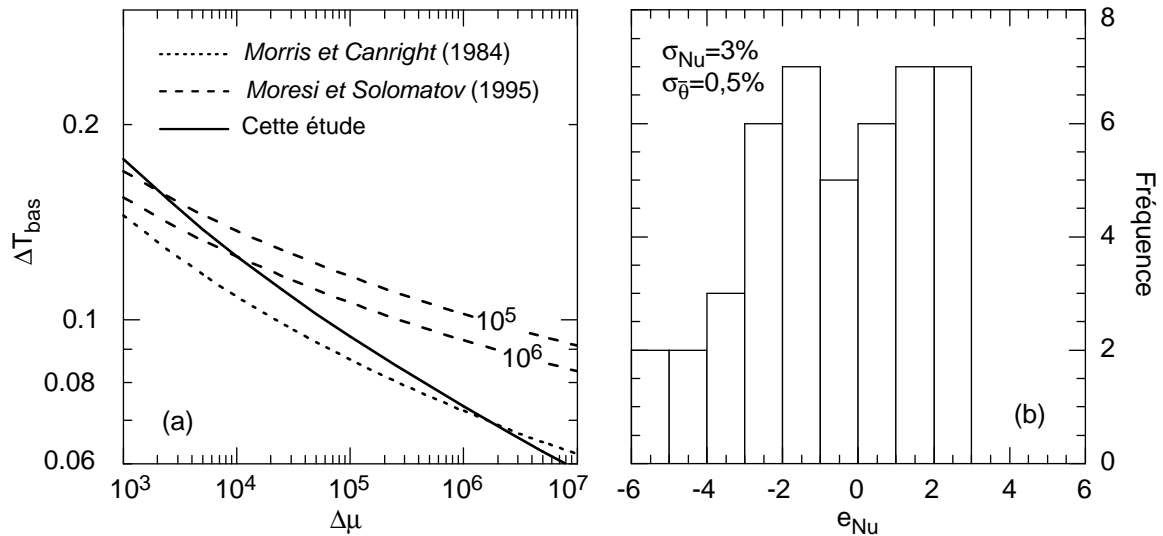


Figure 3.37. (a) Saut de température dans la couche limite thermique du bas en fonction du rapport de viscosité : comparaison entre différentes études. (b) Histogramme des nombres de Nusselt pour l'inversion forcée de nos résultats selon la paramétrisation de Moresi et Solomatov (1995).

$\Delta\mu$	Ra_{surf}	Nu	$\Delta\mu$	Ra_{surf}	Nu
10^3	300	3,036	$6,4 \times 10^4$	37,5	2,550
	1000	4,484		125	3,424
4×10^3	150	2,744	$2,5 \times 10^5$	375	4,678
	500	3,903		1250	6,633
$1,6 \times 10^4$	75	2,600	19	2,568	
	250	3,575	63,2	3,392	
	750	4,970	189,7	4,579	
			632	6,362	

Table 3.7. Données de Christensen (1984) appartenant à priori au régime de couvercle.

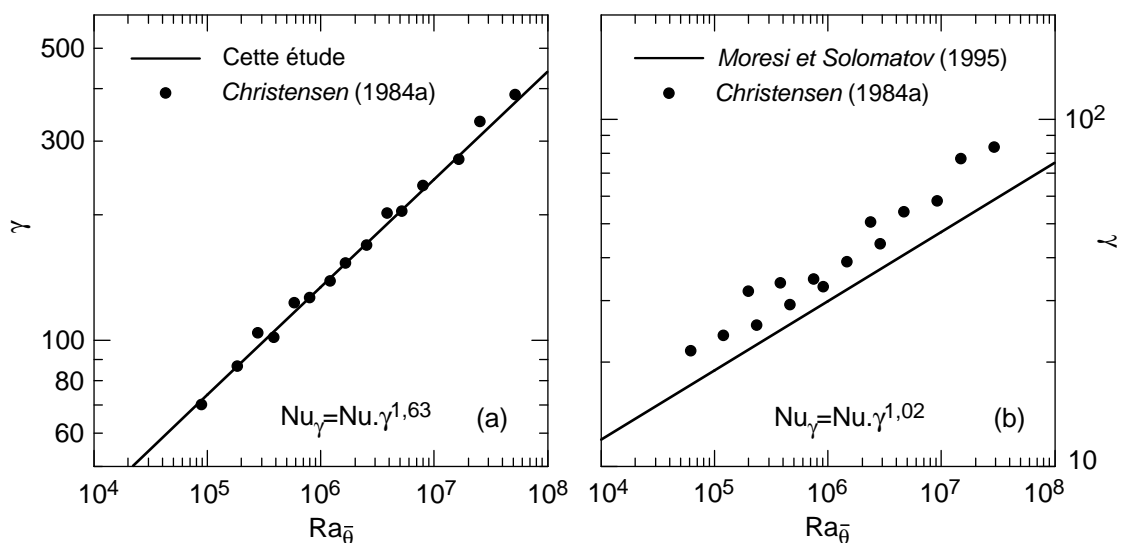


Figure 3.38. Comparaison entre les nombres de Nusselt calculés par Christensen (1984a) et différentes paramétrisations du régime de couvercle. (a) cette étude; (b) Moresi et Solomatov (1995).

3.5.2 - Délimitation du régime de couvercle.

La majorité des points qui ne vérifient pas $Ra_{surf} \leq Ra_c$ ne vérifient pas non plus l'équation (3-20) (fig. 3-39). Cela justifie à posteriori le critère défini au §3.4.1, au moins pour des rapports de viscosité pas trop élevés. Dès que les variations de viscosité deviennent plus importantes, cet accord est moins évident. Ainsi, pour $\Delta\mu=10^5$, même les points $Ra_{surf} \geq Ra_c$ se situent sur (3-20). Cela peut suggérer, comme le supposent *Moresi et Solomatov* (1995), que seul le régime de couvercle est possible au delà d'un certain $\Delta\mu$. Dans cette hypothèse, nos expériences numériques situent cette limite dans l'intervalle $10^4 \leq \Delta\mu \leq 10^5$. Il faut cependant moduler cette

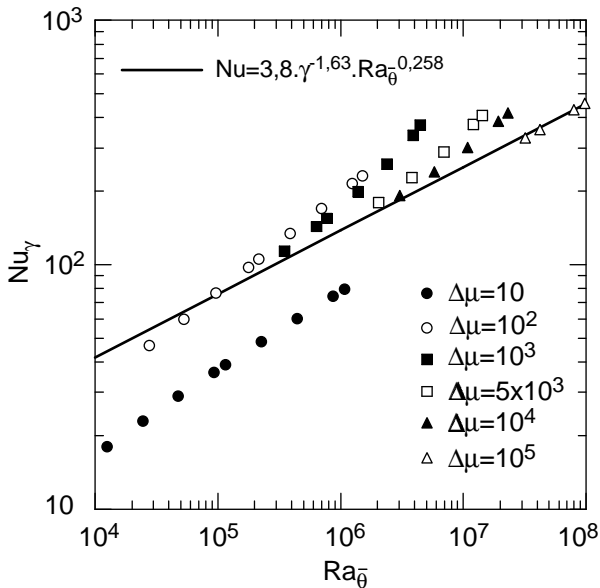


Figure 3.39. Cas n'appartenant à priori pas au régime de couvercle.

remarque par le fait que nous disposons de peu de calculs à nombre de Rayleigh élevé dans cet intervalle. D'autre part, dès que l'on cherche à augmenter la valeur du nombre de Rayleigh, se pose le problème de la précision des calculs. En particulier, la couche limite du bas s'amincit notablement, et fausse la solution numérique (cf. §2.4.5). Toutefois, pour les points incriminés, l'examen des températures moyennes révèle un écart significatif (supérieur à 0,5%) par rapport à (3-18), ce qui semble plutôt confirmer que ces points ont quitté le régime de couvercle.

Il est clair qu'aucun points à $\Delta\mu=10^2$ (et a fortiori $\Delta\mu=10$) ne sont pas dans le régime de couvercle (fig. 3-39). Au lieu de cela, ces points semblent suivre un régime unique (pas de variation de pente). On retrouve l'idée qu'un saut de viscosité minimum est nécessaire pour qu'un couvercle puisse se former. *Nataf* (1986), au moyen d'une autre analyse, fixe cette limite autour de $\Delta\mu=250$. Un calcul pour ce rapport de viscosité et $Ra_{1/2}=10^4$ ($Ra_{surf}=632$) fournit $Nu=3,543$, soit une valeur à 4% à celle prédite par (3-20). Cet écart, comme celui qui existe sur $\bar{\theta}$ (0,767 au lieu de 0,771 selon (3-18), soit 0,5%), est juste à la limite de ce qui est toléré par l'inversion.

Ces résultats sont en contradiction avec le seuil de viscosité proposé par *Stengel et al.* (1978). La valeur de $(\Delta\mu)_c = e^8$ est obtenue en supposant que l'épaisseur (adimensionnée) du couvercle est égale à la température à sa base: $\delta_c \sim \theta_c$. En fait, la pente devrait être égale au flux de chaleur en surface (équation 3-10). Le nombre de Rayleigh de sous-couche (calculé avec la viscosité à la température $\theta_{1/2} = 1/2(1 + \theta_c)$) s'écrit:

$$Ra_{SC,1/2} = Ra_{1/2} \cdot \frac{z_{SC}^3 (1 - Nu + Nu \cdot z_{SC})}{\mu(\theta_{1/2})} \quad (3-28)$$

au lieu de:

$$Ra_{SC,1/2} = Ra_{1/2} \cdot \frac{z_{SC}^4}{\mu(\theta_{1/2})}$$

où z_{SC} est l'épaisseur (adimensionnée) de la sous-couche. La dérivée de (3-28) par rapport à z_{SC} est:

$$\frac{\partial Ra_{SC,1/2}}{\partial z_{SC}} = Ra_{SC,1/2} \cdot \left(\frac{3}{z_{SC}} + \frac{Nu}{(1 - Nu + Nu \cdot z_{SC})} - \gamma \frac{Nu}{2} \right)$$

Le régime de couvercle doit vérifier:

$$\gamma \geq \frac{6}{Nu \cdot z_{SC}} + \frac{2}{(1 - Nu + Nu \cdot z_{SC})} \quad \text{et} \quad z_{SC} \leq 1 \quad (3-29)$$

au lieu de $\gamma \geq 8/z_{SC}$. En prenant un nombre de Nusselt limite de 2, (3-29) fournit une valeur approximative du γ critique (en toute rigueur, cette équation est également vérifiée pour une plus large gamme de γ , mais pour des z_{SC} inférieurs à 0,5): $\gamma_c \sim 5$ soit $(\Delta\mu)_c \sim 150$. Cette valeur est tout à fait conforme à nos observations.

Ogawa et al. (1991) proposent également une frontière entre le régime de couvercle et le régime transitoire. En fait, ils ne disposent que de deux points: le $\Delta\mu$ critique (e^8) imposé par *Stengel et al.* (1982), et un calcul numérique 3D pour lequel chacun des deux régimes est observé. Ces deux points définissent la relation:

$$\Delta\mu = 1180 \cdot Ra_{surf}^{0,309} \quad (3-30)$$

Le calcul d'Ogawa et al. a été effectué pour $\Delta\mu = 10^4$, et leur relation prédit alors $Ra_{surf} = 1010$. Notre critère prévoit un Ra_{surf} critique relativement proche: 1504. Les autres calculs d'Ogawa et al. se situent soit complètement dans le régime de couvercle 3D, soit complètement dans le régime

de couche totale 3D ou en rouleaux. Ils restent donc éloignés aussi bien de la limite (3-28) que de celle proposée dans ce travail, et une vérification plus approfondie n'est pas possible.

Les expériences analogiques en surface libre de *Giannadrea et Christensen* (1992) distinguent deux régimes, délimités par une valeur critique de $Ra_{1/2}$. Ces points peuvent aussi être rangés selon le critère utilisé dans ce travail. Un bon ajustement est obtenu en inversant seulement les données vérifiant $Ra_c \leq Ra_{surf}$ (fig. 3-40a). Les autres points se rangent également le long d'une loi de puissance, mais cette fois-ci l'ajustement est plus médiocre (fig. 3-40b). Finalement, les expériences de Gianandrea et Christensen peuvent également s'interpréter en terme d'un régime de couvercle et d'un second régime moins bien contraint, la limite entre les deux régime étant défini en fonction du rapport de viscosité par le nombre de Rayleigh critique, $Ra_c(\Delta\mu)$. Cette analyse est cependant limitée par le fait que seuls les $Ra_{1/2}$ sont disponibles.

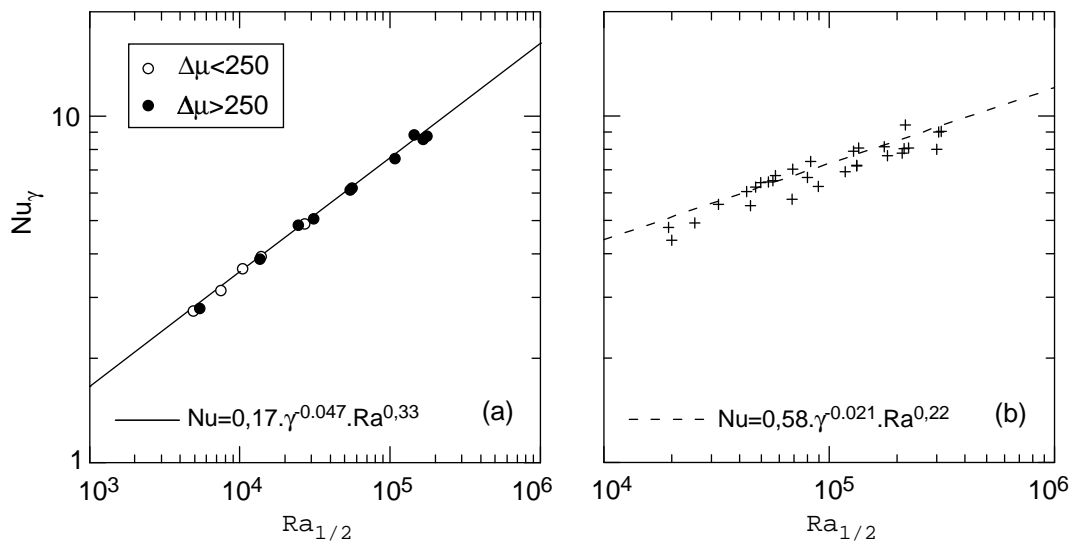


Figure 3.40. Classées en deux catégories selon la valeur du nombre de Rayleigh de surface critique, les expériences de *Gianandrea et Christensen* (1992) définissent deux régimes: l'un apparenté au régime de couvercle (a); et l'autre au régime transitoire (b).

Finalement, la frontière entre les régimes de couvercle et transitoire suggérée par nos calculs est représentée sur la figure 3-41a. Les pointillés indiquent que des recherches supplémentaires doivent être menées pour trancher la question. Un point d'ancrage à $\Delta\mu=150$ a été arbitrairement fixé sur la courbe du nombre de Rayleigh critique fixant de démarrage de la convection. La courbe du nombre de Nusselt critique (Nu_c) en fonction de $\Delta\mu$, obtenue en reportant (3-18) et (2-16a) dans (3-20) est également représentée (fig. 3-41b). Elle est comparée avec la limite proposée par *Nataf* (1986), où 50% du nombre de Nusselt sont dus au mouvement du couvercle, et 50%

sont liés à la conduction de la chaleur issue de la sous-couche à travers le couvercle. $Nu_{50/50}$ et Nu_c sont respectivement donnés par:

$$Nu_{50/50} = 9 \frac{\sqrt{\Delta\mu}}{(\ln \Delta\mu)^{5/2}} \quad (3-31a) \quad \text{et} \quad Nu_c = 5,8 \frac{\Delta\mu^{0,137}}{(\ln \Delta\mu)^{0,6}} \quad (3-31b)$$

La principale différence entre les deux courbes tient au fait que pour une répartition égale du nombre de Nusselt, la convection est déjà dans le régime transitoire.

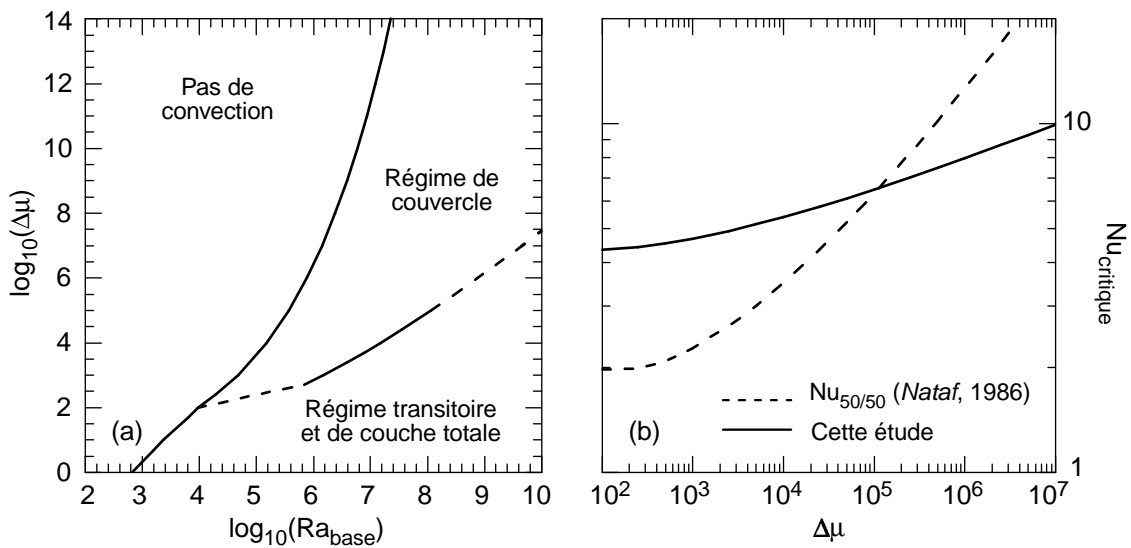


Figure 3.41. (a) Limite du régime de couvercle. Une étude complémentaire doit être menée pour les portions indiquées en pointillés. (b) Nombre de Nusselt critique en fonction du rapport global de viscosité.

3.5.3 - Détermination des couches limites thermiques.

Les résultats 4.5.1 et 4.5.2 montrent qu'il est très difficile de distinguer la limite entre le couvercle et la couche limite thermique du haut par une simple étude des flux de chaleur. En fait, la transition entre les deux zones est très souple, le sommet de la couche limite et la base du couvercle étant thermiquement équivalents. Contrairement au cas du chauffage interne, il n'apparaît pas de paramétrisation indépendante de γ sur l'épaisseur de la sous-couche pour un chauffage par le bas, bien que la couche limite thermique du bas soit bien contrainte.

- *Couche limite thermique du bas.* Dans le cas du régime de couvercle, l'amplitude thermique de cette couche limite est fixée par le saut global de viscosité avec une bonne approximation: elle doit être de l'ordre de grandeur de l'échelle de température visqueuse, $1/\gamma$ (Morris et Canright, 1984). Moresi et Solomatov (1995) paramétrisent $(1-\bar{\theta})$ en fonction de $\Delta\mu$ et de Ra , ce dernier

paramètre étant peu influent. A $\Delta\mu$ donné, une légère dépendance en Ra est effectivement visible. Cette dispersion reste confinée dans l'intervalle d'erreur de $\bar{\theta}$ (~0,5-1,0%), et peut donc être expliquée par les imprécisions des calculs numériques. En revanche, la dépendance en $\Delta\mu$, exprimée par $c'_2=-0,03$, n'est pas expliquée par les incertitudes sur $\bar{\theta}$. Elle a donc bien une signification physique. Par exemple, pour $\Delta\mu=10^6$, $\bar{\theta}\sim 0,92$, et une erreur de 1% induit une variation de température seulement 3 fois plus petite que celle engendrée par c'_2 . Enfin, on peut noter que pour les autres régimes convectifs, il n'apparaît pas de relation simple entre $\bar{\theta}$ et $\Delta\mu$. (fig. 3-8; voir aussi *Christensen*, 1984a).

Lorsque le rapport de viscosité augmente, le développement d'instabilités chaudes au départ de cette couche limite est soumis à la compétition entre deux effets: la diminution de l'amplitude thermique de la couche limite joue contre le développement de courants ascendants. A l'inverse, la chute de la viscosité dope l'écoulement. L'épaisseur adimensionnée moyenne de la couche limite est approchée par $\delta=d/b=(1-\bar{\theta})/\text{Nu}$. Si on remplace le nombre de Nusselt par son expression (3-22), et $(1-\bar{\theta})$ par (3-20), δ augmente avec γ (fig. 3-42a). L'analyse de couche limite montre que c'est la baisse de viscosité et l'augmentation de l'épaisseur qui l'emportent. Les nombres de Rayleigh de couche limite (Ra_δ) et de champ lointain (Ra_{bas}^+) sont respectivement calculés par:

$$\text{Ra}_\delta = \left(\frac{\Delta T_{\text{bas}}}{\Delta T} \right) \cdot \left(\frac{d}{b} \right)^3 \cdot \text{Ra}_{\bar{\theta}} \sim \frac{(1-\bar{\theta})^4}{\text{Nu}^3} \text{Ra}_{\bar{\theta}} \quad (3-32)$$

$$\text{et } \text{Ra}_{\text{bas}}^+ = \left(\frac{\Delta T_{\text{bas}}}{\Delta T} \right) \cdot \left(\frac{(b-d_c)/2}{b} \right)^3 \cdot \text{Ra}_{\bar{\theta}} \sim \frac{(1-\delta_c)^3}{8} (1-\bar{\theta}) \text{Ra}_{\bar{\theta}} \quad (3-33)$$

où δ_c est l'épaisseur adimensionnée du couvercle. Pour les points du régime de couvercle, les Ra_δ sont tout à fait comparables aux résultats trouvés pour un fluide isovisqueux (fig. 3-45). Notons au passage que la viscosité variable induit une plus grande dépendance de Ra_δ en Ra^+). De fait, nos expériences numériques mettent bien en évidence la présence d'un panache chaud, remontant jusqu'à la base du couvercle. L'analyse de couche limite montre que ce panache n'est pas forcé par la géométrie de la boîte. De plus, avec des boîtes plus larges (pour un rapport d'aspect plus élevé), d'autres instabilités peuvent se former, ailleurs que le long des frontières verticales de la boîte (cf chapitre 4, §4.2.1).

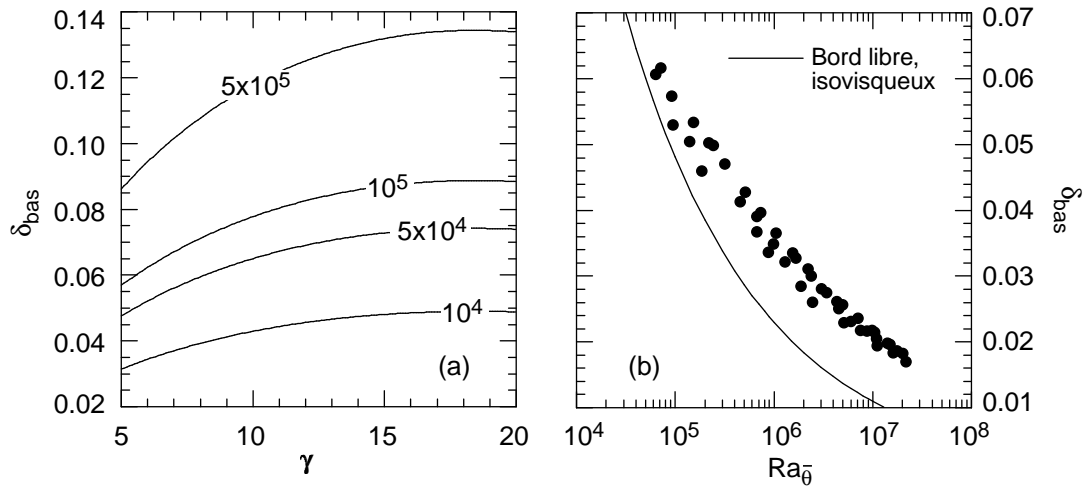


Figure 3.42. Epaisseur adimensionnée de la couche limite thermique du bas, $\delta_{\text{bas}} = (1 - \bar{\theta}) / \text{Nu}$. (a) En fonction de γ , et pour différents $\text{Ra}_{\bar{\theta}}$ (valeurs sur les courbes). Le nombre de Nusselt est donné par la paramétrisation (3-22). (b) En fonction de $\text{Ra}_{\bar{\theta}}$, et pour les données de la table 3.2. Le trait plein indique le cas isovisqueux.

L'épaisseur de la couche limite du bas est comparable à celle du cas isovisqueux (fig. 3-43b), mais il y a un décalage systématique lorsque le nombre de Rayleigh augmente: la couche limite est systématiquement plus épaisse. Une explication possible est que le panache qui arrive de la couche limite du haut n'est pas aussi vigoureux que dans le cas isovisqueux. En conséquence, l'érosion de la couche limite du bas par le panache froid est elle aussi réduite. Au total, la couche limite du bas ne se comporte pas tout à fait une couche limite de fluide isovisqueux. Les différences avec un cas purement isovisqueux ne sont pas négligeables. En particulier, le nombre de Rayleigh de couche limite dépend beaucoup plus fortement du nombre de Rayleigh (fig. 3-45):

$$\text{Ra}_{\delta} \propto \text{Ra}_{\bar{\theta}}^{0,23}, \text{ au lieu de } \text{Ra}_{\delta} \propto \text{Ra}^{0,04} \text{ pour le cas isovisqueux (§1.2.6).}$$

- *Couche limite thermique du haut.* L'inversion des données numériques ne permet pas de déterminer une épaisseur précise pour la couche limite thermique du haut. *Morris et Canright* (1984) prévoient que le saut de température est 3 fois plus important dans la couche limite du haut que dans celle du bas. Le démarrage d'instabilités froides dépend également du résultat de la compétition entre la viscosité intrinsèque du fluide, et la taille de la couche limite. A l'interface couche limite/couvercle, la viscosité est élevée, ce qui freine considérablement la croissance d'instabilités. De plus, le gradient de viscosité reste important sur toute la hauteur du couvercle et de la couche limite, si bien qu'un petit décalage de la frontière couche limite/couvercle induit un fort changement de viscosité: une couche limite épaisse et thermiquement ample n'offre pas forcément de meilleures conditions pour le développement de panaches froids.

La comparaison des deux couches limites amène la conclusion suivante: puisque la couche limite du haut se développe dans un milieu beaucoup plus visqueux, c'est celle du bas qui est la plus active dans l'entretien de l'écoulement. Par ailleurs, insistons sur le fait que la frontière entre le couvercle et la couche limite est particulièrement floue, le couvercle pouvant être considéré comme le prolongement à l'infini de la couche limite (loi du couvercle de *Nataf*, 1986).

Même si l'inversion ne permet pas de contraindre précisément la couche limite thermique du haut, on peut cependant tenter quelques essais en émettant des hypothèses supplémentaires, c'est-à-dire en imposant un type de solution plutôt qu'un autre. Les équations (3-14), (3-12) et (3-5) permettent de caractériser la sous-couche convectrice (dimension et paramétrisation) en adimensionnant les variables intéressantes à l'échelle de cette sous-couche. Il est important de noter que les Ra_{δ} ont été obtenus à partir de la viscosité du coeur isotherme. Pour la couche limite du bas, Ra_{δ} et Ra^+ sont calculés par (3-32) et (3-33). Des expressions analogues sont utilisées pour la couche limite du haut:

$$Ra_{\delta} = \left(\frac{\Delta T_{\text{haut}}}{\Delta T} \right) \cdot \left(\frac{d}{b} \right)^3 \cdot Ra_{\bar{\theta}} \sim \frac{(\bar{\theta} - \theta_c)^4}{Nu^3} Ra_{\bar{\theta}} \quad (3-34)$$

et
$$Ra_{\text{haut}}^+ = \left(\frac{\Delta T_{\text{haut}}}{\Delta T} \right) \cdot \left(\frac{(b-d_c)/2}{b} \right)^3 \cdot Ra_{\bar{\theta}} \sim \frac{(1-\delta_c)^3}{8} (\bar{\theta} - \theta_c) Ra_{\bar{\theta}} \quad (3-35)$$

où θ_c est la température adimensionnée à la base du couvercle. Par ailleurs, on notera que pour un nombre de Rayleigh et un γ donnés le couvercle est d'autant plus épais (la couche limite d'autant plus faible) que c_1 (ou plus précisément $\Delta\theta_e=c_1/\gamma-c_2$) est élevé. De même le nombre de Rayleigh de couche limite doit être plus important.

a	β	c_1	c_2	K^2
0,69±0,2	0,276 ± 0,004	0,83±0,5	-0,03±0,01	11,7 ⁽¹⁾
0,51±0,02	0,273 ± 0,004	1,5 ⁽²⁾	-0,05±0,004	12,5
0,29±0,01	0,268 ± 0,005	3,4 ⁽²⁾	-0,1±0,006	15,9

Table 3-8. Quelques valeurs des paramètres de l'inversion. ⁽¹⁾ meilleur K^2 obtenu; aucun paramètre n'est fixé a priori. ⁽²⁾ L'inversion est forcée pour obtenir cette valeur.

- La solution correspondant au meilleur K^2 ($c_1=0,83$) apparaît peu réaliste. La couche limite thermique du haut, peu développée, conduit à de faibles valeurs de Ra_{δ} (fig. 3-45a). A l'inverse, le couvercle est très épais. Bien que le saut de viscosité à travers la sous-couche soit inférieur à 10,

la paramétrisation du flux de chaleur dans la sous-couche ne ressemble pas à celle d'un fluide isovisqueux (fig. 3-43).

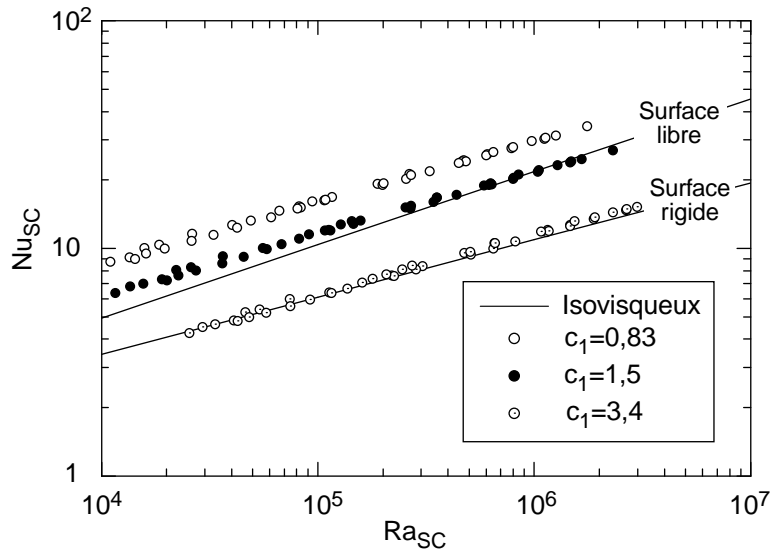


Figure 3.43. Paramétrisation dans la sous-couche convectrice pour trois valeurs de c_1 . $c_1=0,83$ correspond au meilleur K^2 ; $c_1=1,5$ et $c_1=3,4$ sont inspirées des résultats pour un fluide isovisqueux limité par une surface respectivement libre et rigide.

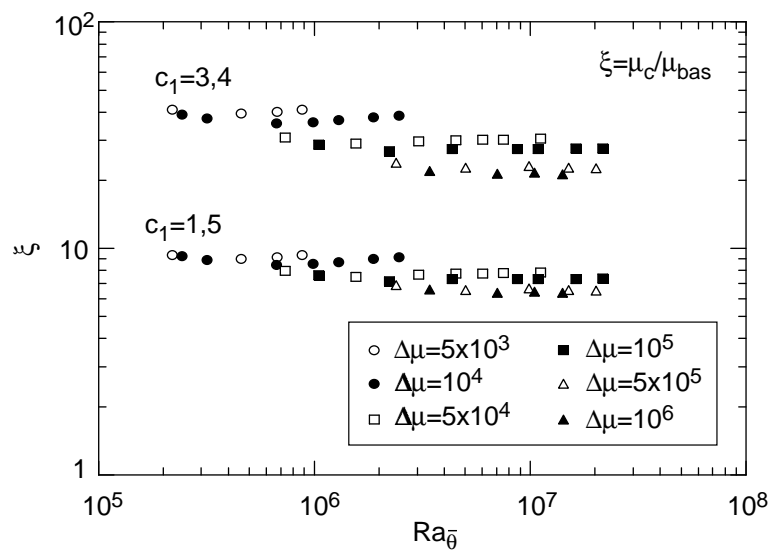


Figure 3.44. Saut de viscosité à travers la sous-couche convectrice, pour $c_1=1,5$ et $c_1=3,4$.

- L'amplitude thermique des couches limites du haut et du bas sont égales. Cette configuration symétrique est inspiré par le cas d'un fluide isovisqueux limité par une surface libre. Il est décrit par $c_1=1,5$ (une valeur légèrement supérieure à 1,43 se justifie par le fait que le paramètre c_2 augmente en valeur absolue avec c_1), ce qui implique un couvercle moins important que la

solution précédente ($c_1=0,83$). Une inversion ‘forcée’ détermine les trois autres paramètres (tableau 3-8). La sous-couche convectrice est pratiquement isovisqueuse, le saut de viscosité étant de l'ordre de 10, indépendamment de $\Delta\mu$ (fig. 3-44). La paramétrisation dans la sous-

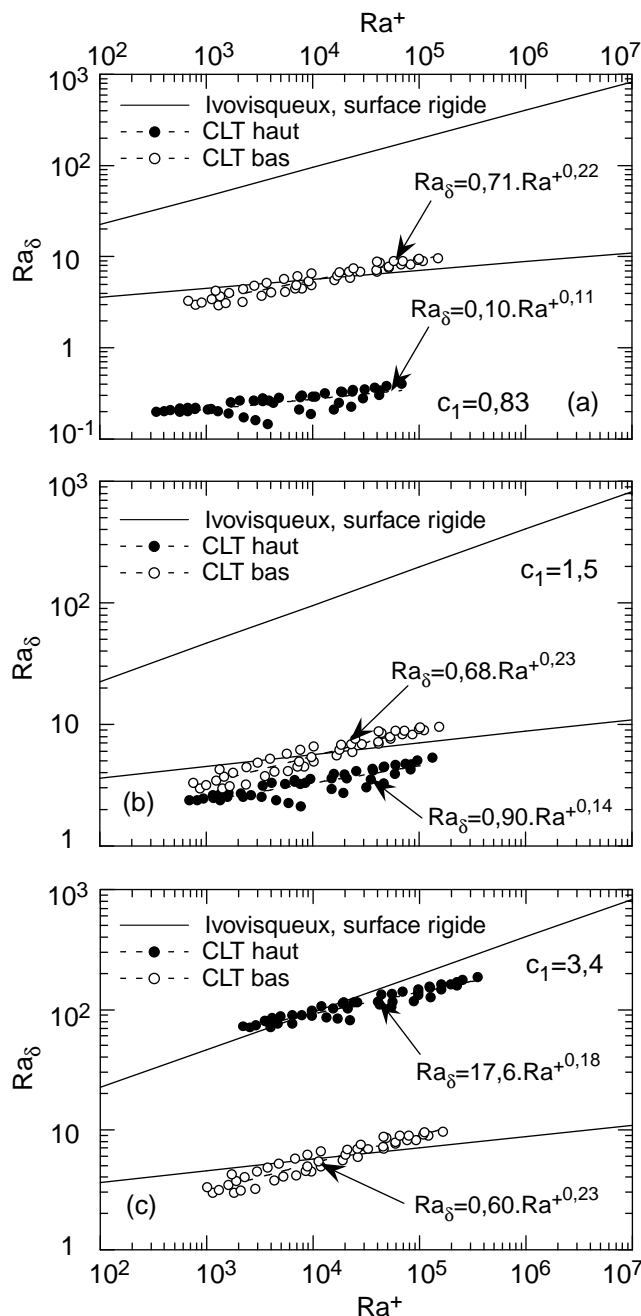


Figure 3.45. Analyse de couche limite pour les points du régime de couvercle. Différentes épaisseur de couvercle sont représentées (a) $c_1=0,83$; (b) $c_2=1,5$; (c) $c_1=3,4$. Les cas isovisqueux bord libre (§1.2.6) et bord rigide (§3.3.1) sont représentés.

couche se rapproche sensiblement d'une loi isovisqueuse/bord libre (fig. 3-43). Le calcul des nombres de Rayleigh de couche limite montre que la couche limite thermique du haut ne se comporte pas tout à fait comme une couche limite isovisqueuse et surface libre (fig. 3-45b).

- On souhaite maintenant que la couche limite du haut se comporte comme dans le cas d'un fluide isovisqueux limité par une surface rigide. Les résultats du §3.3.1 suggèrent que $\bar{\theta} \sim 2(1 - \bar{\theta})$, ce qui est à peu près le cas lorsque $c_1=3,4$ (compte tenu de la valeur de c_2 , voir table 3-2). Le saut de viscosité approximatif à travers la sous-couche est cette fois-ci d'environ 35 (fig. 3-44a), avec une plus grande dispersion selon $\Delta\mu$ (c_2 a augmenté). Le comportement de la couche limite du haut se rapproche de celui d'une couche limite de fluide isovisqueux limité par bord rigide (fig. 3-43 et 3-45c). L'accord n'est cependant pas parfait, et on remarquera en particulier que la pente logarithmique de la relation $Ra_\delta=f(Ra^+)$ est sous-estimée: elle est en fait intermédiaire entre les cas de bord libre et de bord rigide. Au total, cette dernière solution apparaît plus acceptable que la précédente. Elle

suggère que l'interface couvercle/couche limite se comporte presque comme une frontière rigide, la similitude n'étant pas parfaite. Il aussi garder à l'esprit que dans le cas de la viscosité variable, l'analyse de couche limite est plus délicate, l'équilibre entre les frottements visqueux et de poussée faisant intervenir la viscosité. Pour cette étude, nous avons considéré que la viscosité 'd'équilibre' était aussi celle du milieu isotherme. Enfin, les Ra_{δ} calculés sont des moyennes horizontales à une profondeur fixée, tandis que la base du couvercle n'est certainement pas plate.

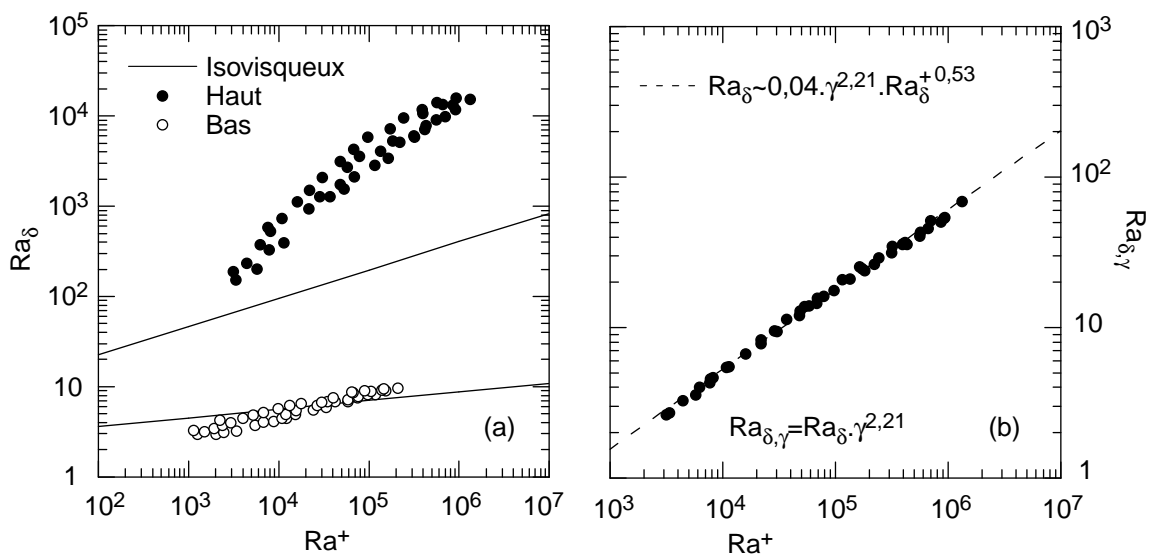


Figure 3.46. Analyse de couche limite, dans le cas où le couvercle est déterminé par la méthode de la différence des flux advecté et conduit. (a) Pour les deux couches limites. Les traits pleins représentent le cas isovisqueux/bord rigide. (b) Couche limite du haut: paramétrisation de Ra_{δ} en fonction de Ra^+ et de γ .

• Pour finir, nous avons également appliqué l'analyse de couche limite à la méthode de la différence entre les flux conductif et advectif (§ 3.4.3). La figure (3-46a) montre que le comportement de la couche limite du haut est très éloigné de celui d'une couche limite isovisqueuse/bord rigide: les nombres de Rayleigh de couche limite sont systématiquement plus élevés, signe que le couvercle est moins épais que ce qui est calculé par l'échelle de température visqueuse. On observe également une grande dispersion des données, liée à une forte dépendance en γ . Cette dépendance est approchée par la relation $Ra_{\delta} = 0,04 \cdot \gamma^{2,21} \cdot Ra_{\text{haut}}^{+0,53}$ (fig. 3-46b). Une dispersion, plus modeste est observée pour la paramétrisation du nombre de Rayleigh de la couche limite du bas. Ra_{δ} est donné en fonction de $Ra_{\bar{\theta}}$ par: $Ra_{\delta} = 0,25 \cdot \gamma^{0,16} \cdot Ra_{\bar{\theta}}^{0,19}$. En utilisant cette dernière paramétrisation, on peut vérifier la validité

de l'analyse de couche limite (équation 3-25). Les nombres de Nusselt calculés par (3-25) sont très proches de ceux prédits par (3-22) (fig. 3-47).

La difficulté rencontrée par la méthode d'inversion souligne que la limite entre le couvercle et la couche limite thermique du haut est plutôt floue. Dans le couvercle, le profil thermique est linéaire, tout comme au sommet de la couche limite. Par continuité, ces deux pentes sont égales, et il est difficile de déterminer où commence précisément le couvercle. C'est hypothèse de linéarité, par ailleurs bien vérifiée sur les profils thermiques, qui crée une indétermination. Dans ces conditions, le couvercle peut être interprété comme le prolongement vers le haut de la couche limite thermique froide. A l'inverse, les méthodes basées sur la topographie du flux de chaleur (§3.4.3) déterminent précisément la taille du couvercle. Elles suggèrent également qu'on ne peut pas traiter la sous-couche convectrice comme un fluide isovisqueux limité par une surface rigide: dans cette sous-couche, le contraste de viscosité à travers la sous-couche et le flux

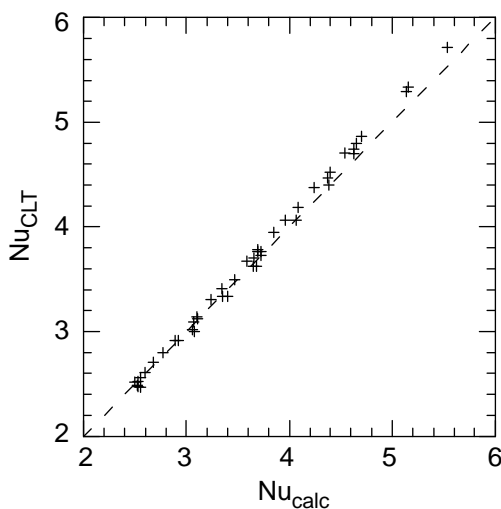


Figure 3.47. Comparaison entre les nombres de Nusselt calculé par analyse de couche limite (Nu_{CLT} , équation 3-25) et par inversion des calculs numériques (Nu_{calc} , équation 3-22).

de chaleur dépendent du rapport de viscosité global ($\Delta\mu$).

La relation (3-13) tient en partie compte de la présence de la couche limite thermique du bas. Mais a_2 n'est pas complètement indépendant de γ , et n'appréhende pas précisément l'influence de la couche limite. En chauffage par le bas, l'utilisation d'une échelle de température visqueuse n'est pas adaptée à la détermination de la profondeur du couvercle et à la paramétrisation du flux de chaleur. La raison en est que les deux couches limites interagissent entre elles.

3.5.4 - Erosion thermique du couvercle.

La méthode de détermination du couvercle par inversion selon une échelle de température visqueuse n'est pas pleinement satisfaisante. En fait, elle ne permet pas de définir la base du couvercle sans hypothèse ad hoc supplémentaire. Pourtant, cette méthode convient bien dans au moins un cas de figure : celui d'un fluide chauffé uniquement en volume. *Davaille et Jaupart* (1993) ont montré que seule la portion $\Delta T_e \sim 2,24\Delta T_v$ de couche limite thermique est

effectivement instable. Ces résultats ont été confirmés numériquement pour une loi de viscosité exponentielle (i.e. $\Delta T_v = 1/\ln(\Delta\mu)$) (Grasset et Parmentier, 1997). Enfin, toujours dans le cas du chauffage interne, la méthode du point d'inflexion et la méthode d'échelle de température visqueuse donnent des résultats proches. Ce n'est pas le cas de notre modèle. Dans ce cas, le saut de température dans la couche limite déduit de la méthode du point d'inflexion n'est pas proportionnelle à l'échelle de température visqueuse $\Delta T_v = -\mu/(\partial\mu/\partial T)$, mais dépend fortement de γ et du Rayleigh (fig. 3-48).

En faisant l'hypothèse d'une limite couvercle/sous-couche quasiment rigide ($c_1=3,4$ et $c_2=-0,1$), l'épaisseur de couvercle prédite par (3-12) et (3-14) est proche de l'épaisseur de couvercle déduite de la loi de Davaille et Jaupart (fig. 3-49a). Les autres jeux de paramètres discutés dans le paragraphe précédent conduisent à des couvercles plus épais. Des valeurs de c_1 supérieures conduiraient à un couvercle plus mince. Cela conforte quelque peu la préférence que l'on peut avoir pour cette solution particulière.

En revanche, calculé à partir de la différence entre les flux de chaleur advecté et conduit, le couvercle est systématiquement plus fin que dans le cas du chauffage interne (fig. 3-49b). Si on admet que cette méthode de détermination du couvercle est correcte, on peut donner une interprétation simple de ce désaccord. En chauffage par le bas, la présence d'une couche limite thermique permet le développement de panaches chauds qui viennent rejoindre la base du couvercle. Le panache est arrêté par le couvercle, mais conserve la possibilité d'interagir avec lui. En particulier, le matériau chaud qu'il apporte peut amincir le couvercle. Dans le cas de chauffage interne pur, les panaches chauds ne peuvent pas se former (p.e. Parmentier et al., 1994). La différence entre les deux cas est de l'ordre de $\Delta\delta \sim 0,07$ à $0,09$ (fig. 3-49b). Cette différence serait donc lié à la présence d'une couche limite en bas, et s'expliquerait par un phénomène d'érosion thermique du couvercle par les panaches montant de cette couche limite.

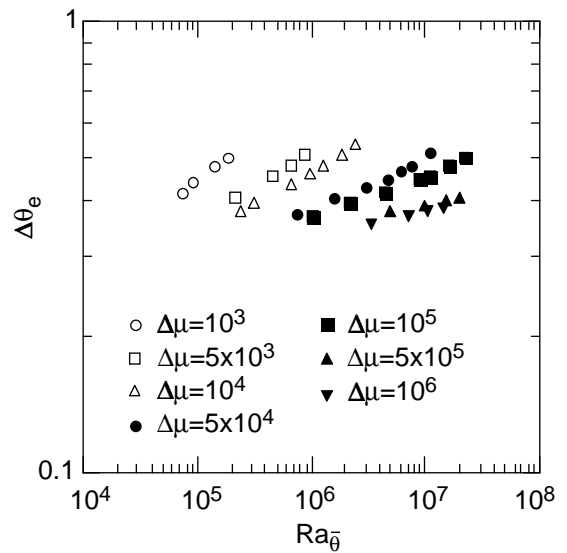


Figure 3.48. Saut de température dans la couche limite du haut ($\Delta\theta_e$), calculé par la méthode de la différence entre les flux de chaleur conductif et advectif. $\Delta\theta_e$ dépend à la fois du nombre de Rayleigh et du rapport de viscosité.

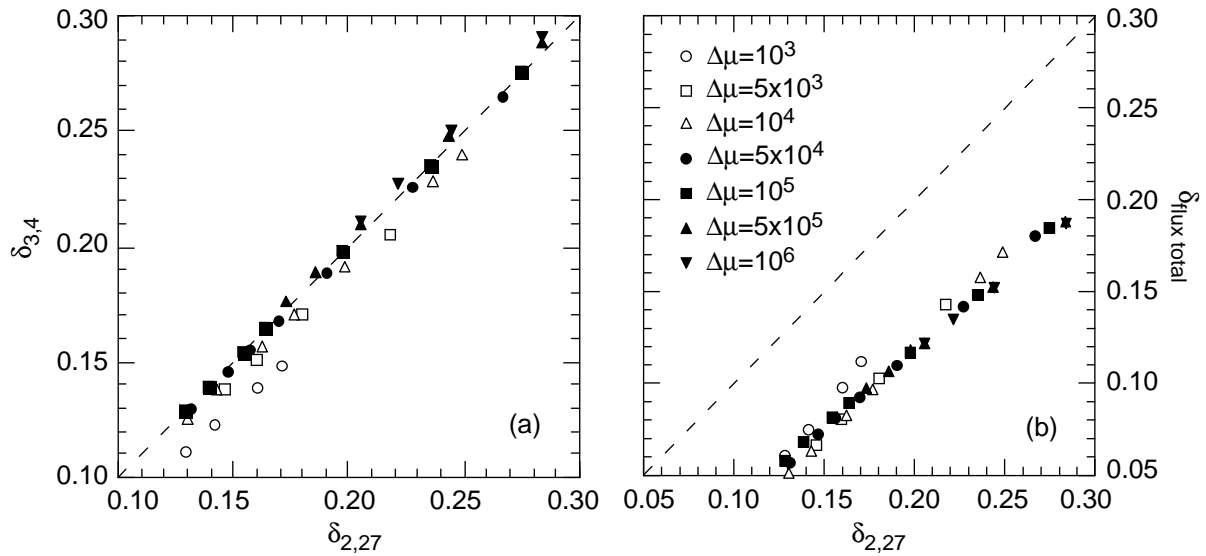


Figure 3.49. Comparaison des épaisseurs de couvercle avec la loi de *Davaille et Jaupart* (1993). (a) Prévues par la relation (3-11), avec $c_1=3,4$ et $c_2=-0,1$ (condition de base de couvercle quasi-rigide). (b) Détermination du couvercle à partir de la différence entre les flux de chaleur advecté et conduit.

3.5.5 - Saut thermique dans la couche limite du bas: redimensionnement.

Le saut de température dans la couche limite thermique du bas, $(1 - \bar{\theta})$, est redimensionné selon l'échelle de température caractéristique (§2.1.4):

$$(1 - \bar{\theta}) = \frac{(T_{base} - \bar{T})}{\Delta T} \quad (3-36)$$

où $\Delta T = (T_{base} - T_{surf})$ est le saut de température à travers le fluide. La relation (3-20) devient:

$$(T_{base} - \bar{T}) = c_1 \frac{\Delta T}{\gamma} + c_2 \Delta T \quad (3-37)$$

La quantité $\Delta T/\gamma$ est l'échelle de température visqueuse ΔT_v , définie par la relation (3-2). Pour une loi exponentielle, le facteur γ est simplement le contraste de viscosité logarithmique $\gamma = \log(\mu_{surf}/\mu_{base})$. Mais les lois d'Arrhénius utilisées pour le manteau supérieur et pour la glace I (chapitre 5), conduisent à une autre échelle de température visqueuse, et γ n'est plus simplement le logarithme du rapport global de viscosité. En remplacement on a, d'après (3-2):

$$\Delta T_v = \frac{RT^2}{Q} \quad (3-38)$$

Le facteur γ est alors donné par la relation (3-7) qui est une fonction croissante de T_{base} , et décroissante de T_{surf} . Ainsi, en utilisant l'échelle de température d'une loi d'Arrhénius, le saut de

température dans la couche limite thermique peut s'écrire sous la forme d'un polynôme d'ordre deux en \bar{T} :

$$\bar{T}^2 + \frac{1}{c'_1} \frac{Q}{R} (\bar{T} + c'_2 \Delta T - T_{\text{base}}) = 0 \quad (3-39)$$

dont la solution positive est:

$$\bar{T} = \frac{Q}{2c'_1 R} \left[\sqrt{1 + \frac{4c'_1 R}{Q} (T_{\text{base}} - c'_2 \Delta T)} - 1 \right] \quad (3-40)$$

L'équation (3-38) fait directement intervenir la température de surface et la température à la base de l'enveloppe de glace. Cela a une incidence directe sur le saut de température dans la couche limite thermique du bas. L'influence de T_{base} et T_{surf} sur le saut de température dans la couche limite thermique du bas sera étudiée plus en détail dans le chapitre d'application aux satellites de glace (chapitre 5, §5.3.3).

3.5.6 - Application au manteau inférieur.

Le flux de chaleur à la limite noyau/manteau est mal contraint. Sans tenir compte du manteau, *Stacey* (1992) calcule une puissance de l'ordre de 3 TW. *Buffet et al.* (1992) proposent une fourchette de 6 à 10 TW. *Labrosse* (1997) utilise une conductivité thermique du noyau plus élevée que celle de *Stacey* (1992) ($60 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ au lieu de $28 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$), et s'attend à des flux de chaleur deux fois plus importants. En supposant qu'il existe une zone conductive au sommet du noyau, il obtient des flux analogues à ceux de *Stacey* et *Buffet et al.*. S'ils proviennent de la

Paramètre	Valeur
R_{CMB} (km) (1)	3480
R_{670} (km) (1)	5700
α (K^{-1}) (2)	3×10^{-5}
ρ (kg/m^3) (1)	5000
g (m/s^2) (1)	10
k ($\text{Wm}^{-1}\text{s}^{-1}$) (3)	4,0
κ (m^2/s) (3)	7×10^{-7}

Table 3.9. Paramètres physiques du manteau inférieur (1) d'après le PREM. (2) d'après *Poirier* (1991). (3) D'après *Landolt-Börnstein* (1982). La diffusivité thermique κ est déduite de k et de la capacité calorifique $C_p=1200 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

limite noyau/manteau, les points chauds fournissent une autre contrainte: *Sleep* (1990) estime la quantité de chaleur transportée par les points chauds à 2,5 TW. Cette valeur pose une limite inférieure au flux de chaleur à la base du manteau inférieur.

En redimensionnant notre modèle numérique à l'échelle du manteau inférieur, il est possible d'obtenir une approximation du flux de chaleur à la limite noyau/manteau. On peut également calculer l'épaisseur et l'amplitude thermique moyennes de la couche limite. Bien entendu, des paramètres comme la géométrie et le taux de chauffage interne

sont susceptibles de modifier significativement la relation (3-22), et donc les résultats de ce paragraphe.

Les valeurs des paramètres physiques du manteau inférieur sont rassemblées dans la table 3-9. La conductivité thermique est comprise entre 3 et 6 $\text{Wm}^{-1}\text{s}^{-1}$ *Landolt-Börnstein* (1982). La température à la limite manteau supérieur/inférieur est de 1873 K. La température à la limite noyau/manteau est mal contrainte. Le modèle de refroidissement de la graine de *Labrosse* (1997) calcule une température à la limite graine/noyau liquide: $T_{\text{ICB}}=5000 \pm 1000$ K. La température à la limite noyau/manteau est inférieure à cette valeur. Pour cette application, on supposera que cette température est comprise entre 4000 et 5000 K. En prenant une viscosité $\mu=10^{22}$ Pa.s, on obtient des nombres de Rayleigh de 3×10^6 à 5×10^6 . Enfin l'énergie d'activation de la perovskite est estimée à environ 500 kJ/mol (*Beauchesne et Poirier*, 1989).

Avec ces valeurs, et en calculant \bar{T} à l'aide de (3-40), on déduit une valeur de γ (typiquement, $8 \leq \gamma \leq 10$), puis un nombre de Nusselt et un ordre de grandeur de la quantité de chaleur évacuée par le

manteau inférieur. La paramétrisation (3-22) conduit à une puissance comparable à celle prévue par *Stacey* (1992) et *Buffet et al.* (1992): de 2 à 6 TW (fig. 3-50a). Le flux de chaleur calculé par (3-22) est un peu plus élevé que celui transporté par les points chauds (*Sleep*, 1990). De ce point

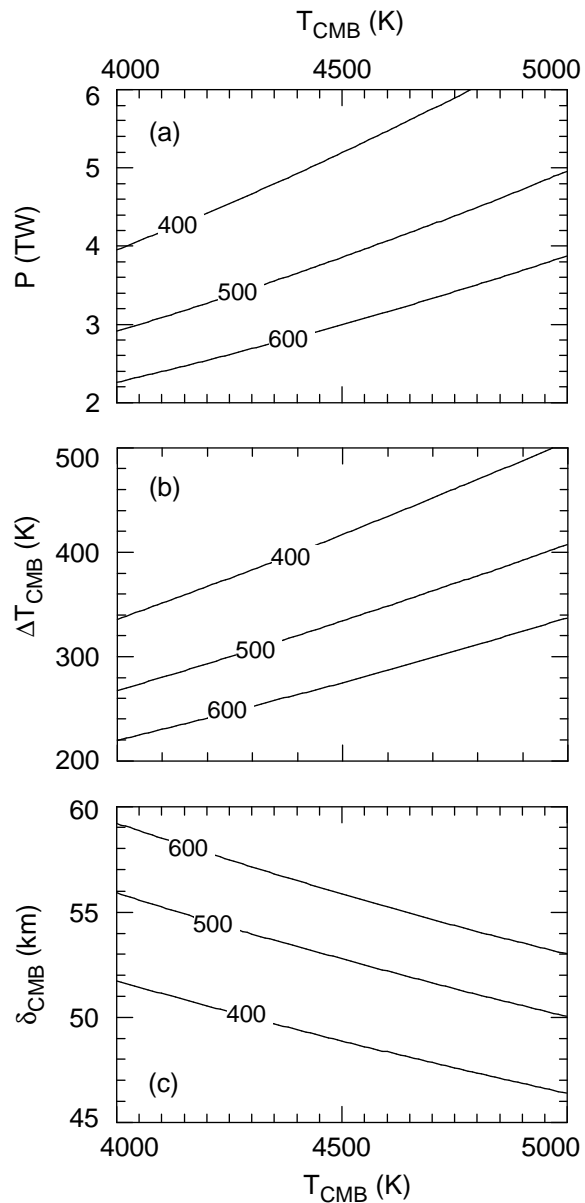


Figure 3.50. Application du modèle numérique au transport de chaleur dans le manteau inférieur. (a) Puissance à la base du manteau inférieur. (b) Amplitude thermique et (c) épaisseur de la couche limite thermique. Ces quantités sont calculées en fonction de la température à la base, et pour trois valeurs de l'énergie d'activation (400, 500 et 600 kJ/mol).

de vue, les points chauds constituent un moyen efficace mais pas unique pour relâcher en surface le flux de chaleur issu du noyau. Il faut également envisager une convection à l'échelle du manteau inférieur seul.

L'équation (3-40) donne également une valeur du saut de température dans la couche limite du bas (fig. 3-50b). Selon l'énergie d'activation, l'amplitude thermique est d'environ 250 à 400 K. Enfin, l'épaisseur de la couche limite calculée à partir de la relation (3-23) est de l'ordre de 45-60 km (fig. 3-50c). Il est donc peut probable que la couche D" observée par les sismologues à la base du manteau inférieur corresponde à une simple couche limite thermique. En effet, les modèles sismologiques locaux attribuent à cette couche D" une épaisseur de 200 à 300 km (p.e. *Lay et Helmberger*, 1983). La nature de cette enveloppe reste par ailleurs assez mal connue. Sa topographie varie latéralement, avec une amplitude d'environ 50 km (*Gaherty et Lay*, 1992). De plus, l'analyse d'ondes P et S diffractées suggèrent que la couche D" est chimiquement hétérogène (*Weber et Davis*, 1990; *Wysession et al.*, 1992). Mais pour *Nataf et Houard* (1993), la couche D" est plus homogène qu'il n'y paraît, et elle correspond à une (ou plusieurs) transition(s) de phase.

La paramétrisation issue de notre modèle conduit à des flux de chaleur faibles à la limite noyau/manteau. Ces valeurs sont compatibles avec les calculs de *Labrosse* (1997), dans le cas où il existe une zone conductive au sommet du noyau. Elle suggère également que la couche D" est plus qu'une simple couche limite thermique. Des incertitudes subsistent sur certains paramètres, comme la viscosité et la conductivité thermique. Une viscosité de référence dix fois plus élevée diminue le flux de chaleur d'un facteur deux, et double l'épaisseur de la couche limite thermique. Une conductivité deux fois plus importante multiplie ce même flux de chaleur par deux, mais divise également par deux l'épaisseur de la couche limite.

3.6 - Les limites du modèle.

3.6.1 - Rôle du chauffage interne.

Les radioéléments sont présents en quantité non négligeable manteau terrestre (y compris dans le manteau supérieur). Ils constituent même la principale source énergétique : classiquement, la part du chauffage interne est estimée à 80% de l'énergie véhiculée par convection. Une source de chaleur interne (avec ou sans chauffage supplémentaire par le bas) modifie de manière significative les schémas de convection observés dans un cas de Rayleigh-Bénard classique (*McKenzie et al.*, 1974): le profil thermique se décale vers des valeurs plus élevées; le panache ascendant s'élargit; le transport convectif de la chaleur est moins efficace. En 3D, *Travis et al.*

(1990b) et *Weinstein et Olson* (1990) observent que les schémas de convection développés en présence de chauffage interne sont instationnaires et dominés par les panaches descendant. Des

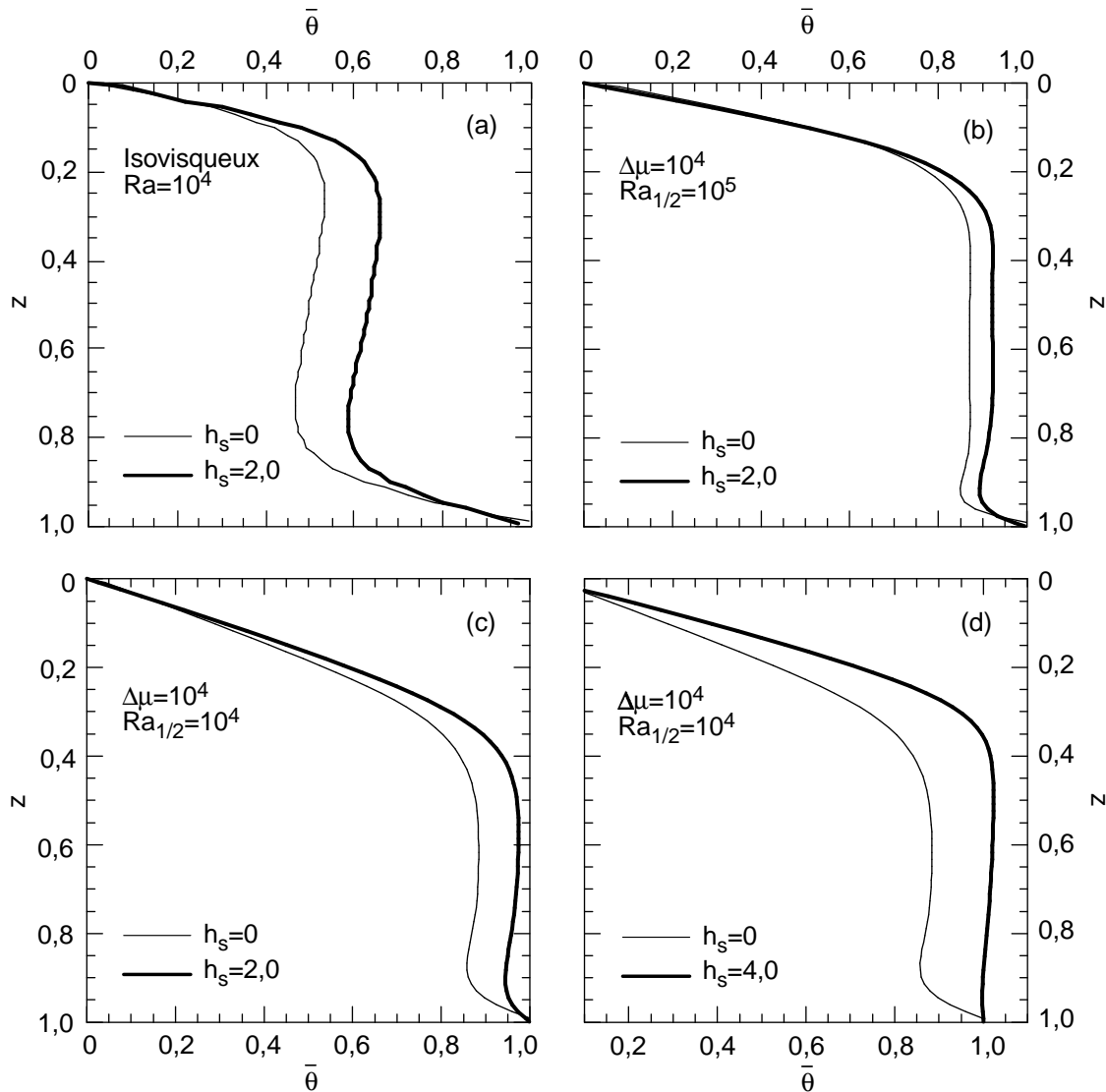


Figure 3-51. Influence du chauffage sur les profils thermiques. (a) Viscosité constante: le profil thermique se décale vers des valeurs plus élevées. (b) Viscosité variable, à la limite du régime de couvercle. La couche limite du bas est également réduite. (c) et (d) Viscosité variable en régime de couvercle. La couche limite du bas est fortement réduite. Pour un chauffage $h_s=4,0$ (d), elle a complètement disparue.

expériences numériques 3D isovisqueuses plus récentes et plus complètes (*Parmentier et al.*, 1994; *Sotin et Labrosse*, 1997) montrent également un décalage systématique du profil thermique, ou si l'on préfère une réduction de la couche limite thermique du bas. Ce décalage augmente avec le taux de chauffage interne. L'idée importante qui ressort de ces expériences est que la convection avec chauffage interne est contrôlée par la couche limite du haut et les panaches froids qui s'en détachent. La couche limite du bas est affaiblie, et les courants montant sont

essentiellement la conséquence de l'écrasement des courants descendants à la base de la boîte. Les panaches générés par la couche limite thermique du bas sont en général bloqués avant d'atteindre la surface : le chauffage interne crée un gradient de température inverse qui s'oppose à la montée du fluide. De ce point de vue, le chauffage interne a un effet stabilisant. Enfin, le changement de schéma convectif s'accompagne d'une augmentation de la température moyenne du fluide et d'une modification du flux de chaleur en surface. Pour chacune de ces deux quantités, une paramétrisation en fonction du nombre Rayleigh et du taux de chauffage interne a été proposée (Sotin et Labrosse, 1997).

Dans un fluide à viscosité variable, nous venons de voir que la couche limite du bas est réduite même en l'absence d'une source de chaleur interne. Mais cela ne l'empêche pas de participer activement à la convection. Comme on s'y attend, l'introduction d'une source de chaleur interne (h_s) réduit un peu plus la couche limite thermique. Le régime de couvercle est particulièrement sensible à cet apport (fig. 3-51 c et d) : pour $h_s=2,0$ (et $Ra_{surf}=100$, $\Delta\mu=10^4$) l'amplitude thermique de la couche limite thermique du bas est divisée par trois, et pour $h_s=4,0$ elle a totalement disparue. La disparition progressive de la couche limite s'accompagne d'une inversion du gradient thermique moyen dans la moitié inférieure de l'écoulement : tout comme dans le cas isovisqueux, les panaches chauds éventuellement issus de la couche limite du bas ont plus de mal pour rejoindre la surface (ou la base du couvercle). La couche limite du bas (si elle existe toujours) perd son rôle moteur, et l'écoulement semble dominé par la chute de matériau froid depuis la couche limite du haut.

3.6.2 - Géométrie.

La condition d'un flux de chaleur égal au sommet et à la base du fluide est valable tant que ces frontières ont la même dimension. Ce n'est plus le cas lorsque le rayon de courbure du système est important. Par exemple, dans le cas de la Terre, le rayon du noyau vaut approximativement la moitié du rayon total. Pour la convection de la glace I dans les satellites de glaces, l'effet de la courbure est moins important, avec des valeurs de $f=R_b/R_h$ de l'ordre de 0,75 (R_h et R_b sont les rayons au sommet et à la base). En cylindrique, la conservation de l'énergie s'écrit:

$$2\pi R_h \cdot q_h - 2\pi R_b \cdot q_b = \pi H (R_h^2 - R_b^2) \quad (3-41)$$

(où q_h et q_b sont les flux de chaleur au sommet et à la base) soit, en grandeurs adimensionnées:

$$\text{Nu}_h - f \cdot \text{Nu}_b = \frac{h_s}{2} \quad (3-42)$$

La courbure a pour effet de modifier la valeur de la température du cœur isotherme. Dans le cas simple de la viscosité constante, et de chauffage interne nul, l'analyse en couche limite donne:

$$\text{Nu}_h = \bar{\theta}^{-4/3} \cdot \text{Ra}^{1/3} \quad \text{et} \quad \text{Nu}_b = (1 - \bar{\theta})^{4/3} \cdot \text{Ra}^{1/3} \quad (3-43)$$

et, d'après (3-35):

$$\bar{\theta} = \frac{f^{3/4}}{1 + f^{3/4}} \quad (3-44)$$

Le cas de la viscosité variable est nettement plus délicat, puisque les relations (3-43) ne sont plus valables. La définition (3-43) de la couche limite thermique du bas reste acceptable. En revanche, elle est radicalement différente pour la couche limite du haut. Il subsiste une incertitude sur la valeur de l'échelle de température. De plus, même si l'on admet que la couche limite thermique du haut se rapproche de celle d'une frontière rigide, la dépendance en Ra de Nu_h sera très différente de celle de Nu_b .

3.6.3 - Rhéologie non-newtonienne.

Les limites rhéologiques du modèle ont déjà été soulignées dans le premier chapitre. Le point important est que la loi exponentielle de température ne donne qu'une idée succincte de la lithosphère mécanique. Ce que l'on calcule, c'est plutôt une lithosphère thermique, sans tenir compte, bien sûr, d'un éventuel couplage entre les effets mécaniques et thermiques. Il en découle toutefois une lithosphère mécanique simplifiée: le couvercle. Celui-ci a un comportement rigide, les contraintes étant accumulées aux frontières de la boîte.

Une étude récente (*Solomatov et Moresi, 1997*) suggère que les trois régimes de convection précédemment décrits sont également présents dans le cas d'un fluide non-newtonien. Toujours pour un fluide non-newtonien, la Terre et les planètes telluriques se placeraient dans le régime de couvercle conducteur. Toutefois, ce modèle ne permet pas de rendre compte de la tectonique des plaques à la surface de la Terre.

Enfin, une rhéologie non-newtonienne devrait affaiblir le couvercle conducteur. Dans ce cas, on s'attend à ce que le transfert de chaleur soit un peu plus efficace que dans le cas d'un fluide newtonien.

Conclusion.

Les résultats du modèle numérique développé dans le chapitre 2 s'accordent bien avec ceux d'études analogues plus anciennes (p.e. *Christensen*, 1984). En particulier, on distingue bien différents régimes de convection en fonction du nombre de Rayleigh et du contraste de viscosité. A partir de ces calculs, nous avons proposé une délimitation du régime de couvercle basée sur la valeur du nombre de Rayleigh de surface, et différente de celle proposée par *Moresi et Solomatov* (1995). Pour le régime de couvercle, nous avons obtenu une loi de flux de chaleur simple, en fonction du nombre de Rayleigh du cœur isotherme et d'un second paramètre, γ , représentatif des variations de viscosité (équation 3-22).

Nos résultats suggèrent également que le régime de couvercle est contrôlé par la couche limite thermique du bas. Le saut de température à travers cette couche limite s'exprime simplement en fonction du seul paramètre γ (équation 3-20), si bien que le contraste de viscosité y est approximativement constant. La limite couvercle/couche limite thermique du haut est plus floue: on peut interpréter le couvercle comme le prolongement vers le haut de la couche limite thermique. Contrairement au cas du chauffage interne pur, l'utilisation d'une échelle de température visqueuse ne permet pas de contraindre précisément cette couche limite. Ce résultat est lié au fait que les deux couches limites interagissent entre elles. La compétition entre le flux de chaleur advecté et le flux de chaleur conduit permet toutefois de délimiter le couvercle. Mais dans ce cas, la sous-couche convectrice ne peut pas être traitée comme un fluide isovisqueux limité par une surface rigide.

Une application de ces paramétrisations au manteau inférieur conduit à des flux de chaleur à la limite noyau/manteau de 2 à 6 TW. Ces valeurs sont considérées comme faibles par *Labrosse* (1997) (et communication personnelle), qui suggère l'existence d'une couche conductrice au sommet du noyau. Selon cette même application, l'épaisseur de la couche limite thermique à la base du manteau inférieur est de 45 à 60 km, c'est-à-dire 3 à 5 fois moins que l'épaisseur de la couche D" détectée par les sismologues.

Les résultats de cette partie seront également appliqués au cas des satellites de glace des planètes géantes dans le chapitre 5. Le chapitre suivant n'utilise pas les paramétrisations (3-20) et (3-22). Il applique directement le modèle numérique au manteau supérieur terrestre, après une modification de la géométrie et des conditions aux limites en surface.

Chapitre 4

Vitesses sismiques du manteau supérieur terrestre.

If a criminal is seen committing a crime, there is no mystery. If from a multitude of clues (...) we must weigh the evidence and cross-check our inferences, then the case grips our imagination. This is the situation when we probe inside the Earth with earthquake waves.

(Bruce A. Bolt, Inside the Earth, 1982)

Sommaire

Introduction	138
4.1 Calcul des champs thermiques	139
4.2 Paramètres influents	140
4.2.1 Rapport d'aspect	140
4.2.2 Vitesse de surface	143
4.2.3 Apport de la viscosité variable	145
4.3 Calcul des vitesses sismiques	148
4.3.1 Méthode	148
4.3.2 Données minéralogiques	151
4.3.3 Anomalies synthétiques	152
4.3.4 Profils synthétiques	158
4.3.5 Epaisseur et profondeur de la transition $\alpha \rightarrow \beta$	163
4.3.6 Correction adiabatique des températures	164
4.3.7 Spectres de puissance des anomalies de vitesse	164
4.4 Conséquences sur la dynamique du manteau terrestre	167
Conclusion	168

Introduction.

Les vitesses des ondes sismiques constituent une observable importante de la physico-chimie du manteau. Elles dépendent à la fois de la température, de la pression et de la minéralogie, ce dernier paramètre étant lui-même largement contrôlé par la température. Ce couplage n'autorise pas l'accès simultané à la température et à la minéralogie du manteau supérieur à partir des seules données sismologiques. Une façon d'aborder ce problème est de calculer des vitesses sismiques et des densités synthétiques à partir des champs de température issus de modèles de convection, puis de comparer ces calculs aux profils tomographiques de référence. Etant donnée un modèle pétrologique, les modules élastiques et les vitesses d'ondes P et S sont calculées le long d'un profil thermique adiabatique (*Davies et Dziewonski, 1975; Duffy et Anderson, 1989*). Une autre méthode consisterait à corriger les modules élastiques simultanément de P et T (*Ita et Stixrude, 1992*). Ce calcul, valable le long d'un profil isotherme, ne donne accès qu'aux vitesses acoustiques des minéraux, mais il tient compte du fait que les mesures expérimentales des modules de cisaillement et de leurs dérivées sont moins précises que les mesures des modules d'incompressibilité.

La détermination des profils synthétiques fait appel à la théorie de la déformation finie au 3^{ème} ordre en déformation. La minéralogie dépend de la température, de la pression et de la composition chimique. Elle peut être fixée au départ du calcul, ou déterminée en chaque point du modèle de convection thermique. Ce travail a été effectué par *Vacher (1995)* et *Vacher et al. (1996)* dans le cas des modèles isovisqueux de *Dupeyrat et al. (1995)*. Un résultat important de ces travaux est que les modèles isovisqueux sont trop froids d'environ 400 K par rapport au profil adiabatique à 1600 K. Conséquence directe : la couche limite thermique chaude a une amplitude particulièrement élevée (~1000 K). Elle induit une inflexion des vitesses sismiques qui n'est observée dans aucun profil de référence. La viscosité variable a pour effet de réduire considérablement cette couche limite thermique (chapitre 3). Ce chapitre montre que la viscosité variable associée au calcul simultané de la minéralogie à partir des températures synthétiques, permet de meilleures corrélations entre les profils synthétiques et tomographiques.

Par ailleurs, il existe une contradiction entre les modèles de convection (isovisqueux ou non) et les observations sismologiques : la comparaison entre les modèles tomographiques des océans Atlantique et Pacifique indique que le manteau supérieur est d'autant plus chaud que la vitesse de plaque est rapide, alors que les modèles numériques montrent l'inverse.

4.1 - Calcul des champs thermiques.

Les températures utilisées dans ce chapitre sont issues du modèle 2D à viscosité variable développé dans le chapitre précédent. Les calculs sont réalisés pour un rapport global de viscosité $\Delta\mu=10^4$, et une série de calculs à viscosité constante sert de référence. La valeur de $\Delta\mu$ choisie n'est pas inspirée par des contraintes observationnelles. Il s'agit seulement d'avoir des variations de viscosité suffisamment importantes pour appréhender l'influence de ce paramètre sur les profils synthétiques de vitesse. Enfin, on prendra un nombre de Rayleigh médian ($Ra_{1/2}$) égal à 10^5 , dans tous les cas.

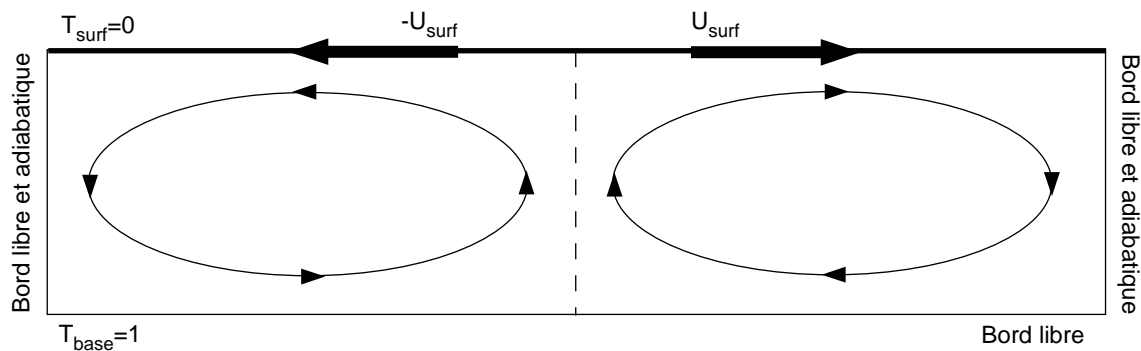


Figure 4-1. Représentation schématique du système physique. T_{surf} et T_{base} : température en surface et à la base. U_{surf} : norme de la vitesse horizontale imposée en surface.

Les grilles utilisées sont rectangulaires et le pas vertical est égal au pas horizontal. Si l'on assimile la hauteur de la boîte à l'épaisseur du manteau supérieur, 32 points verticaux permettent une résolution spatiale de 20 km. Les dimensions des boîtes varient de 32x64 à 32x512 points. Ce dernier cas a un rapport géométrique égal à 16, c'est-à-dire voisin de celui attendu pour le manteau supérieur, dans le cas d'un régime de convection stratifiée. La dérive lithosphérique est simulée de manière simplifiée en imposant une vitesse horizontale au sommet de ces domaines. Ce choix de condition limite en surface favorise l'hypothèse du *slab pull*: la lithosphère thermique est tractée indépendamment du moteur convectif. Un calcul plus réaliste aurait été de laisser la surface libre, et d'inclure une rhéologie non-newtonienne pour la lithosphère. Cette condition limite permet cependant d'estimer le rôle joué par des plaques mobiles et une rhéologie relativement simple. Trois cas sont considérés : surface fixe, $U_{\text{surf}}=1\text{cm/an}$ et $U_{\text{surf}}=5\text{cm/an}$. Au milieu de la boîte, le sens de la vitesse de surface est inversé: cet artifice fait office de dorsale (fig. 4-1). Les trois autres frontières sont libres de contraintes. Du point de vue thermique, les bords verticaux sont adiabatiques. Le système est chauffé par le bas, sans ajout de chauffage interne, et

refroidi en surface. Par ailleurs, la perturbation thermique initiale est une extrapolation des solutions thermiques obtenues avec des boîtes plus petites (les solutions 32x64 sont obtenues en partant de perturbations initiales sinusoïdales). De cette façon, deux rouleaux contrarotatifs de rapports d'aspect identiques ($r_a=8$) se développent.

Dans un premier temps, on vérifie que les calculs ont atteint un stade de convergence suffisant, c'est-à-dire que la température moyenne n'évolue plus. Par la suite, il se pose des problèmes de stationnarité, en particulier liés aux dimensions des boîtes. On cherche alors à obtenir une solution moyenne sur un nombre caractéristique d'itérations.

4.2 - Paramètres influents.

4.2.1 - Rapport d'aspect.

L'analyse de stabilité linéaire prévoit une perte d'efficacité du transfert thermique convectif lorsque le rapport d'aspect du système physique augmente. En fait, c'est la vigueur de la convection elle-même qui est affectée. Plus les frontières horizontales sont étendues, plus le frottement cumulé est important. En revanche, la poussée d'Archimède n'est pas modifiée par cette extension latérale. Le changement de rapport de force qui en résulte freine l'écoulement.

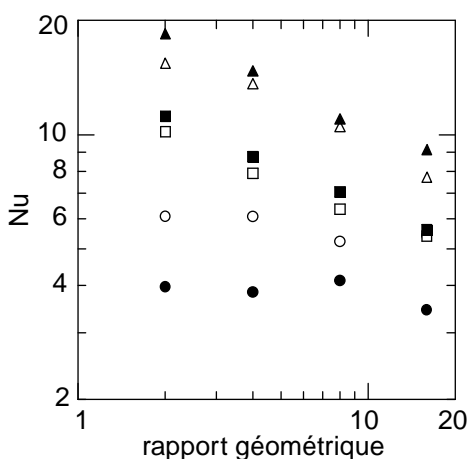


Figure 4-2. Influence du rapport d'aspect sur le nombre de Nusselt. En abscisses est reporté le rapport géométrique. Dans le cas d'une surface mobile, le rapport d'aspect est donné par la moitié du rapport géométrique. Symboles creux: viscosité constante; symboles pleins: $\Delta\mu=10^4$. Cercles: bord supérieur fixe; carrés: $U_{surf}=1$ cm/an; triangles: $U_{surf}=5$ cm/an. $Ra_{1/2}=10^5$ dans tous les cas.

Dans une boîte à grand rapport géométrique, et pour une surface mobile, il se développe deux rouleaux, dont le rapport d'aspect est la moitié du rapport géométrique. Le nombre de Nusselt diminue avec le rapport d'aspect (fig. 4-2). Par contre, pour un rapport géométrique donné, il-y-a peu de différence entre le cas isovisqueux et le cas $\Delta\mu=10^4$. La vitesse de plaque est un paramètre plus influent que les variations de viscosité. Une condition aux limites de surface fixe ne permet pas le développement de rouleaux à grand rapport d'aspect (§4.2.2 et fig. 4-6). Le flux de chaleur varie peu avec le rapport géométrique, et l'influence de la viscosité variable est plus marquée (fig. 4-2).

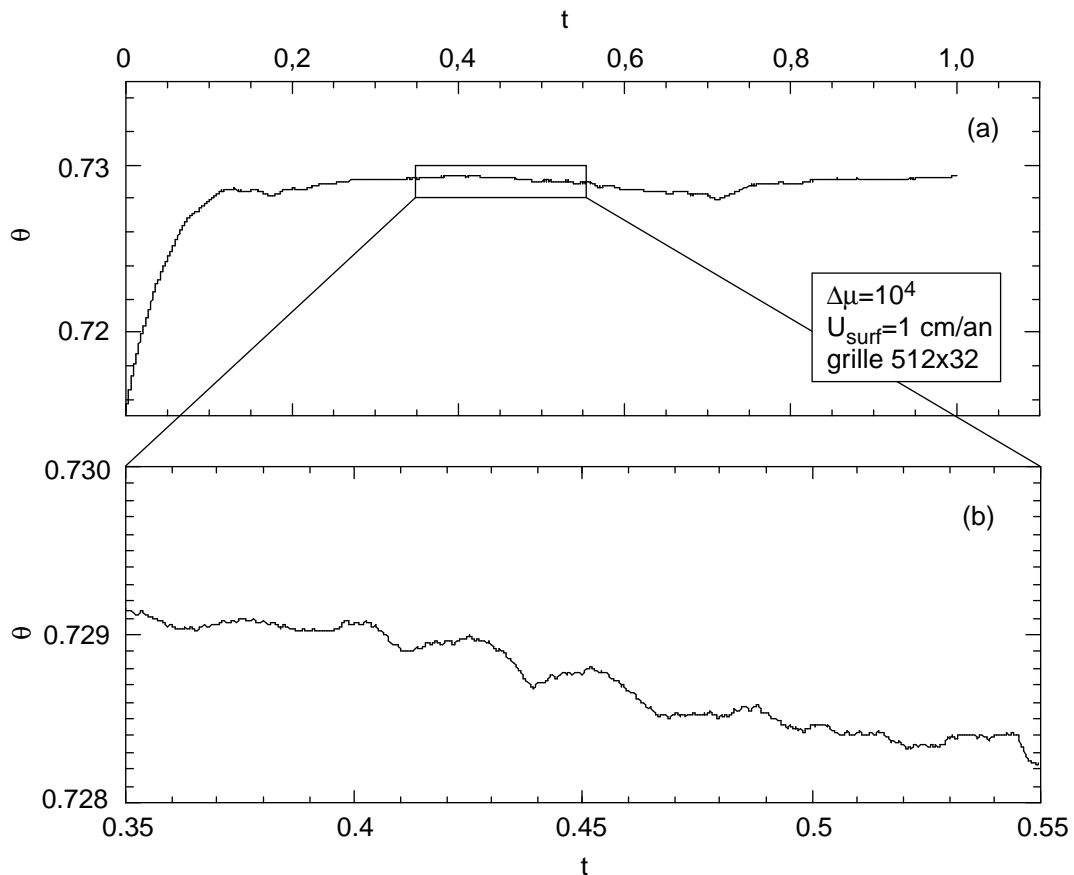


Figure 4-3. (a) Evolution de la température moyenne adimensionnée pour une solution instationnaire Grille 512x32, $\Delta\mu=10^4$, $U_{\text{surf}}=1$ cm/an et $Ra_{1/2}=10^5$. (b) Détail des fluctuations de température.

Après convergence, un certain nombre de calculs restent instationnaires. La valeur moyenne de la température fluctue autour d'une valeur asymptotique (fig. 4-3). Ces variations n'ont pas de périodicité bien marquée. Une séquence de clichés représentant les distributions de température pendant un court intervalle de temps ($\delta t \sim 0,03$) suggère que ces oscillations sont générées par des instabilités dans les couches limites thermiques (fig. 4-4). De petites poches chaudes se forment dans la couche limite thermique du bas, à une distance de la dorsale d'environ 3,5 fois la hauteur de la boîte (flèche 1). Elles migrent vers le courant ascendant, avant de se détacher et de s'intégrer à ce panache. D'autres instabilités prennent naissance dans la couche limite thermique froide, à une distance de la dorsale d'environ 2,5 fois la hauteur de la boîte (flèche 2). Dans le cas d'un fluide à viscosité variable, elles n'apparaissent pas directement en surface, mais à la base de la zone de faible écoulement. Ces instabilités froides croissent lorsqu'elles s'éloignent de la dorsale et s'effondrent avant d'atteindre le panache froid. Ensuite, ces séquences se répètent, mais pas de manière régulière: les perturbations n'ont pas la même forme, la même amplitude et le même trajet.

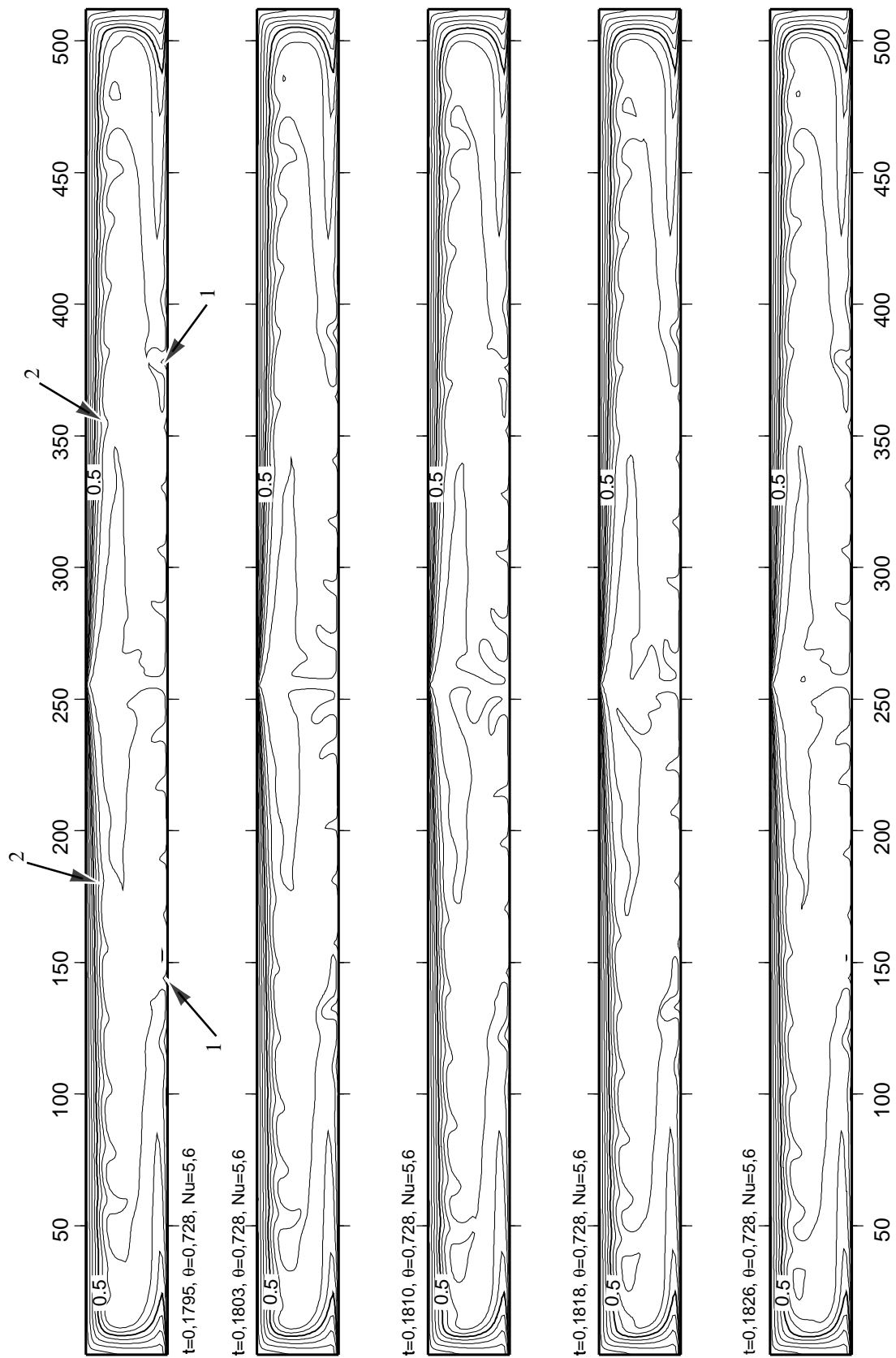


Figure 4-4. Evolution du champ de température durant un intervalle de temps $\delta t=0,03$. Grille 512×32 , $Ra=10^5$, $\Delta\mu=10^4$, $U_{surf}=1\text{cm/an}$.

A quoi sont dues ces perturbations thermiques? La géométrie de la boîte rallonge singulièrement le temps de contact avec les bords horizontaux. Comme la diffusion thermique n'est pas négligeable durant les trajets horizontaux des particules, de petites zones se réchauffent en base de boîte et tendent à remonter. En surface, le phénomène inverse se produit. On peut vérifier cette hypothèse en déterminant la distance caractéristique de diffusion d_{diff} en fonction de la position horizontale (on regardera spécialement cette quantité aux points où l'on observe les instabilités thermiques), $d_{diff} = \sqrt{\kappa t} = \sqrt{\kappa x/U}$, U étant la vitesse moyenne de

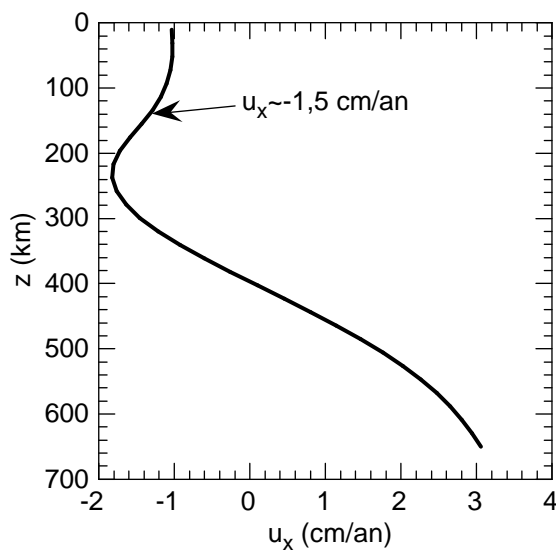


Figure 4.5. Profil de la composante horizontale de la vitesse dans le rouleau de gauche. La vitesse a été redimensionnée en utilisant la valeur caractéristique $u_0 = \kappa/b \sim 4,8 \times 10^{-3}$ cm/an (table 2-1, §2.1.4). Grille 32×512 , $\Delta\mu = 10^4$, $U_{surf} = 1$ cm/an.

l'écoulement horizontal. Le cas $U_{surf} = 1$ cm/an, $\Delta\mu = 10^4$ est présenté dans la table 4-1. Les vitesses moyennes d'écoulement sont choisies à partir du profil de la norme de la composante horizontale de la vitesse (fig. 4-5), soit 3 cm/an en base de boîte, et 1,5 cm/an dans la couche limite mécanique (flèche). Le cas des instabilités de surface est intéressant. A 4500 km de la dorsale, la distance caractéristique de diffusion représente 1/7 de la hauteur de la boîte. De plus, les instabilités apparaissent plus rapidement en surface qu'à la base. Ceci est cohérent avec le profil de la composante horizontale de la vitesse, qui est plus élevée à la base qu'en surface.

Surface (1,5 cm/an)			Base (3 cm/an)		
x (km)	t (10 ⁸ ans)	d _{diff} (km)	x (km)	t (10 ⁸ ans)	d _{diff} (km)
1500	1,0	56	3000	1	56
2500	1,7	73	4000	1,3	64
3500	2,3	85	4500	1,5	69
4500	3,0	97	5000	1,7	73

Table 4-1. Distance caractéristique de diffusion en différentes abscisses de la boîte.

4.2.2 - Vitesse de surface.

Le mouvement imposé en surface tire la lithosphère et favorise l'évacuation de la chaleur, quelque soit la valeur du rapport d'aspect (fig. 4-2). Ces effets s'accroissent avec l'augmentation

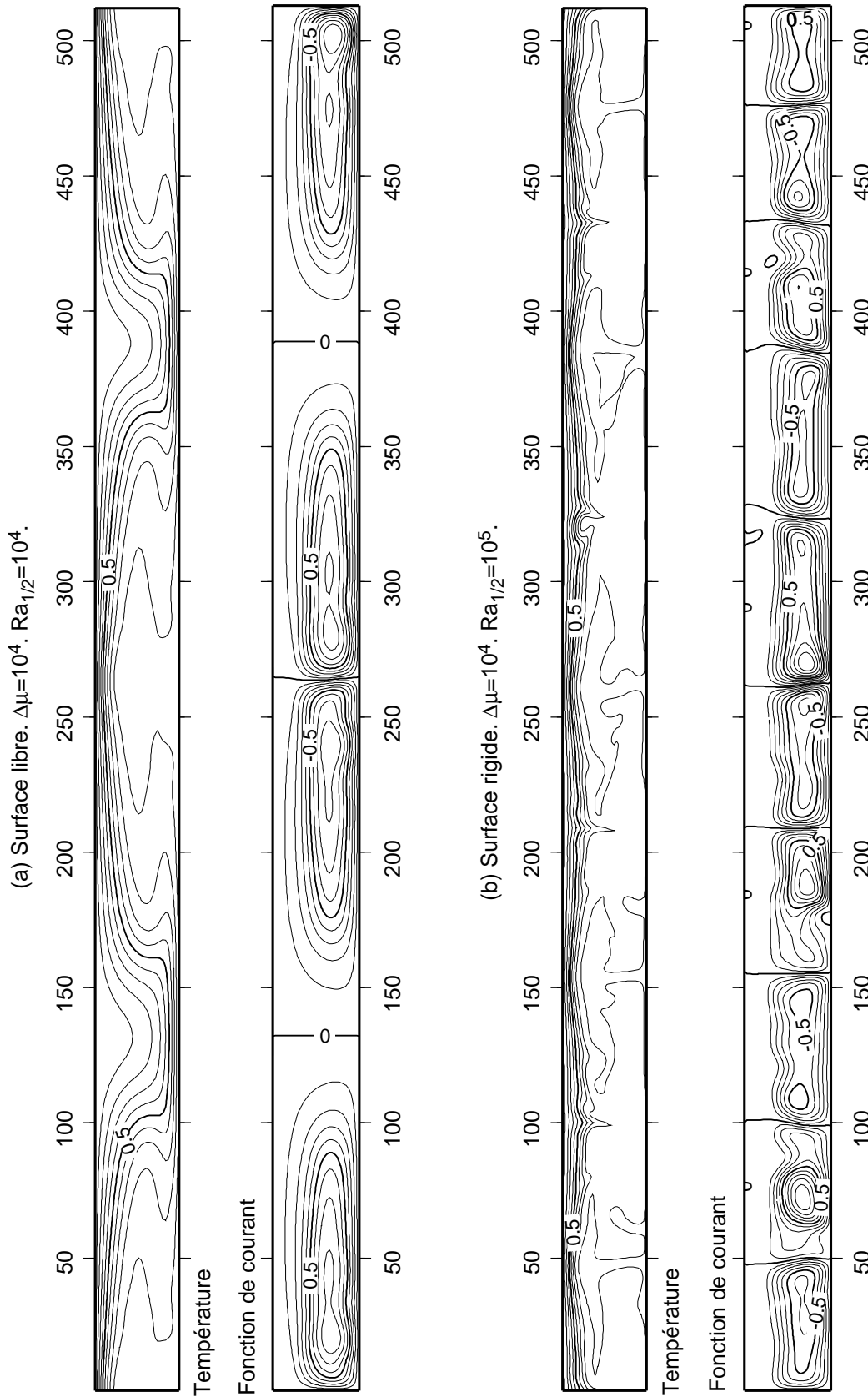


Figure 4-6. Champ de température et fonction de courant pour deux cas instationnaires à rapport d'aspect initial élevé ($r_s=8$, grille 512x32). Des conditions aux limites de bord libre (a), ou de surface fixe (b) favorisent le développement d'instabilités jusqu'à briser les rouleaux initiaux en plusieurs segments et réduisent le rapport d'aspect.

de la vitesse de surface. Les modèles de flux de chaleur disponibles (*Sclater et al.*, 1980) vont plutôt dans ce sens: le Pacifique, plus rapide, rayonne plus de chaleur que l'Atlantique (toutefois, cet argument doit être modulé par le petit nombre de mesures effectuées). Par ailleurs, la température médiane des solutions numériques diminue avec la vitesse de surface. Il-y-a un écart d'environ 450 K entre les calculs réalisés pour 1 cm/an et 5 cm/an (fig. 4-7). Cette dernière prévision est cependant en contradiction avec les observations sismologiques. Ce point sera discuté plus en détail dans le paragraphe 4.3.3.

La condition aux limites imposée en surface joue également un rôle important dans la génération des instationnarités. Le temps de passage (donc le temps efficace pour le refroidissement) est d'autant plus réduit que la vitesse imposée en surface est rapide. Pour une surface libre ou fixe, on s'attend à des instabilités beaucoup plus marquées. De fait, dans ces deux derniers cas, la dépendance temporelle des solutions apparaît dans des cellules de rapports d'aspects relativement modestes ($r_a \sim 2$, dans certains cas). Pour des rapports d'aspect initiaux élevés, les instabilités ainsi créées ont tendance à casser les cellules initiales en rouleaux plus petits, c'est-à-dire à réduire naturellement le rapport d'aspect (fig. 4-6).

C'est donc la traction exercée par le mouvement des plaques qui permet de maintenir une circulation quasi-bidimensionnelle à grand rapport d'aspect. Les instabilités ne se développent pas suffisamment pour casser les rouleaux. Ces résultats ont été obtenus à partir d'un modèle 2D, et il est périlleux d'en tirer des conclusions sur la structure de la convection dans le manteau terrestre. De plus, on a complètement omis le chauffage interne. Toutefois, on peut suggérer que l'absence de tectonique des plaques, comme cela semble être le cas pour Vénus, pourrait interdire la formation de larges cellules, et favoriser le développement de cellules de taille plus modeste. Cette hypothèse n'est pas incompatible avec les structures volcaniques observées à la surface de Vénus. Celles-ci s'apparentent plus aux points chauds terrestres qu'aux rides océaniques (*Bindschadler et al.*, 1992). D'autres structures, les coronae, sont interprétées comme des panaches froids. Mais encore une fois, notons que ce mode de convection est typiquement tri-dimensionnel, et ne saurait être approché par un système de rouleaux contrarotatifs.

4.2.3 - Apport de la viscosité variable.

4.2.3.1 - Profils thermiques.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la zone de faible écoulement induite par les variations de viscosité était fortement amincie dans le cas d'un bord supérieur mobile. De

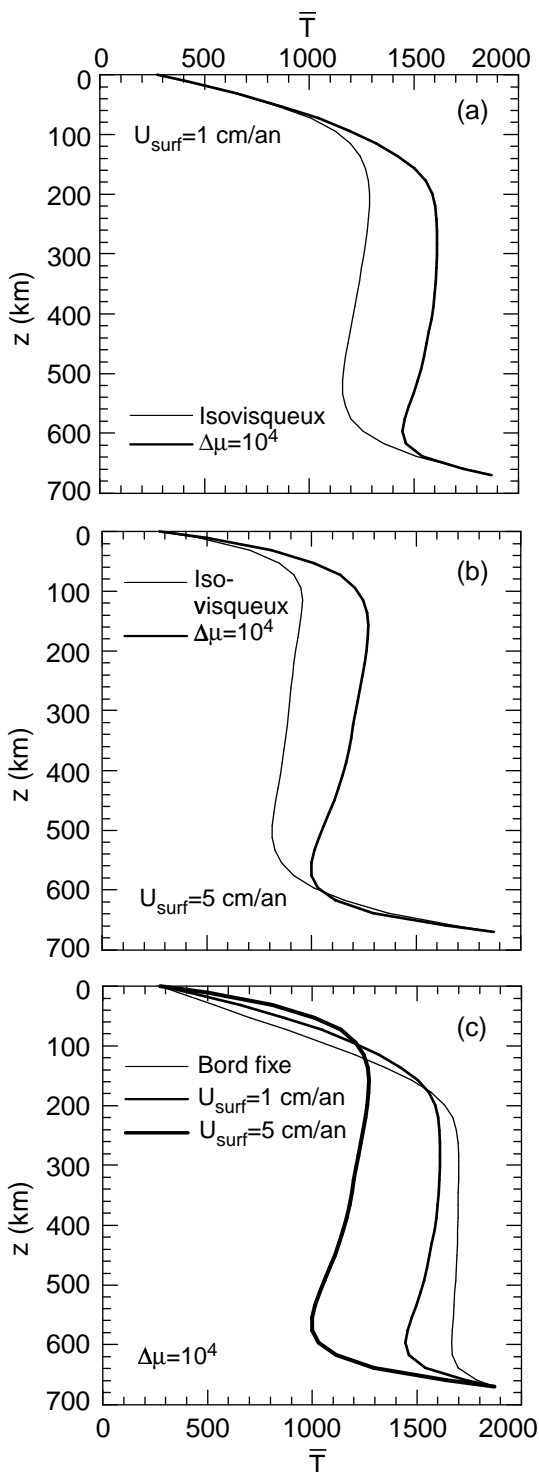


Figure 4-7. Profils thermiques pour (a) $U_{\text{surf}}=1$ cm/an, (b) $U_{\text{surf}}=5$ cm/an, et (c) $\Delta\mu=10^4$. Redimensionnement: $\Delta T=1600$ K et $T_{\text{surf}}=273$ K.

nouveau, la traction exercée en surface favorise l'écoulement et résorbe partiellement les zones de forte viscosité. Pour un rapport d'aspect donné, le facteur contrôlant le flux de chaleur en surface semble plus être la vitesse de surface, que les variations de viscosité (fig. 4-7). Le refroidissement de la cellule est d'autant plus efficace que la vitesse de surface est grande (fig. 4-7c). Les variations de viscosité conservent toutefois une certaine influence, puisque la température médiane des calculs à $\Delta\mu=10^4$ reste plus élevée d'environ 300-400 K que celle des résultats isovisqueux (fig. 4-7a et b). Les profils thermiques montrent également que la zone à faible écoulement et la couche limite thermique froide restent importantes, surtout pour $U_{\text{surf}}=1$ cm/an (fig. 4-7c). Parallèlement la couche limite thermique chaude est diminuée en amplitude (300-700 K pour $\Delta\mu=10^4$, contre 600-1000 K en isovisqueux) et en extension verticale.

4.2.3.2 - Champs de température.

La figure 4-8 représente les distributions thermiques adimensionnées moyennes obtenues pour les cas évoqués précédemment ($\Delta\mu=1$ ou 10^4 , $U_{\text{surf}}=1$ ou 5 cm/an). Pour redimensionner les champs de température à

l'échelle du manteau supérieur, on supposera une température de 1873 K (avant correction adiabatique) à la base du manteau supérieur. Cette valeur est contrainte par la transformation du γ -spinelle en perovskite et magnésowüstite. La température de surface vaut 273 K. Les

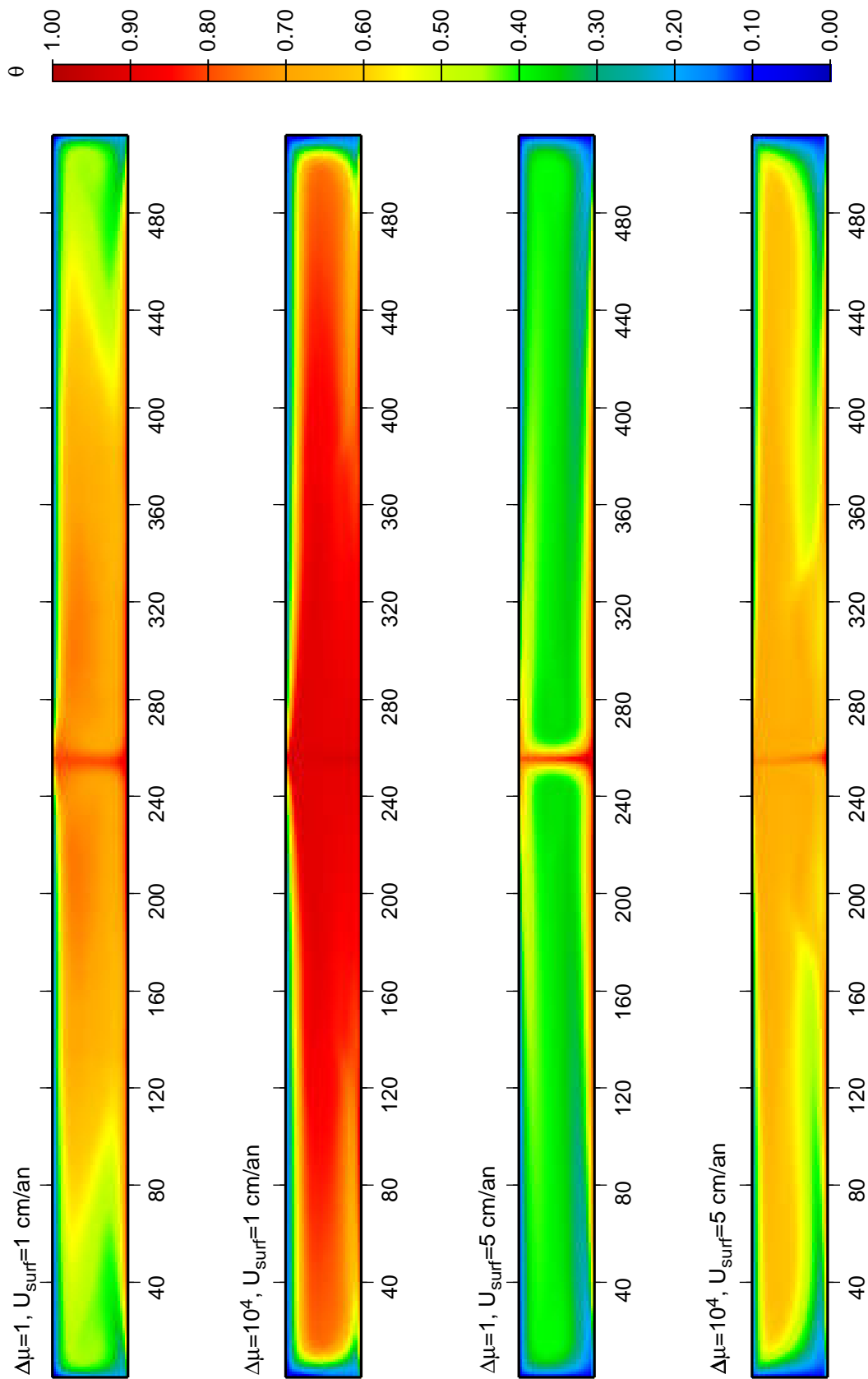


Figure 4-8. Champs thermiques moyens utilisés pour le calcul des profils synthétiques de vitesse sismique. Les graduations représentent le maillage du modèle numérique.

longueurs sont redimensionnées en prenant une hauteur de boîte de 670 km. Les distributions à viscosité variable, globalement plus chaudes, mettent en relief les panaches froids, et réduisent l'épaisseur des panaches chauds. Une vitesse de surface plus élevée a pour effet de rééquilibrer l'importance relative des panaches au profit du panache ascendant. La remontée des isothermes et le refroidissement de la boîte sont facilités par la traction exercée en surface.

4.3 - Calcul des vitesses sismiques.

4.3.1 - Méthode.

Le calcul utilisé dans ce travail est celui développé par *Vacher* (1995). Cette méthode de détermination des vitesses sismiques reprend celles de *Davies et Dziewonski* (1975) et *Duffy et Anderson* (1989). La masse volumique ρ et les modules élastiques (notés K pour l'incompressibilité à entropie constante, et G pour le cisaillement) sont d'abord ramenés à la température du calcul, ce qui nécessite de connaître le volume molaire à cette température. L'expression du volume molaire en fonction de T est déduite de la théorie de Grüneisen (p.e. *Suzuki et al.*, 1979). L'expansion thermique α est la dérivée du volume molaire par rapport à la température. La théorie de la déformation finie établit une relation entre la densité et la déformation volumique ε (*Coulomb et Jobert*, 1972, pp. 579-580),

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} \right], \quad (4-1)$$

ρ_0 étant la densité au pied du profil adiabatique. Prise au troisième ordre, la déformation finie définit la pression P en fonction de ε ,

$$P = -3K\varepsilon(1 - 2\varepsilon)^{5/2} \left[1 + \frac{3}{2} \left(4 - \frac{dK}{dP} \right) \varepsilon \right]. \quad (4-2)$$

Les vitesses sismiques de compression/dilatation (V_p) et de cisaillement (V_s) sont ensuite calculées par

$$\begin{aligned} \rho V_p^2 &= (1 - 2\varepsilon)^{5/2} (a_1 + a_2 \varepsilon) \\ \rho V_s^2 &= (1 - 2\varepsilon)^{5/2} (G + a_3 \varepsilon) \end{aligned} \quad (4-3)$$

où ε est la déformation volumique, et

$$a_1 = K + \frac{4}{3}G, \quad 5a_1 + 3K \frac{\partial a_1}{\partial P}, \quad a_3 = 5G + 3K \frac{\partial G}{\partial P}. \quad (4-4)$$

Ainsi, pour chaque minéral, les vitesses sismiques sont calculées en fonction des conditions de température et de pression. Le calcul de la vitesse acoustique V_ϕ , indépendante des modules de cisaillement, permet de s'affranchir de ces incertitudes. Une relation analogue à (4-3) donne V_ϕ ,

$$\rho V_\phi^2 = (1 - 2\varepsilon)^{5/2} (K + a_4 \varepsilon) \quad \text{où} \quad a_4 = 5K + 3K \frac{\partial K}{\partial P}.$$

Ces calculs sont développés le long d'un profil adiabatique de température. Ils ne peuvent donc pas utiliser directement les champs de température issus des modèles de convection, qui eux ne sont pas adiabatiques. L'hypothèse d'incompressibilité faite dans les modèles de convection ne tient pas compte de l'augmentation de température avec la pression. Selon le 2nd principe de la thermodynamique, ces solutions thermiques ne sont pas adiabatiques. Si l'on veut connaître les champs de température réels, il est nécessaire de corriger les températures numériques d'une petite quantité définie par le gradient adiabatique. *Vacher* (1995) utilise les données de *Chopelas et Boehler* (1989) pour calculer ce gradient

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S = \left(\frac{\alpha T}{\rho C_P} \right)_{P_0, T} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{6,5}, \quad (4-5)$$

où α est le coefficient d'expansion thermique calculé par la théorie de Grüneisen, ρ la densité déterminée par la déformation finie au 3^{ième} ordre en déformation et C_P la capacité calorifique du minéral (les C_P étant déterminés en fonction de la température par *Saxena et Shen*, 1992). Ce résultat est valable pour un minéral donné. Le gradient adiabatique de la roche est approché par la moyenne pondérée (par les fractions volumiques) des gradients propres des différents minéraux en présence. La température issue du calcul de convection (T_c) est considérée comme la température au pied du gradient adiabatique (i.e. pour $z=0$ et $P=P_0 \sim 0$). La température corrigée est finalement

$$T = T_c + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S (P - P_0). \quad (4-6)$$

Le calcul du gradient de température vertical $\partial T / \partial z$ utilise les profils de pression et de $\partial P / \partial z$ définis par le PREM (*Dziewonski et Anderson*, 1981). Pour les champs thermiques issus des calculs de convection, la relation (4-1) conduit à des $\partial T / \partial z$ compris entre 0,1 K/km et 0,4 K/km (*Vacher*, 1995).

Le passage à l'assemblage minéralogique composant les roches du manteau nécessite deux opérations supplémentaires.

• *Le choix d'un modèle pétrologique*, qui fixe la composition minéralogique de la roche en fonction des conditions de température et de pression. Ce modèle pétrologique doit en particulier tenir compte des transitions de phase. Le modèle le plus simple consiste à fixer une minéralogie indépendante de la température, valable pour une température moyenne (p.e. les modèles d'*Ito et Takahashi*, 1987). Un modèle plus fin peut être obtenu en calculant la minéralogie en chaque point du modèle numérique, en tenant compte de la température (corrigée du gradient adiabatique) issue de ce modèle et de la pression. De cette façon, la minéralogie des couches limites thermiques et des panaches (chauds et froids) sont mieux décrites. Deux modèles pétrologiques sont utilisés dans ce travail : un modèle à 62% d'olivine (modèle dit 'pyrolitique'), et un modèle à 40% d'olivine (modèle dit 'piclogitique') (*Ito et Takahashi*, 1987). Ces mêmes proportions sont conservées pour le β - puis le γ -spinelles à partir de 410 et 520 km. Le second modèle est plus riche en clinopyroxène (puis en majorite, au delà de 410 km). Appliqué à des profils adiabatiques, chacun de ces deux modèles est en bon accord avec les profils tomographiques (*Vacher et al.*, 1997). Toutefois, la composition pyrolitique est la plus appropriée jusqu'à la transition olivine \rightarrow β -spinelles, à 410 km de profondeur. Dans ces deux modèles, la phase grenat est assimilée à une solution solide constituée de plusieurs composantes (pyrope, grossulaire, grenat almandin et majorite). Les calculs tiennent compte des différences de densité et de modules élastiques existant entre ces composantes. Des études récentes (*Ridgen et al.*, 1994; *Chen et al.*, 1997; *Sinogeikin et al.*, 1997) donnent la densité et les modules élastiques des différentes composantes de cette solution. En revanche, sauf pour le grossulaire (*Duffy et Anderson*, 1989), il n'a pas encore été publié de valeur expérimentale pour les dérivées de K et G en fonction de la température et de la pression pour chacun des minéraux en solution.

• *Les moyennes des masses volumiques et des modules élastiques*. La masse volumique de la roche est simplement la moyenne pondérée des masses volumiques des minéraux. Le poids affecté à chaque minéral est la fraction volumique de ce minéral déterminée par le modèle pétrologique. En revanche, la réponse de la roche à la compression ou au cisaillement n'est pas une fonction linéaire des réponses individuelles de ses différents constituants. Ainsi, les modules élastiques de la roche n'ont aucune raison d'être approchés par la moyenne arithmétique des modules élastiques de chaque minéral. *Vacher* (1995) montre que, la méthode la plus appropriée au calcul du module élastique de la roche est la moyenne de Hashin-Shtrikman (*Hashin et Shtrikman*, 1963). La borne inférieure (supérieure) d'un module élastique d'une roche est reliée au plus petit (grand) des modules élastiques de chacun des minéraux.

Ce calcul, résumé sur l'organigramme de la figure 4-9, définit une masse volumique et un couple de vitesses sismique (V_p, V_s) en chaque point du modèle numérique. Les profils sismologiques synthétiques peuvent ensuite être comparés aux profils sismologiques de référence, et en particulier au modèle ak135 (Kennett *et al.*, 1995).

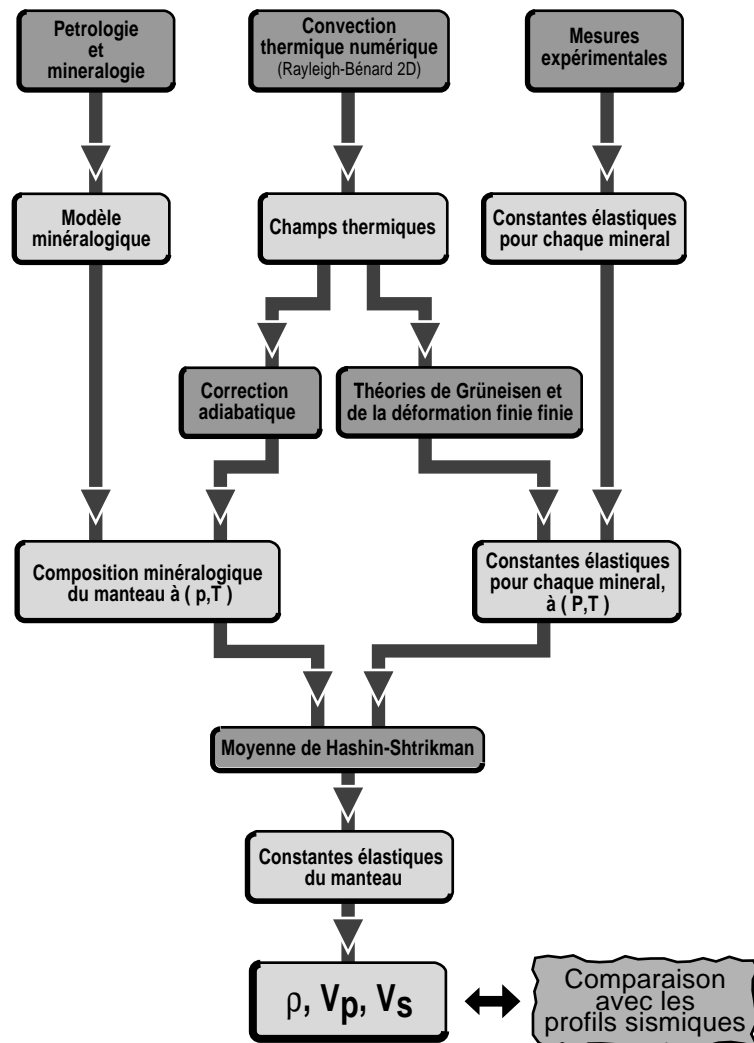


Figure 4-9. Organigramme du calcul des vitesses sismiques synthétiques

4.3.2 - Données minéralogiques.

Les données minéralogiques utilisées dans ce travail (tableau 4-2) sont issues de la compilation effectuée par Vacher *et al.* (1997). Celle-ci inclut des résultats récents obtenus pour l'olivine (Duffy *et al.*, 1995), les phases spinelle (Meng *et al.*, 1993; Duffy *et al.*, 1995) et la phase grenat (Chen *et al.*, 1997; Sinogeikin *et al.*, 1997). Une correction des valeurs génériques est éventuellement apportée en fonction du taux de fer supposé (x_{Fe}). Celui-ci modifie sensiblement

la densité et le module de cisaillement des minéraux (table 4-2), et il est important d'en tenir compte. Les calculs de vitesse synthétiques sont réalisés en supposant un taux de fer dans l'olivine (x_{Fe}) égal à 10%.

Minéral	ρ (g/cm ³)	K (GPa)	G (GPa)	dK/dP	dG/dP	dK/dT (GPa/K)	dG/dT (GPa/K)
Olivine (ol)	3,222 +1,182 x_{Fe}	128	81 -30 x_{Fe}	4,3	1,4	-0,016	-0,014
β -spinelles (β)	3,472 +1,24 x_{Fe}	170	108 -40 x_{Fe}	4,2	1,5	-0,018	-0,014
γ -spinelles (γ)	3,548 +1,30 x_{Fe}	183	119 -40 x_{Fe}	4,0	1,7	-0,020	-0,014
Diopside (cpx)	3,277 +0,38 x_{Fe}	113 +7 x_{Fe}	67 -6 x_{Fe}	4,5	1,7	-0,013	-0,010
Enstatite (opx)	3,215 +0,799 x_{Fe}	124	76 -24 x_{Fe}	5,6	2,1	-0,012	-0,011
<i>Phases grenat</i>							
Pyrope (py)	3,565	173	92	5,3	2,0	-0,021	-0,010
Almandin (alm)	4,325	180	99	-	-	-	-
Majorite (Mg-maj)	3,515	163	89	-	-	-	-
Grossulaire (gr)	3,597	168	107	4,9	1,6	-0,015	-0,012
Perovskite (Ca-pv)	4,210	283	150	4,0	1,9	-0,030	-0,023
Ilmenite (ilm)	3,810 +1,1 x_{Fe}	212	132 -41 x_{Fe}	5,6	1,7	-0,017	-0,017

Table 4-2. Masses volumiques et modules élastiques des minéraux du manteau supérieur. Compilation de *Vacher et al.* (1997), au 01/09/97.

4.3.3 - Anomalies synthétiques.

La figure 4-10 représente les cartes d'anomalies synthétiques de densité et de vitesse d'ondes P et S pour trois cas de figure (a-c: $\Delta\mu=1$ et $U_{surf}=1$ cm/an; d-f: $\Delta\mu=10^4$ et $U_{surf}=1$ cm/an; g-i: $\Delta\mu=10^4$ et $U_{surf}=5$ cm/an). La minéralogie est calculée à partir du modèle pyrolitique. Les statistiques sur ces champs d'anomalies (ainsi que sur les distributions de température) sont rassemblées dans la table (4-3).

Dans tous les cas, les panaches ascendants sont caractérisés par des anomalies de vitesse négatives, et les panaches descendant par des anomalies positives. A l'aplomb de la dorsale, l'étalement du panache chaud sous la surface crée une zone de faible vitesse. L'épaisseur de cette région est de l'ordre de 100 km. Le cas isovisqueux met en relief le panache ascendant: une colonne d'anomalies négatives assez fortes (-5 à -7 %) est présente sur toute l'épaisseur de la

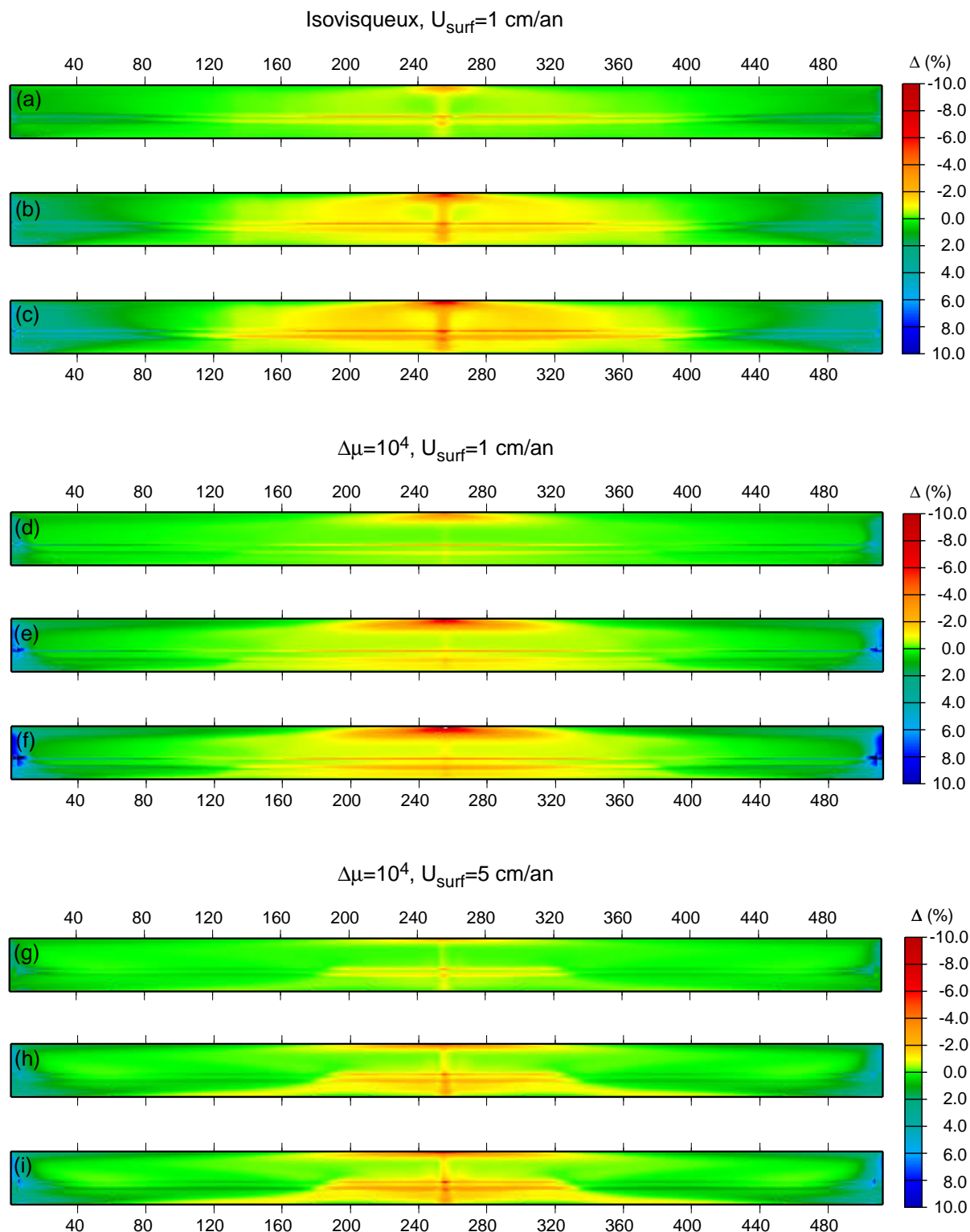


Figure 4-10. Anomalies synthétiques de densité (a,d,g) et de vitesses d'ondes P (b,e,h) et S (c,f,i) par rapport à un profil moyen, et pour différentes rhéologies et conditions limites de surface. (a-c) Fluide isovisqueux et $U_{\text{surf}}=1$ cm/an. (d-f) $\Delta\mu=10^4$ et $U_{\text{surf}}=1$ cm/an. (g-i) $\Delta\mu=10^4$ et $U_{\text{surf}}=5$ cm/an. Les graduations représentent le maillage du modèle numérique.

boîte. A l'inverse, les cas à viscosité variable mettent plus facilement en évidence les courants descendants que leur homologues ascendants: une large zone d'anomalies de vitesse positives (+6 à +8%) est visible au niveau des slabs. On retrouve là les caractéristiques générales induites par la viscosité variable sur l'écoulement et le champ de température. Enfin, la zone de faible vitesse est plus prononcée et plus étendue que dans le cas isovisqueux.

Les statistiques sur les champs de température et d'anomalies de vitesse s'accordent bien avec cette structure (table 4-3). En viscosité variable, les anomalies positives de vitesse sont plus prononcées que les anomalies négatives, 11,3% (14,6%) contre -7,6% (-9,3%) pour les ondes P (S) et $U_{surf}=1$ cm/an. Cet écart est significatif, mais il diminue lorsque la vitesse de surface est plus élevée, 7,3% (9,1%) contre -6,1% (-7,4%) pour les ondes P (S) et $U_{surf}=5$ cm/an. Il est également moins important pour un fluide isovisqueux, 9,5% (12,6%) contre -6,1% (-7,4%) pour les ondes P (S) et $U_{surf}=1$ cm/an. L'étalement des anomalies autour de la valeur moyenne (2σ) est plus important dans le cas à viscosité variable et/ou pour des vitesses de plaques plus lentes. Il mesure l'importance du panache froid, qui est plus développé pour un fluide à viscosité variable.

Viscosité constante	$U_{surf}=1\text{cm/an}$				$U_{surf}=5\text{cm/an}$			
	$\Delta\rho$ (%)	ΔV_p (%)	ΔV_s (%)	ΔT (K)	$\Delta\rho$ (%)	ΔV_p (%)	ΔV_s (%)	ΔT (K)
Minimum	-3,4	-6,1	-7,4	856	-5,4	-9,2	-11,4	972
Maximum	6,1	9,5	12,6	-1000	4,2	5,1	6,8	-842
Moyenne	0,11	0,23	0,30	-38	0,04	-0,09	-0,11	-17
2σ	0,70	1,31	1,67	208	0,49	0,82	0,97	148

Viscosité constante	$U_{surf}=1\text{cm/an}$				$U_{surf}=5\text{cm/an}$			
	$\Delta\rho$ (%)	ΔV_p (%)	ΔV_s (%)	ΔT (K)	$\Delta\rho$ (%)	ΔV_p (%)	ΔV_s (%)	ΔT (K)
Minimum	-3,6	-7,6	-9,3	1067	-3,0	-6,1	-7,4	870
Maximum	6,6	11,3	14,6	-1272	4,3	7,3	9,1	-939
Moyenne	0,09	0,19	0,25	-32	0,07	0,15	0,18	-25
2σ	0,79	1,54	1,97	233	0,62	1,15	1,43	190

Table 4-3. Statistiques sur les anomalies de densité, de vitesse d'onde P et S, et sur les variations de température par rapport à un profil moyen. Haut: viscosité constante; bas: viscosité variable.

Les transitions de phase à 410 et 520 km sont également bien visibles autour des panaches. A une profondeur donnée, elles se manifestent par une réduction des vitesses au niveau des panaches chauds, et une augmentation des vitesses au niveau des panaches froids. Une explication simple, d'ailleurs communément admise en géophysique, peut être proposée. L'écoulement

convectif décale la profondeur de ces transitions (p.e. *Gillet, 1995* pour une revue). Le slab qui plonge est plus froid que le milieu environnant, et les transitions olivine \rightarrow β -spinelle et β -spinelle \rightarrow γ -spinelle, qui sont exothermiques, doivent se produire à des pressions plus faibles. Celles-ci sont donc défléchies vers le haut par les slabs, et vers le bas par le panache chaud. Arrivé à la profondeur moyenne de la zone de transition, le slab est encore plus dense que le milieu environnant, ce qui se traduit par une anomalie de vitesse encore plus importante. Il est intéressant de constater que la déflexion des transitions s'étend sur plusieurs dizaines de kilomètres de part et d'autre du courant convectif, cet effet étant plus marqué pour les panaches chauds que pour les panaches froids.

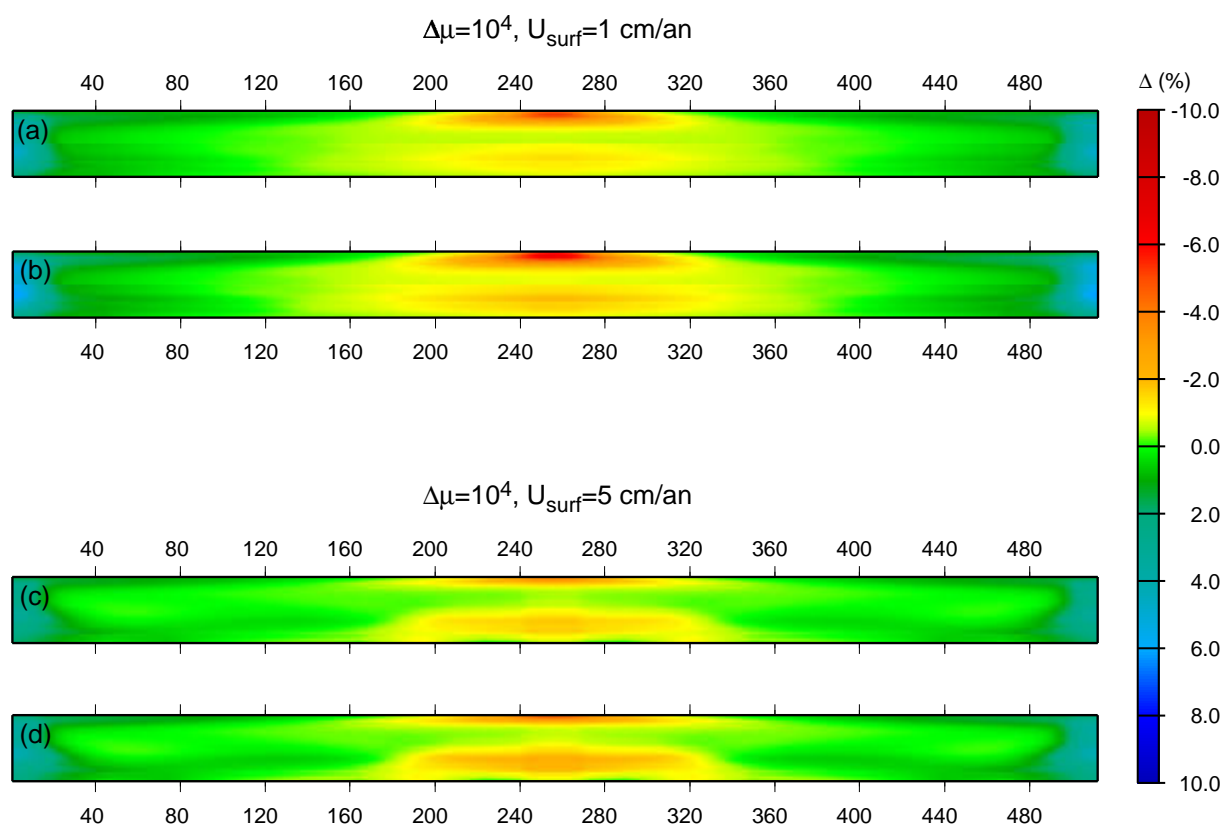


Figure 4-11. Anomalies synthétiques réduites de vitesses d'ondes P (a et c) et S (b et d) par rapport à un profil moyen, et pour un fluide à viscosité variable ($\Delta\mu=10^4$) et différentes conditions limites de surface: (a-b) $U_{\text{surf}}=1$ cm/an. (c et d) ou $U_{\text{surf}}=5$ cm/an.

La comparaison de ces champs synthétiques avec des modèles tomographiques nécessite un filtrage de nos calculs: la résolution latérale (verticale) des modèles tomographiques est environ 100 (5) fois plus faible que celle d'une grille de 512x32 points. Il est clair qu'un filtrage des vitesses synthétiques obtenus à viscosité variable réduit encore la visibilité du panache chaud.

Dans la figure (4-11), les vitesses synthétiques ont été filtrées au moyen d'une fenêtre gaussienne glissante, avec une longueur de corrélation de 250 km (Vacher, 1995). Dans ce cas, le panache a complètement disparu, tandis que les slabs et la zone de faible vitesse restent bien visibles. Il n'est donc peut-être pas étonnant que des panaches chauds à l'aplomb des dorsales ne soient pas observés. Sur toute l'épaisseur de la zone de transition, les modèles synthétiques filtrés présentent une région d'anomalies négatives d'environ -1 à -2%. Ces anomalies sont significatives, mais elles ne sont pas observées par les modèles tomographiques.

Enfin, en accord avec les champs de température, on notera que pour une vitesse de surface de 5 cm/an, les anomalies de vitesse sont globalement plus proches du profil moyen, signe d'un milieu globalement plus froid que pour un mouvement de surface plus lent. Cette tendance va à priori à l'encontre de ce qui est observé. Le Pacifique se déplace plus rapidement que l'Atlantique, mais il est sismiquement plus lent. Il n'y a pas nécessairement de contradiction entre ces observations et ce que suggèrent les modèles de convection. En effet, si l'on associe en première approximation des vitesses sismiques lentes à des températures élevées, un Pacifique plus chaud peut être expliqué par une quantité de chaleur à transporter vers la surface plus importante que sous l'Atlantique. La corrélation entre des vitesses sismiques lentes (un milieu plus chaud) et une tectonique rapide n'est pas évidente, puisqu'un autre paramètre (la quantité de chaleur disponible à la base du manteau supérieur) intervient. Le modèle d'ondes P de *Fukao et al.* (1992) met en évidence une zone de faibles vitesses sous le Pacifique sud, depuis la frontière noyau/manteau jusqu'au sommet du manteau supérieur. Cette structure correspondrait à un 'superplume', ramenant vers la base du manteau supérieur une importante quantité de chaleur (*Fukao*, 1992).

En conclusion de ce paragraphe, on retiendra que les variations de viscosité réduisent l'importance des panaches chauds. Les panaches froids sont au contraire plus développés que dans le cas isovisqueux. Ces caractéristiques se répercutent sur les anomalies synthétiques de vitesse sismique. Lorsque les anomalies de vitesse sont filtrées, la visibilité du panache chaud est encore plus réduite. Dans la zone de transition, il apparaît également une région d'anomalies négatives, qui n'est pas vue par les tomographes. Il est important de noter que notre modèle de convection est loin de modéliser le manteau terrestre. C'est un modèle 2D, et le chauffage interne n'est pas pris en compte. En quantité suffisante, le chauffage interne aurait pour effet de bloquer l'ascension des panaches chauds. Cette dernière situation ne semble pas être le cas du manteau supérieur. Le taux de chauffage interne y reste relativement modeste ($h_s=2,0$, cf §2.1.4). Les résultats du paragraphe 3.6.1 suggèrent que les panaches chauds restent actifs.

4.3.4. - Profils synthétiques.

4.3.4.1 - Minéralogie calculée.

La figure 4-12 représente la minéralogie calculée dans le cas d'un modèle 'pyrolitique' (a) et d'un modèle 'piclogitique' (b), pour $\Delta\mu=10^4$ et $U_{\text{surf}}=1$ cm/an. La valeur de la vitesse de surface et du rapport de viscosité induisent peu de variations dans les compositions minéralogiques.

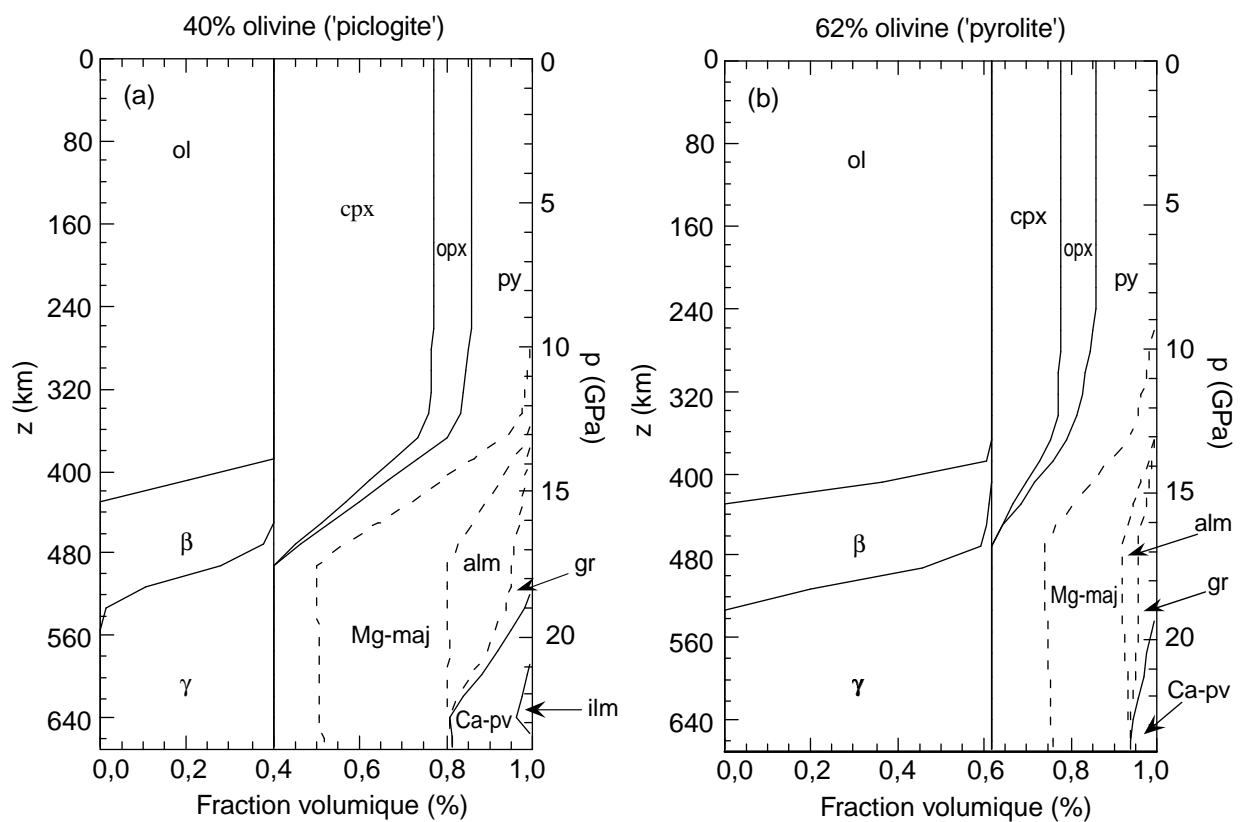


Figure 4-12. Minéralogie calculée à partir des champs de température convectifs, pour $\Delta\mu=10^4$ et $U_{\text{surf}}=1$ cm/an. (a) 40% d'olivine ('piclogite'); (b) 62% d'olivine ('pyrolite'). Les pointillés séparent les différentes composantes de la phase grenat. Abréviations: ol=olivine; β = β -spinelle; γ = γ -spinelle; cpx=clinopyroxène; opx=orthopyroxène; py=pyrope; alm=almandin; Mg-maj=majorite; gr=grossulaire; Ca-pv=perovskite; ilm=ilménite.

Dans le modèle d'Ito et Takahashi (1987), l'olivine compte pour 55% du volume jusqu'à 410 km, et le clinopyroxène se maintient jusqu'à 670 km. Les modèles pyrolitique et piclogitique introduisent tous les deux 15% de pyrope sur toute l'épaisseur du manteau supérieur. Cet ajout s'accompagne d'une diminution du clinopyroxène dans le la pyrolite, et d'une baisse du taux d'olivine dans la piclogite. Au dessous de 410 km, les grenats remplacent progressivement le clinopyroxène et l'orthopyroxène. Dans la pyrolite, la majorite se stabilise autour de 20% (30% dans la piclogite) jusqu'à 670 km. Par contre, le grossulaire et l'almandin se transforment en

pérovskite dès 520 km. Cela est rendu possible par les variations latérales de température à la base de la boîte, et en particulier par l'établissement d'une zone chaude au pied des panaches.

4.3.4.2 - Profils synthétiques.

- *Remarque sur les profils '1D' et '2D'*. Les profils sismiques synthétiques représentent des moyennes horizontales sur des champs 2D. Plutôt que de calculer le profil sismique moyen d'un champ de vitesses synthétiques 2D (profil '2D'), on peut déterminer directement le profil sismique associé au profil thermique moyen (profil '1D'). A priori, ces deux types de profils doivent être différents, puisque la méthode de calcul développée précédemment n'est pas linéaire en température. Par ailleurs, l'inversion des temps d'arrivée des séismes fournit des lenteurs, et non des vitesses sismiques. Pour rester cohérent avec les observations tomographiques, les champs de vitesses synthétiques sont converties en champs de lenteurs avant d'être moyennés. Ce

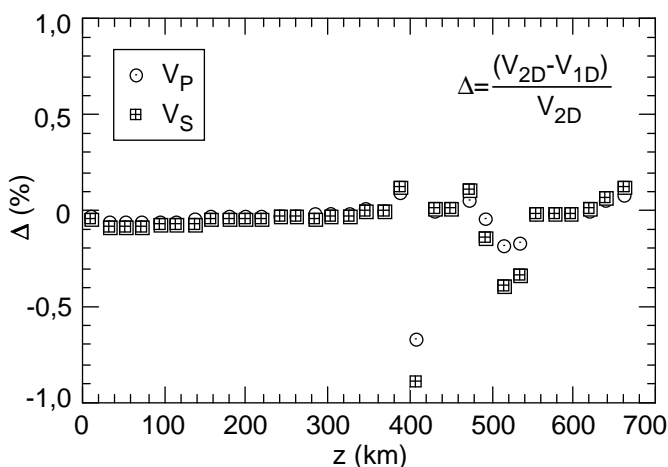


Figure 4-13. Différence relative entre les profils '1D' et '2D'. $\Delta\mu=10^4$, $U_{\text{surf}}=1\text{cm/an}$, modèle minéralogique pyrolitique.

que nous appelons profil de vitesse est en fait un profil d'inverse de lenteur. En revanche, les quantités obtenues à partir des profils thermiques sont bien des vitesses sismiques. Malgré cela, pour un cas de figure donné, les profils '1D' et '2D' restent très proches (fig. 4-13). Les dispersions sont plus importantes au niveau des discontinuités des 410 km et 520 km (les écarts ne dépassant toutefois pas 1%). Les transitions de

phases sont très sensibles à la température. A ces profondeurs, de petites variations latérales de température pourraient induire des variations latérales de minéralogie plus importantes que dans le reste du manteau. L'opération de moyennage est donc beaucoup moins précise.

- *Comparaison avec le modèle sismologique de référence ak135.* Les profils synthétiques issus d'une minéralogie pyrolitique sont représentés sur la figure 4-14. On vient de le voir, les modèles isovisqueux sont globalement plus froids. Il en va de même dans les cas où la vitesse de surface est élevée. Les profils synthétiques les plus proches du modèle ak135 sont obtenus pour $\Delta\mu=10^4$.

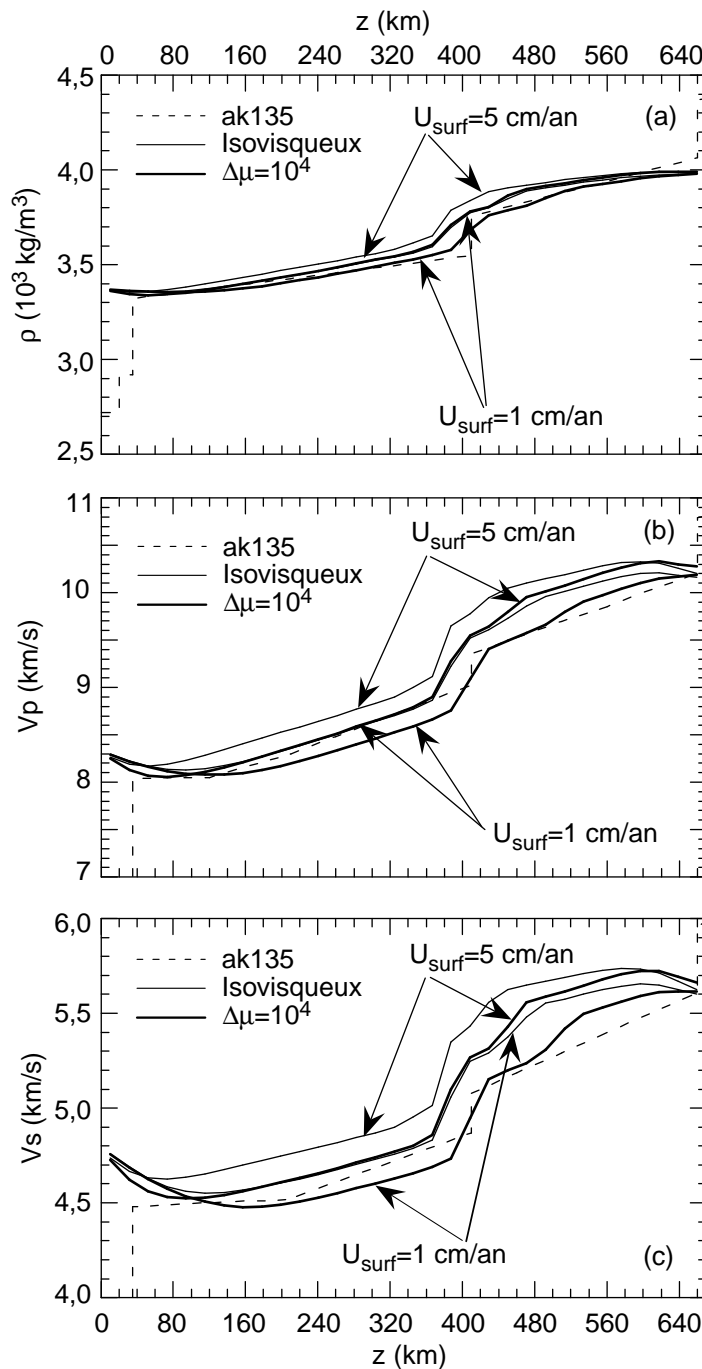


Figure 4.14. Comparaison entre les profils synthétiques de densité (a) et de vitesse sismique (b et c) et les profils tomographiques de référence ak135 (Kennett et al., 1995). Modèle minéralogique 'pyrolitique'.

Les profils de densité sont en bon accord avec les données sismiques sur toute l'épaisseur du manteau supérieur. Le profil à viscosité variable/ $U_{surf}=1$ cm/an ne s'écarte du profil de référence qu'autour de la zone de transition. La différence est faible, moins de 1%. Les écarts les plus importants sont obtenus pour le cas isovisqueux/ $U_{surf}=5$ cm/an, mais ils restent inférieurs à 3%. Pour tous cas considérés, le saut de densité à 410 km est d'environ 200 kg/m 3 , c'est-à-dire très proche de la valeur donnée par ak135 ($\Delta\rho\sim 210$ kg/m 3). Enfin, les gradients de densité sont bien respectés ($d\rho/dz\sim 0,8$ kg/m 3 /km jusqu'à 410 km), malgré une légère inflexion à partir de 520 km ($d\rho/dz\sim 0,5$ kg/m 3 /km au lieu de 1,2 kg/m 3 /km pour ak135). Ces profils ne dépendent ni des valeurs expérimentales de K et de G ni des incertitudes éventuelles qui les affectent. Ils dépendent seulement des champs thermiques synthétiques qui fournissent ainsi de bonnes corrélations avec les observations.

Les profils de vitesses sismiques synthétiques présentent également des points communs avec les profils sismologiques. Les vitesses cisailantes sont globalement moins bien corrélées que les vitesses de compression car elles reposent sur des mesures expérimentales de modules de cisaillement (et de leurs dérivées), qui sont moins nombreuses et précises que celles disponibles

pour le module d'incompressibilité. Les nouvelles données publiées sur l'olivine (Duffy *et al.*, 1995) conduisent à de bonnes corrélations entre des profils synthétiques et sismiques jusqu'à 410 km. Les cas ($\Delta\mu=10^4$, $U_{\text{surf}}=1\text{cm/an}$) et ($\Delta\mu=1$, $U_{\text{surf}}=5\text{cm/an}$) induisent moins de 2-3% d'écart sur V_p . Un meilleur accord est obtenu pour des profils thermiques 'froids' (viscosité constante et/ou vitesse de surface rapide): ($\Delta\mu=1$, $U_{\text{surf}}=1\text{cm/an}$) et ($\Delta\mu=10^4$, $U_{\text{surf}}=5\text{cm/an}$) se confondent presque avec le profil ak135. Les gradients de vitesses synthétiques sont également assez proches des gradients observés. En revanche, le saut de vitesse induit par la discontinuité à 410 km est surestimé d'environ 40 à 50% par rapport au modèle ak135, et ceci dans le cas d'une viscosité variable comme dans celui d'une viscosité constante. La transition β -spinelles \rightarrow γ -spinelles vers 520 km, qui n'est pas détectée par les profils sismiques, est présente sur les profils synthétiques. Dans la zone de transition (410-670 km), ce sont les cas 'chauds' (viscosité variable et petite vitesse de surface) qui sont les plus proches du modèle de référence ak135. Dans cette partie du manteau, les modèles à viscosité variable s'accordent bien avec les données expérimentales de β - et γ -spinelles (Meng *et al.*, 1993; Rigden *et al.*, 1994). Pour les autres cas de figure, les vitesses de compression synthétiques sont systématiquement 2 à 6 % plus rapides. La corrélation entre les gradients de vitesse calculés et observés reste bonne dans le cas d'un fluide à viscosité variable, mais les solutions isovisqueuses enregistrent une chute significative des vitesses sismiques entre 520 et 670 km.

Il est raisonnable de penser qu'une partie des désaccords entre les profils synthétiques et sismiques est en partie liée aux incertitudes qui subsistent sur les paramètres élastiques de certains minéraux. La densité, qui ne dépend pas de ces valeurs, est en effet globalement mieux décrite que les vitesses sismiques. Dans le calcul des vitesses synthétiques, les modèles de convection apportent les profils thermiques. Ces profils sont adiabatiques sur une grande épaisseur du manteau supérieur (et en particulier à 410 km). La valeur de cet adiabat est le paramètre influent, et les données récentes sur l'olivine suggèrent un profil thermique jusqu'à 410 km plus froid que ce qui était admis auparavant (Vacher *et al.*, 1997).

- *Influence de la viscosité variable.* Les solutions à viscosité variable sont globalement plus chaudes que les solutions isovisqueuses. Il n'est donc pas étonnant de constater que les vitesses sismiques sont plus faibles dans le cas où $\Delta\mu=10^4$ que lorsque la viscosité est constante (fig. 4-14). Ces ralentissements, de l'ordre de 0,2 km/s pour V_p et V_s , induisent un rapprochement des profils synthétiques par rapport au profil de référence ak135 dans la zone de transition.

Un effet remarquable de la viscosité variable est de redresser partiellement le gradient des vitesses sismiques dans la zone de transition, particulièrement entre 520 et 670 km (fig. 4-14). Dans le cas d'une vitesse de plaque de 1 cm/an, les vitesses sismiques ne chutent pas : le gradient de V_p est positif et vaut $1,7 \cdot 10^{-3}$ (km/s)/km au lieu d'être négatif et égal à $-0,6 \cdot 10^{-3}$ (km/s)/km pour le cas isovisqueux. Dans le modèle ak135, il vaut $3,4 \cdot 10^{-3}$ (km/s)/km. En revanche, les solutions obtenues pour $U_{\text{surf}}=5$ cm/an conservent une couche limite thermique chaude importante, même à viscosité variable : la diminution des vitesses (elle vaut $-0,3 \cdot 10^{-3}$ (km/s)/km pour les ondes P), reste visible, mais elle est plus modeste que dans le cas isovisqueux.

Un apport important des modèles de convection à viscosité variable, par rapport aux modèles isovisqueux, est de mieux décrire les profils de vitesses sismiques dans la zone de transition, en particulier au delà de 520 km. Dans les modèles à viscosité variable, l'amplitude thermique de cette couche limite est réduite et joue un rôle moins important. La température a également une influence sur la composition minéralogique, donc indirectement sur les vitesses sismiques.

Bien entendu, les calculs présentés dans ce travail ne décrivent que très grossièrement le manteau supérieur. Mais un point important est que les ordres de grandeur des vitesses et des gradients sont bien respectés. Ensuite, il faut retenir que les solutions à viscosité variable expliquent mieux le modèle de référence que ne le font les solutions isovisqueuses, bien que les données expérimentales récentes de l'olivine privilégient un gradient adiabatique plus froid dans les 410 premiers kilomètres. Enfin, un dernier point important, est que l'association viscosité variable/minéralogie calculée inhibe la chute du profil de vitesse observée dans le cas d'un fluide isovisqueux.

- *Influence de la minéralogie.* Par rapport à un modèle minéralogique constant, la prise en compte de la température dans le calcul de la minéralogie accroît la densité des roches entre 520 et 670 km. Par ailleurs, le profil de masse volumique d'une roche pyrolitique, plus riche en olivine, se démarque sensiblement du profil de densité piclogitique (fig. 4-15a). Cette différence se manifeste surtout à partir de 410 km, avec l'apparition progressive de la phase β -spinnelle et des grenats, la piclogite étant de 1 à 2% plus dense que la pyrolite. Enfin, puisqu'elles contrôlent partiellement la distribution thermique, les variations de viscosité se répercutent de nouveau (mais indirectement, cette fois-ci) sur le calcul de la composition minéralogique, et par suite sur les profils de masse volumique et de vitesses sismiques.

Les différences de composition minéralogique se reflètent peu sur les profils de vitesses synthétiques. Les modèles calculés restent également proches du modèle à minéralogie constante jusqu'à 410 km (il existe au plus un écart de l'ordre de 1%, fig. 4-15b). Dans cette zone, le taux

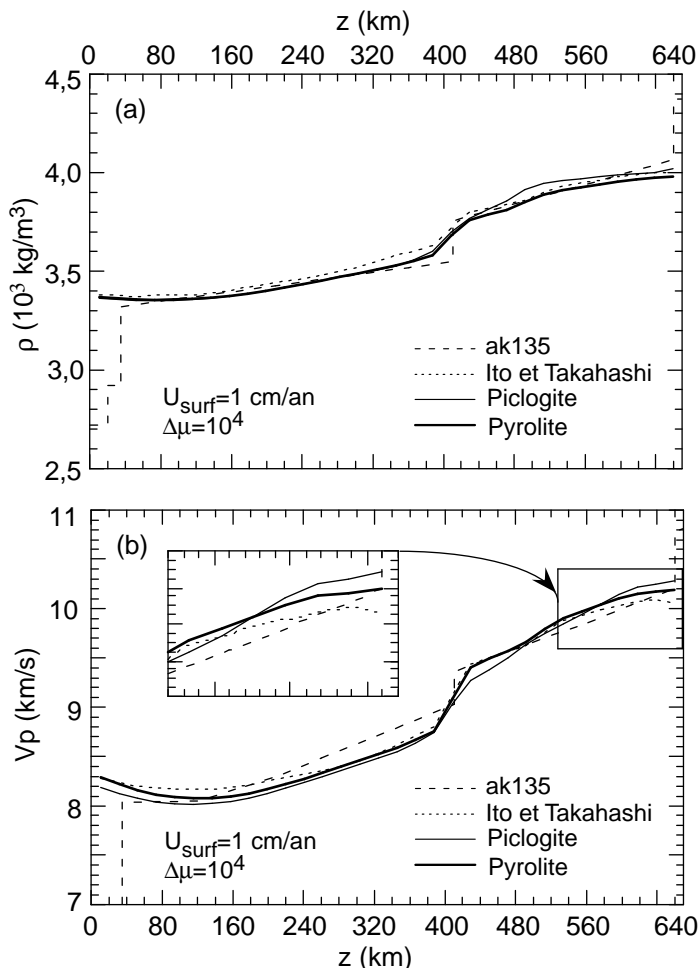


Figure 4.15. Influence du modèle minéralogique sur le profil de densité (a) et le profil V_p (b). $U_{\text{surf}}=1 \text{ cm/an}$ et $\Delta\mu=10^4$.

cette zone (fig. 4-15b). Cet effet est plus marqué pour la piclogite que pour la pyrolite (les gradients valant respectivement 2,2 km/s/km et 1,7 km/s/km).

Un calcul rapide à partir des données du tableau 4-2 montre qu'entre 520 et 670 km les ondes P se propagent plus rapidement dans le pyrope ($V_p \sim 10,7 \text{ km/s}$ et $V_s \sim 5,6 \text{ km/s}$) que dans la majorite ($V_p \sim 10,5 \text{ km/s}$ et $V_s \sim 5,7 \text{ km/s}$). Le modèle à minéralogie constante, dépourvu de pyrope, est globalement plus lent. Un autre calcul approché des vitesses sismiques entre 520 et 670 km montre que la majorite est sensiblement plus rapide que le γ -spinelle ($V_p \sim 10,6 \text{ km/s}$ et $V_s \sim 6,0 \text{ km/s}$). Le modèle 'piclogitique' est donc lui aussi sensiblement plus rapide. A l'inverse, les

d'olivine semble avoir peu d'influence sur les vitesses synthétiques. Le modèle 'piclogitique' comme le modèle 'pyrolitique' surestiment l'amplitude de la discontinuité à 410 km. La piclogite induit un saut légèrement moins élevé ($\Delta V_p \sim 0,5 \text{ km/s}$ au lieu de 0,7 km/s), mais par la suite c'est la pyrolite qui est la plus proche du profil de référence. Des différences plus marquées apparaissent à l'approche des 670 km. Même dans le cas d'une viscosité variable, le modèle à minéralogie constante ne fait pas disparaître la diminution de vitesse dans la couche limite thermique chaude ($dV_p/dz \sim -0,2 \text{ (km/s)/km}$). En revanche, tout comme les variations de viscosité, le calcul de la minéralogie en fonction de la température relève significativement le profil de V_p dans

ondes S sont plus rapides dans le γ -spinel ($V_s \sim 6,0$ km/s) que dans la majorite ($V_s \sim 5,7$ km/s) et dans le pyrope ($V_s \sim 5,6$ km/s). Cela pourrait expliquer pourquoi les gradients de vitesses d'onde S dans la zone de transition restent faibles même à viscosité variable (fig. 4-14). Seules les conséquences thermiques de la viscosité variable (diminution de la couche limite thermique) participent au redressement des vitesses d'ondes S.

En résumé, la viscosité variable associée au calcul de la minéralogie en fonction de la température, explique mieux que le cas isovisqueux les gradients de vitesse sismique dans la zone de transition. L'effet le plus important est l'influence directe de la température. L'influence de la minéralogie est moins marquée, et elle résulte en partie de la valeur de la température.

4.3.5 - Epaisseur et profondeur de la transition $\alpha \rightarrow \beta$.

Le modèle ak135 ne permet pas de calculer l'épaisseur de la transition des 410 km. Par ailleurs, il ne présente pas de transition significative à 520 km. L'étude de *Yamazaki et Hirahara* (1994), basée sur l'étude d'onde P et S réfléchies (ou converties) par la discontinuité des 410 km, estime une épaisseur de 5 à 20 km pour cette transition.

La résolution en température de notre modèle numérique est de l'ordre de grandeur de 20 km, si bien que les profils synthétiques ne présentent pas de transition abrupte. Cette transition est décrite par trois points, ce qui lui donne une épaisseur de 40 km (fig. 4-14), soit deux fois plus que la valeur proposée par *Yamazaki et Hirahara* (1994). Etant donnée la résolution de notre modèle, cette valeur est une borne supérieure. Un maillage plus fin (64 points verticaux) serait nécessaire pour avoir une estimation plus précise.

La profondeur de la transition $\alpha \rightarrow \beta$ varie selon les cas considérés (fig. 4-14). Pour le cas à viscosité variable/ $U_{\text{surf}}=1$ cm/an, elle est centrée à 410 km. Mais pour des cas plus froids, elle se produit naturellement à des profondeurs légèrement plus faibles. En particulier, dans le cas isovisqueux/ $U_{\text{surf}}=1$ cm/an, elle est centrée à 380 km. Cette remarque souligne une fois de plus l'intérêt de la viscosité variable. Elle permet une meilleure localisation de la transition $\alpha \rightarrow \beta$.

4.3.6 - Correction adiabatique des températures.

Les incertitudes sur les paramètres thermodynamiques induisent une erreur relative d'environ 10% sur les gradients adiabatiques (*Vacher*, 1995). La relation (4-5) montre que $\partial T/\partial z$ augmente avec la température. Par conséquent, le long d'un profil thermique, il augmente avec la

profondeur, mis à part dans la couche limite thermique chaude. D'après (4-6), la correction en température (pour un gradient adiabatique fixé) est une fonction strictement croissante de la profondeur. Par ailleurs, le gradient adiabatique est affecté par les transitions de phase α -spinelle \rightarrow β -spinelle et β -spinelle \rightarrow γ -spinelle à 410 et 520 km. Lorsqu'il franchit une transition de phase exothermique (endothermique), le profil thermique est décalé vers des températures plus élevées (basses): c'est l'effet Verhoogen. Cet effet est visible sur les profils adiabatiques de la figure 4-16. Il induit un saut de température d'environ 20 K pour la transition $\alpha \rightarrow \beta$, et d'environ 10-15 K pour la transition $\beta \rightarrow \gamma$. Au total, la correction adiabatique croît globalement avec la profondeur, et peut atteindre 200 à 300 K (fig. 4-16).

La correction adiabatique permet d'utiliser les champs de température de modèles de convection incompressibles. Moyennant cette correction, les modèles incompressibles sont donc bien adaptés au calcul des vitesses sismiques. Un modèle précis devrait introduire la compressibilité. Cependant, les effets de ce paramètre ne sont probablement pas aussi marqués que ceux de la viscosité variable, ou même du chauffage interne.

4.3.7 - Spectres d'amplitude des anomalies de vitesses.

Les spectres d'amplitude des anomalies de vitesse permettent de contraindre la taille des hétérogénéités du modèle synthétique, et d'estimer l'importance de celles-ci. En sismologie, les spectres d'amplitude et de puissance sont utilisés depuis une dizaine d'année pour mieux appréhender les hétérogénéités du manteau terrestre. Dans le cas de la Terre, le développement en harmonique sphérique est un choix naturel. Chaque degré du spectre représente une longueur caractéristique des anomalies de vitesses, donc des hétérogénéités. Le degré maximum est contraint par la résolution des modèles tomographiques, qui atteint difficilement l'ordre 36.

Cependant, l'interprétation des spectres de puissance en terme d'hétérogénéité mantellaires est sujette à discussion. Pour *Su et Dziewonski* (1992), qui vont jusqu'à l'ordre 36, seuls les ordres inférieurs à 6 contribuent au spectre de façon significative. Les ordres supérieurs sont fortement atténués. Ils en déduisent que les hétérogénéités du manteau ont une extension latérale d'au moins 3000-6000 km. Dans le modèle de *Li et Romanowicz* (1996), développé jusqu'à l'ordre 12, les ordres 2,4,5 et 6 sont dominant jusqu'à 300 km. L'ordre 1 domine de 300 à 500 km, puis l'ordre 2 jusqu'à 800 km. Les ordres 6 à 12 du modèle de Li et Romanowicz sont bien corrélés avec le géoïde observé: ils sont donc représentatifs de la structure à moyenne échelle (longueur d'onde de 3000-6000 km) du manteau supérieur. Toutefois, une corrélation avec la tectonique de

surface devrait faire ressortir les ordres encore plus élevés (20 et plus) correspondant à des anomalies de quelques centaines de kilomètres de longueur d'onde. *Snieder et al.* (1991) ont suggéré que la prédominance des grandes longueurs d'onde était purement artificielle. La

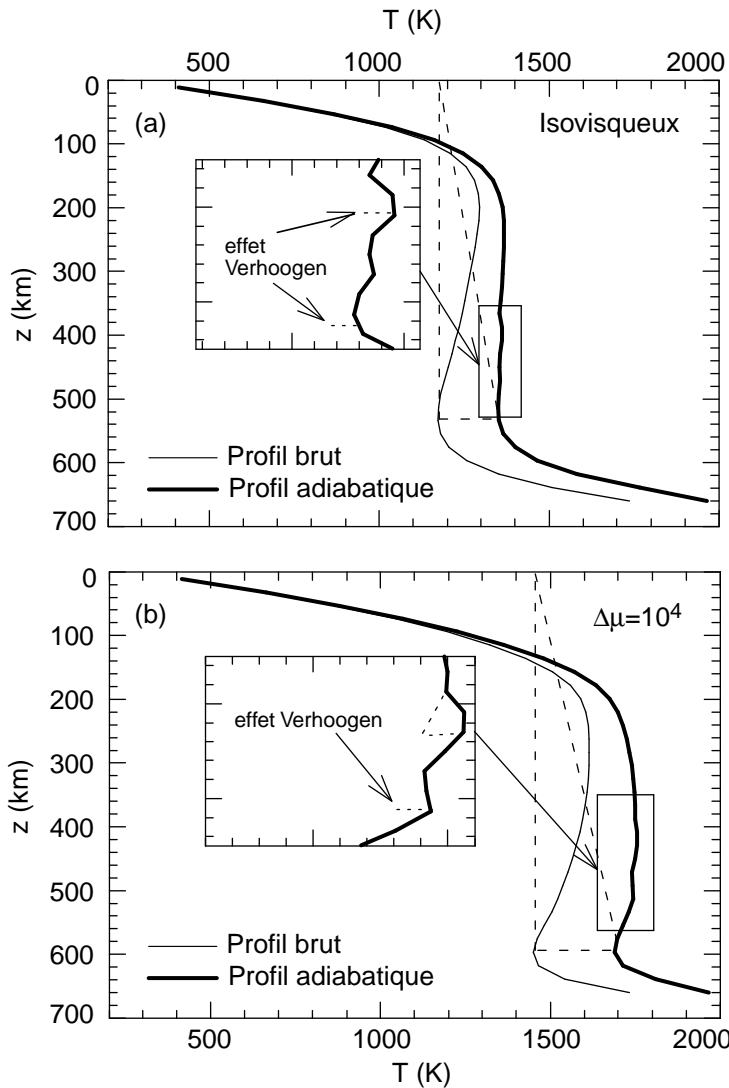


Figure 4-16. Correction adiabatique. Exemple de calculs pour $U_{\text{surf}}=1$ cm/an, et un modèle minéralogique 'pyrolitique'. (a) Viscosité constante; (b) $\Delta\mu=10^4$.

résolution des modèles tomographiques impose de tronquer les spectres de puissance à un certain ordre (au mieux, à l'ordre 36). Lors du calcul du spectre de puissance, les contributions des ordres élevés pourraient être numériquement rangées avec celles des ordres les plus bas. Une étude récente montre que cet effet de troncature n'est absolument pas négligeable (*Trampert et Snieder, 1996*).

Il est intéressant de déterminer les spectres de puissance correspondant à notre modèle synthétique. A une profondeur donnée, ces spectres sont calculés par la transformée de Fourier des anomalies de vitesses. Ce choix est guidé par la structure 2D-cartésienne de notre modèle. Un ordre pair du développement en série de Fourier des modèles synthétiques correspond à un ordre impair du

développement en harmonique sphérique des modèles tomographiques. L'ordre n correspond à une hétérogénéité de longueur d'onde $\lambda=L/n$, où L est la longueur de la boîte. A la profondeur z , le coefficient complexe d'ordre n est défini par

$$C_n(z) = \sum_{x=1}^N \frac{\delta V(z, x)}{\bar{V}(z)} \exp\left(-\frac{2i\pi nx}{N}\right), \quad (4-7)$$

où N est le nombre de points horizontaux de la grille. L'amplitude à l'ordre n est

$$A_n(z) = \sqrt{\text{Re}^2(C_n) + \text{Im}^2(C_n)}. \quad (4-8)$$

La figure 4-17 représente les spectres d'amplitude des anomalies d'ondes P et S calculées par notre modèle, à différentes profondeurs, ainsi que les moyennes verticales.

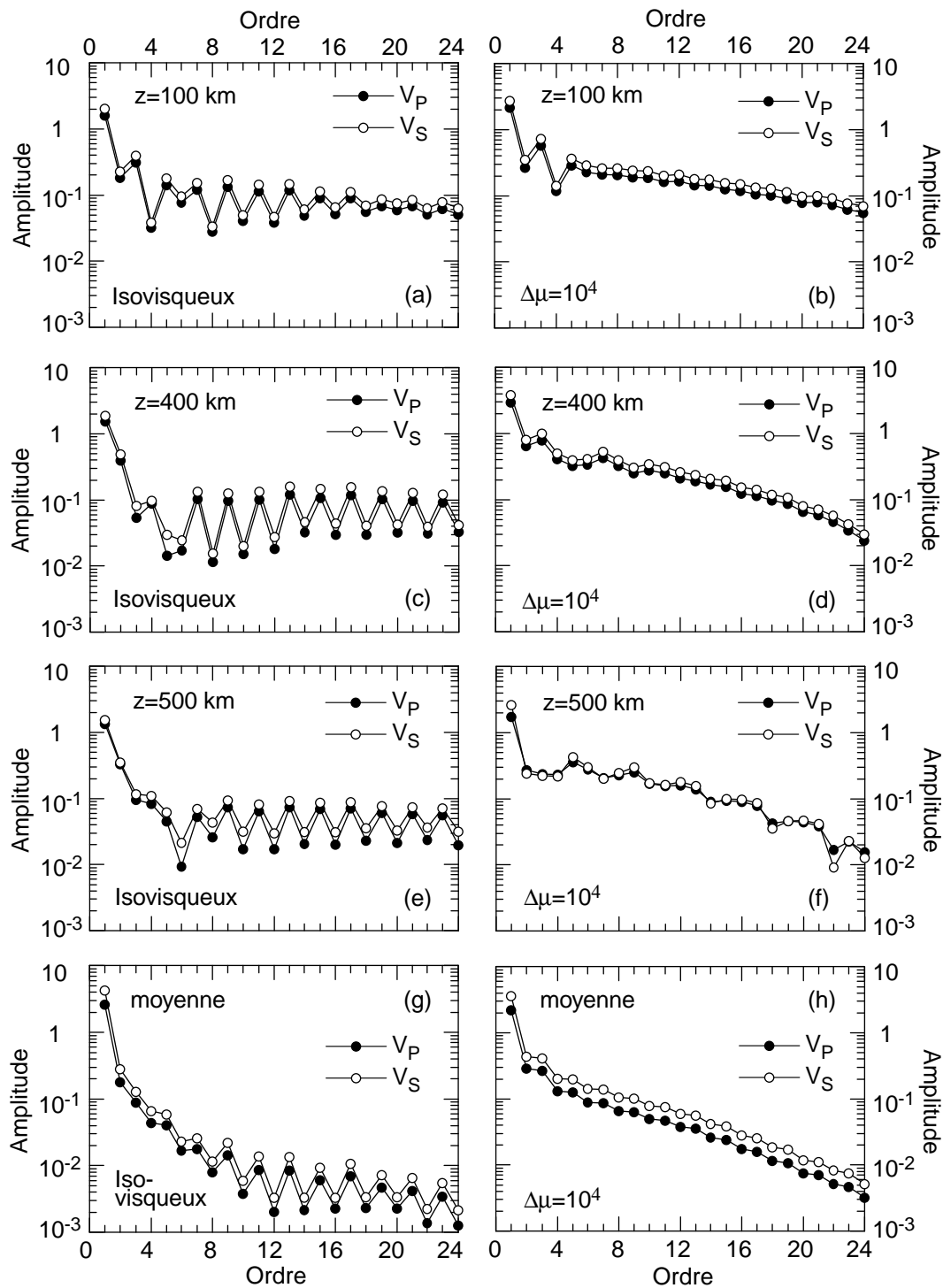


Figure 4-17. Spectres de puissance des anomalies de vitesse à différentes profondeurs (100, 400 et 500 km), et moyenne verticale (dernière ligne). Cas iso-visqueux (colonne de gauche) et à viscosité variable (colonne de droite).

Dans tous les cas, l'ordre 1 est l'ordre dominant. Il représente les deux rouleaux de convection. Dans le cas isovisqueux, les ordres pairs sont fortement atténués (environ d'un facteur 10) par rapport aux ordres impairs, quelle que soit la profondeur. Ensuite, l'amplitude des spectres isovisqueux décroît très rapidement : à 400 et 500 km, l'ordre 3 est divisé d'un facteur 20 par rapport à l'ordre 1. Au delà de l'ordre 3, l'amplitude est à peu près constante. Seules les hétérogénéités à grande longueur d'onde sont importantes. Cet effet est moins prononcé pour les faibles profondeurs, et pour le spectre moyen : à 100 km, l'ordre 3 reste 4 fois plus intense que l'ordre 5. Au delà de l'ordre 5, le spectre moyen décroît régulièrement.

Les spectres des modèles à viscosité variable sont bien différents. D'abord, la répartition fréquentielle des anomalies est plus homogène : les ordres pairs et impairs sont à peu près équivalents. Ensuite, la décroissance de l'amplitude est plus lente et plus régulière que dans le cas isovisqueux. A 100 km de profondeur, l'amplitude de l'ordre 1 est divisé par 20 seulement à l'ordre 20. Les instabilités qui se développent à la base de la couche limite thermique pourraient expliquer ces hétérogénéités de courte longueur d'onde. Celles-ci contribuent pleinement au spectre d'amplitude. A de plus grandes profondeurs, la décroissance de l'amplitude est un peu plus rapide, et moins régulière : les hétérogénéités à petites longueur d'onde ($\lambda < L/12$) sont moins développées, mais d'amplitudes toujours supérieures à celles obtenues dans le cas isovisqueux.

4.4 - Conséquence sur la dynamique du manteau terrestre.

Les résultats du paragraphe 4.3.4 permettent d'éclaircir un point de la discussion concernant la convection en une ou deux couches du manteau supérieur.

L'influence de la frontière à 670 km sur le mode de convection est encore mal comprise. L'interprétation des observations géochimiques nécessite deux réservoirs distincts, l'un appauvri, l'autre primitif (p.e. *Jacobsen et Wasserburg, 1979; Allègre et al., 1996*). Les images tomographiques récentes montrent que les slabs s'accumulent autour de 670 km, défléchissent cette limite et la franchissent par endroits (p.e. *Van der Hilst et al., 1997*). L'origine des points chauds reste controversée, mais plusieurs arguments indiquent que des panaches proviennent du manteau inférieur. Ces deux derniers points ne prouvent pas pour autant que le manteau convecte en une seule couche. En revanche, ils attestent sans ambiguïté que des transferts de matière locaux et intermittents se produisent entre le manteau supérieur et le manteau inférieur.

Si le manteau supérieur, chauffé à sa base, convecte séparément, une couche limite thermique doit se développer au dessus de l'interface manteau supérieur/manteau inférieur. L'élévation de la température dans cette couche limite doit s'accompagner d'une chute progressive des vitesses sismiques depuis son sommet jusqu'à 670 km. Cet effet est visible sur les modèles numériques isovisqueux. Or, les modèles sismologiques publiés jusqu'à présent n'observent pas de diminution des vitesses sismiques dans la zone de transition. Faut-il en conclure que les modèles tomographiques sont en contradiction avec une convection en deux couches?

La viscosité variable, on l'a vu, réduit considérablement l'amplitude de la couche limite thermique et donc également la diminution des vitesses sismiques. Les résultats du §4.3.4 montrent que les variations de viscosité sont réellement efficaces pour relever le gradient de vitesse. La vitesse de plaque joue également un rôle. Dans le cas d'une vitesse de plaque rapide (5 cm/an), la couche limite reste importante, et il est plus difficile de gommer complètement la chute des vitesses sismiques. Dans la zone de transition, de meilleures valeurs du gradient de vitesse sont obtenues avec une vitesse de plaque de 1 cm/an. Enfin, le calcul de la composition minéralogique à partir du champ de température fait apparaître les phases grenat (tout particulièrement la composante pyrope) en quantité non négligeable dans la zone de transition. Cela augmente sensiblement la vitesse des ondes sismiques qui traversent l'assemblage minéralogique. Au total, les effets conjugués de la viscosité variable et de la minéralogie calculée inhibent la diminution des vitesses prévue par l'augmentation de la température dans la couche limite thermique du bas. Ainsi, les modèles tomographiques ne sont pas nécessairement en contradiction avec l'hypothèse d'une convection en deux couches. C'est l'argument qu'une couche limite thermique en base du manteau supérieur doit se manifester par une chute des vitesses sismiques qu'il faut revoir. Enfin, dans les calculs qui ont été présentés, la seule source de chaleur considérée est le chauffage par la base. Or, une petite quantité de chauffage interne est susceptible de réduire un peu plus l'amplitude de la couche limite. Cela ne peut que renforcer l'indétectabilité de la couche limite thermique par les modèles sismiques.

Conclusion.

Même si les solutions thermiques que nous avons calculées sont géométriquement peu réalistes, elles conduisent à quelques conclusions intéressantes.

Tout d'abord, il faut noter l'influence des conditions limites en surface. Une vitesse imposée en surface permet, en deux dimensions, de maintenir des rouleaux de convection à grand rapport

d'aspect. Sur Terre, cela pourrait conférer une importance toute particulière à la tectonique des plaques. Il reste à comprendre pourquoi sur d'autres planètes, comme Vénus, une tectonique des plaques est absente ou ne s'est pas maintenue.

Ensuite, les distributions d'anomalies de vitesse sismique calculées selon les théories de Grüneisen et de la déformation finie font apparaître des zones d'anomalies positives bien développées au niveau des panaches froids. Les anomalies négatives, au niveau du panaches chauds sont moins prononcées et beaucoup moins étendues. La résolution actuelle des modèles tomographiques n'est probablement pas suffisante pour détecter ces courants ascendants.

Enfin, les champs thermiques, associés à un modèle pétrologique dépendant de la température, permettent de calculer des profils synthétiques de vitesse sismique. Les profils issus de solutions à viscosité variable s'accordent bien avec les modèles sismiques de référence. De plus, les profils à viscosité variables montrent qu'une couche limite thermique peu passer sismiquement inaperçue.

Une suite logique de ce travail est de prendre en compte le couplage manteau supérieur/manteau inférieur, donc à tenir compte de la transition de phase à 670 km.

Chapitre 5

Application aux satellites de glace.

Le temps et les glaces sont maîtres.
(Proverbe Eskimo).

Sommaire

Introduction	173
5.1 Les satellites de glaces	173
5.1.1 Généralités et paramètres physiques	173
5.1.2 Caractéristiques de surface	176
5.1.3 Les premiers stades de l'évolution	177
5.2 Quelques propriétés de la glace	180
5.2.1 Courbe de fusion de la glace	180
5.2.2 Rhéologie de la glace I	184
5.2.3 Choix de la loi de viscosité. Autres paramètres	186
5.3 Convection dans l'enveloppe de glace I	187
5.3.1 Satellite générique	188
5.3.2 Saut de température dans la couche limite thermique du bas	189
5.3.3 Viscosité constante. Importance de la viscosité variable	191
5.3.4 Le nombre de Rayleigh et l'apparition de la convection	191
5.3.5 Le flux de chaleur et l'existence d'un océan sous l'enveloppe de glace	192
5.3.6 Epaisseur de la lithosphère	193
5.3.7 La fraction de silicates et le flux de chaleur disponible	194

5.4 Les paramètres du modèle	197
5.4.1 Energie d'activation et viscosité de référence	197
5.4.2 Température de surface	199
5.4.3 Rayon et densité	200
5.4.4 Paramétrisation du flux de chaleur	201
5.4.5 Composition de l'océan	203
5.4.6 Fraction de silicates et flux de chaleur radioactif	207
5.5 Discussion: planétologie comparée	209
5.5.1 Fraction de silicates, masse volumique et flux de chaleur radioactif	209
5.5.2 Convection dans la couche de glace I	211
5.5.3 Ganymède et Callisto	215
Conclusion	217

Introduction.

Loin du Soleil, les éléments volatils ont pu recondenser et entrer dans la composition des planètes géantes et de leurs satellites. Ceux-ci, très nombreux, sont de morphologie et de composition diverses. Certains sont entourés d'une calotte de glace de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur. Cette enveloppe de glace doit transférer en surface la chaleur issue du noyau de silicates. Les paramétrisations à viscosité variable obtenues dans le chapitre 3 permettent de contraindre l'existence de la convection et la quantité de chaleur qui peut être transportée par ce phénomène, en fonction des propriétés des satellites. Le but de ce chapitre est de regarder l'influence des paramètres de la loi de viscosité et des propriétés du satellite sur la convection dans l'enveloppe de glace I.

5.1 - Les satellites de glace.

5.1.1 - Généralités et paramètres physiques.

Les planètes géantes se distinguent des planètes telluriques par leur taille, leur composition, et leur position dans le système solaire. Autre différence notoire, elles sont accompagnées d'un cortège de satellites, de formes et de dimensions très variées, alors que les planètes telluriques ne possèdent en général pas de satellites de grande taille. Le cas du couple Terre/Lune fait figure d'exception, et son origine est toujours sujette à discussion. Les systèmes des planètes géantes reproduisent en miniature la structure du système solaire, et des scénarios de nébuleuses planétaires ont été développés pour expliquer cette analogie (*Safronov, 1972; Lunine et Stevenson, 1982*). Il est par exemple intéressant de noter que dans le système jovien, la densité moyenne des satellites décroît avec la distance à Jupiter (table 5-1). Dans une nébuleuse planétaire où le profil de température décroît également du centre vers la périphérie, les éléments les plus volatils ne peuvent se condenser qu'au delà d'une certaine limite. Les premiers modèles de structures internes se basent sur les caractéristiques physiques accessibles (densité et rayon), puis sur les observations des missions spatiales (*Reynolds et Cassen, 1979; Cassen et al., 1981; Schubert et al., 1981*).

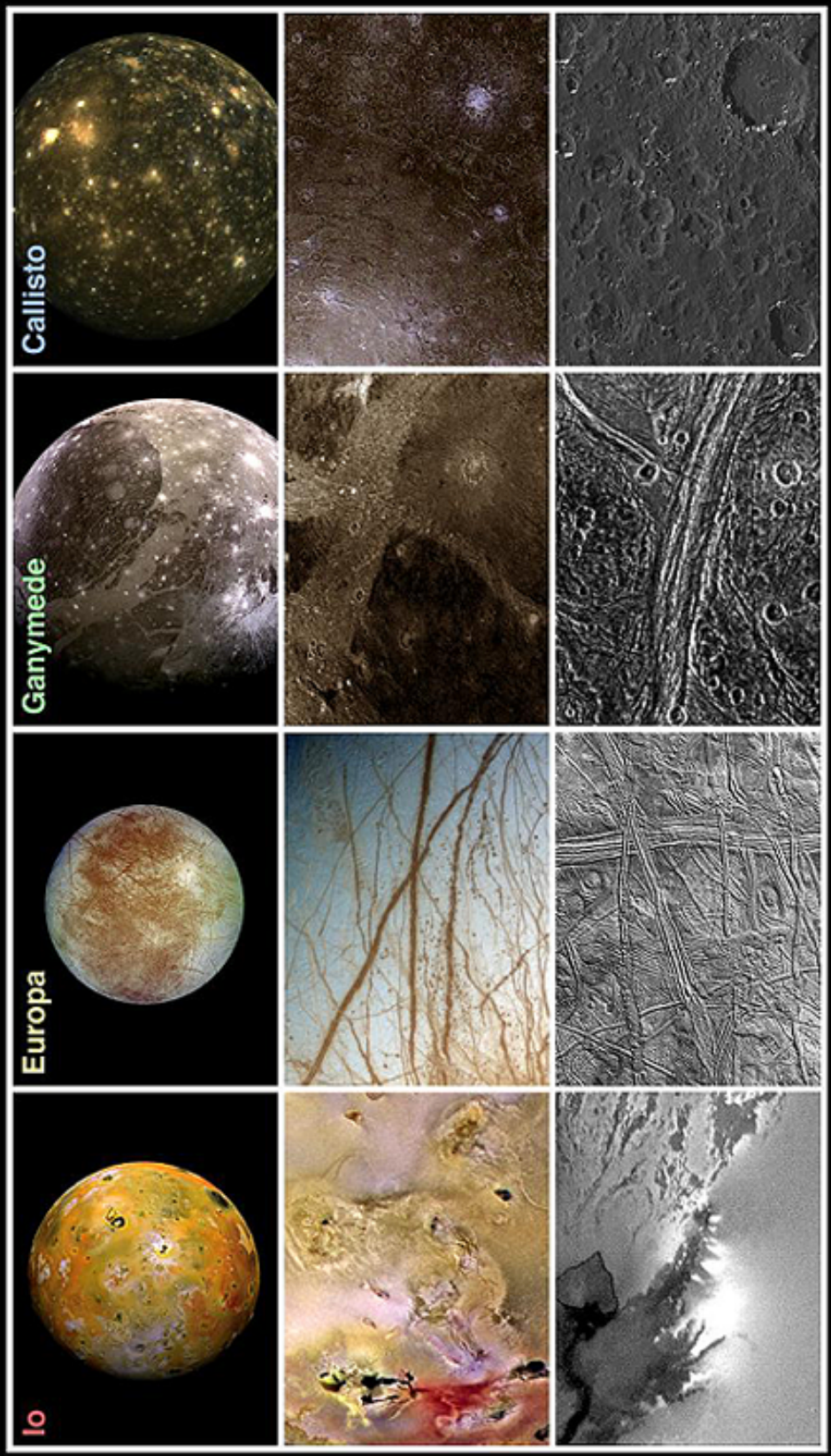
Io a une densité légèrement plus élevée que la Lune, ce qui en fait un corps principalement rocheux et éventuellement pourvu d'un noyau de fer (*Cassen et al., 1981; Schubert et al., 1981*). Sur Io, les sondes Voyager 1 et 2 ont révélé un volcanisme très actif. Io est très proche de Jupiter. Trop proche. Les forces de marées qu'il subit sont suffisantes pour fondre partiellement le

manteau de silicates. La présence d'un noyau de Fer reste hypothétique, mais les données récentes envoyées par la sonde Galiléo indiquent que Io possède un champ magnétique propre. La densité d'Europe, plus faible, autorise la présence d'une fine couche de glace (~100 km) en surface (Cassen *et al.*, 1981). La chaleur libérée par les frictions due aux forces de marées pourrait être suffisante pour fondre la base de cette enveloppe de glace.

Planète	Satellite	Diamètre		g (m/s ²)	Masse		Densité (g/cm ³)	J=C/Ma ² (1,2)
		(km)	(Lune=1)		(10 ²³ kg)	(Lune=1)		
Jupiter	Io	3630	0,97	1,80	0,89	1,20	3,57	?
	Europe	3138	0,84	1,30	0,48	0,65	2,97	0,347
	Ganymède	5268	1,41	1,42	1,48	2,00	1,94	0,311
	Callisto	4806	1,28	1,24	1,08	1,46	1,86	0,367
Saturne	Titan	5150	1,37	1,35	1,34	1,81	1,88	?
Neptune	Triton	2710	0,72	0,77	0,21	0,28	2,05	?
	Satellite générique	5000	1,34	1,33	1,24	1,67	1,90	-

Table 5-1. Caractéristiques physiques des principaux satellites des planètes géantes. Les caractéristiques d'un satellite générique (§5.3.1) sont également précisées. ⁽¹⁾ D'après Galiléo. ⁽²⁾ Lune=0,392; Terre=0,334.

De densité encore plus faible ($\rho_m \sim 1,9 \text{ g/cm}^3$), Callisto, Ganymède, Titan et Triton sont à priori plus riches en glaces. L'eau est le principal constituant de ces glaces, mais d'autres volatils (particulièrement NH_3 et CH_4) présents dans la nébuleuse planétaire pourraient contribuer pour 10 à 20% du volume des glaces. Sur Callisto, Ganymède et Triton, une couche de glace superficielle a été observée en spectroscopie et par les sondes Voyager. Ganymède est différencié en un manteau rocheux (silicates), une couronne de glace et de silicates et une enveloppe de glace (Cassen *et al.*, 1981; Schubert *et al.*, 1981). La faible valeur du moment d'inertie mesurée par Galiléo (table 5-1) suggère l'existence d'un noyau de fer. Callisto a approximativement les mêmes dimensions que Ganymède, mais sa surface, très âgée, est incompatible avec une tectonique de surface récente. Schubert *et al.* (1981) proposent une structure homogène, de composition proche des météorites (glace et silicates mélangés). Une autre possibilité est que Callisto soit différencié, mais que son évolution ait été beaucoup plus rapide (Cassen *et al.*, 1981). Selon les données les plus récentes de Galiléo, Callisto est différencié, mais la présence d'un noyau ferreux est exclue. L'absence de tectonique de surface ne signifie pas nécessairement l'absence d'une dynamique interne. Il faut aussi tenir compte de l'épaisseur et de la force de la lithosphère.



Les satellites galiléens
Vues générales et détails de surface

Pour Titan, une structure possible, après accrétion et retournement du noyau, a été proposée par *Lunine et Stevenson* (1987). Un noyau de silicate est entouré d'un manteau de glaces haute pression et de cathrates, puis d'une autre enveloppe de glace.

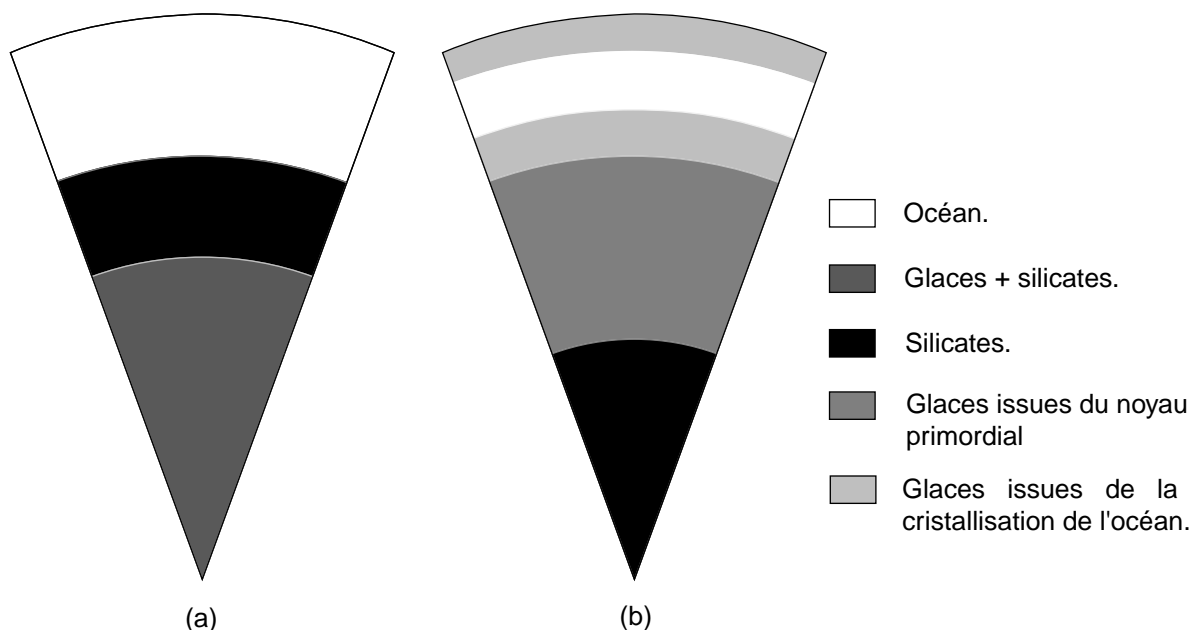


Figure 5-1. Structure interne des satellites de glaces différenciés. Avant (a) et après (b) le retournement du noyau. L'océan cristallise simultanément par le haut (glace I) et par le bas (glace VI). L'enveloppe de glace I peut entretenir des mouvements de convection. D'après *Kirk et Stevenson* (1987).

5.1.2 - Caractéristiques de surface.

Les passages successifs des sondes Voyager 1 et 2, et actuellement la mission Galiléo, ont permis de caractériser les surfaces des satellites des planètes géantes.

Le volcanisme actif d'Io renouvelle constamment la surface de glace SO_2 de ce satellite. Europe a les caractéristiques d'une surface jeune, peu cratérisée et parsemée de rides et de bandes apparemment liées à de l'extension. Deux types de terrains se distinguent à la surface de Ganymède. Des régions sombres et très cratérisées (donc vieilles). Et des terrains plus clairs et plus jeunes, fortement marqués par des structures tectoniques telles que des rides et des fossés. Cet aspect contraste singulièrement avec la surface de Callisto. Très cratérisée, elle est comparable aux highlands lunaires. La surface de Callisto, à priori très âgée, semble être contemporaine de la période de bombardement météoritique intense.

La surface de Titan, le plus gros satellite de Saturne est voilée par une atmosphère riche en azote (90%). L'un des buts de la sonde Cassini-Huygens, lancée le 15 Octobre 1997, est de détecter une éventuelle activité géologique à la surface de Titan. L'origine de l'atmosphère de

Titan est sujette à controverse. Pour *Lunine et Stevenson* (1987), elle est liée au dégazage du noyau profond, donc à une activité volcanique. Pour *Zahnle et al.* (1992), elle résulte d'impacts cométaires.

Triton possède également une atmosphère d'azote, mais plus ténue. Les images transmises par *Voyager 2* montrent une surface marquée par une activité géologique récente, ce qui est surprenant pour un corps de cette taille.

Une explication de l'activité tectonique observée sur Ganymède est la convection de l'enveloppe superficielle de glace I. Mais cela pose un autre problème. Pourquoi Callisto, qui est de taille et de masse comparable à Ganymède, ne présente pas d'activité tectonique récente? Nous verrons que la convection dans la couche de glace I est très sensible à d'autres paramètres que la densité et le rayon (fig. 5-1).

5.1.3 - Les premiers stades de l'évolution.

Les modèles de formation des satellites de glace reproduisent les modèles d'accrétion proposés pour la formation des planètes. Aux distances des planètes géantes, les planétésimaux de la nébuleuse planétaire sont composés de grains de silicate et des matériaux plus volatils, tels que les glaces (H₂O, NH₃ et CH₄).

- *Le profil thermique d'accrétion.* Lors de l'accrétion des satellites, une partie de l'énergie cinétique amenée par les planétésimaux est convertie en chaleur, et réchauffe la surface. A partir du modèle de *Safronov* (1972), et en supposant que l'accrétion a été rapide et homogène, il est possible de calculer un profil thermique d'accrétion (p.e. *Schubert et al.*, 1981),

$$T(r) = h \frac{GM(r)}{C_p r} \left[1 + \frac{rV^2}{2GM(r)} \right] + T_e, \quad (5-1)$$

où h est la fraction d'énergie cinétique convertie en chaleur, V la vitesse des planétésimaux, C_p la capacité calorifique et T_e la température dans la nébuleuse primitive. Le terme $GM(r)/rV^2$ est compris entre 3 et 5 (*Safronov*, 1972). Dans le cas des satellites de glace, $0,1 \leq h \leq 0,5$ et $C_p = 1,8$ kJ/kg/K (*Schubert et al.*, 1981). La masse $M(r)$ est calculée à partir de la densité moyenne ρ_m . Le profil thermique d'accrétion permet de contraindre la structure primordiale des satellites : seuls les corps les plus grands ont pu être initialement différenciés. Les corps plus modestes ont une composition homogène, analogue à celle des planétésimaux. Il permet également d'estimer la fraction de silicates x_s retenue dans le satellite (§5.3.5).

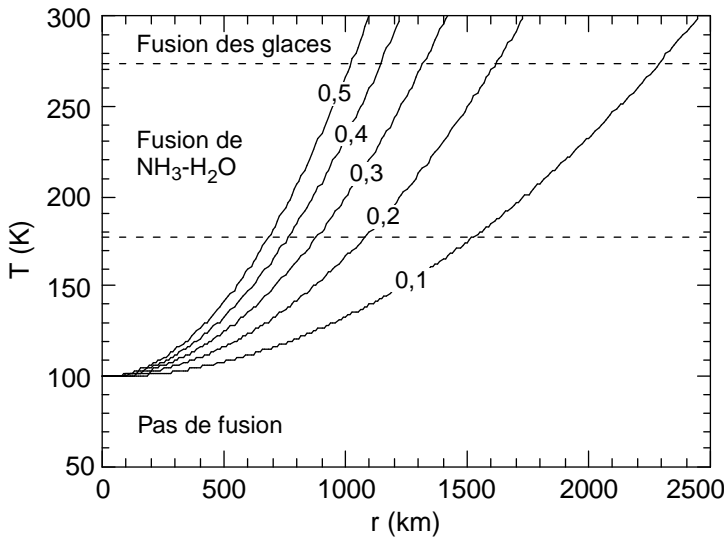


Figure 5-2. Profils thermiques d'accrétion pour différentes valeurs de h . Les températures de fusion à $p=0$ des glaces et du système $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ sont représentées. $C_p=1,8 \text{ kJ/kg/K}$, $\rho_m=1900 \text{ kg/m}^3$, $T_e=100 \text{ K}$, et $\text{GM}(r)/rV^2=4$.

La figure 5-2 représente $T(r)$ pour $0,1 \leq h \leq 0,5$, dans le cas d'un satellite de densité $\rho_m=1900 \text{ kg/m}^3$, et en supposant $T_e=100 \text{ K}$. A partir d'un certain rayon, la température est suffisamment élevée pour assurer la fusion des planétésimaux qui tombent en surface. Lorsque seulement 10% de l'énergie cinétique est libérée sous forme de chaleur, seule une petite enveloppe ($\sim 200 \text{ km}$) est liquide. Mais pour $h=0,4$, c'est plus de la moitié du satellite qui est initialement fondue.

Il est important de noter qu'un océan initial apparaît d'autant plus facilement que la température de la nébuleuse planétaire est élevée. Dans cet océan primordial, les grains de silicate contenus dans les planétésimaux restent solides. Plus lourds, ils tombent progressivement à la surface du noyau solide, réduisant l'épaisseur de l'océan.

- *La structure primordiale.* Juste après l'accrétion, et quelsoit $0,1 \leq h \leq 0,5$, le satellite est différencié en trois enveloppes: un noyau dont la composition est proche de celle des planétésimaux, une couronne de silicates, et un océan d'eau et (éventuellement) d'autres volatils (NH_3 et CH_4) (fig. 5-1). Les limites entre ces enveloppes vérifient le système d'équations (Mueller et McKinnon, 1988)

$$\begin{cases} \rho_m R^3 = \rho_5 r_5^3 + \rho_4 (r_4^3 - r_5^3) + \rho_2 (R^3 - r_4^3) \\ x_s = \frac{M_{\text{silicates}}}{M_{\text{satellite}}} = \frac{x \rho_5 r_5^3 + \rho_4 (r_4^3 - r_5^3)}{\rho_m R^3} \\ \rho_5 = \frac{1}{x/\rho_4 + (1-x)/\rho_I} \end{cases}, \quad (5-2)$$

où R , r_4 et r_5 sont les rayons du satellite, de la couronne de silicate et du noyau, ρ_m est la densité moyenne du satellite, ρ_I , ρ_2 , ρ_4 , et ρ_5 celles de la glace, de l'océan initial, de la couronne de silicates et du noyau, x_s est la fraction de silicate totale et x , la fraction de silicate des

planétésimaux. Pour simplifier, on supposera que $x_s \sim x$. En toute rigueur, $x < x_s$, car une partie des volatils contenus dans les planétésimaux est perdue par l'atmosphère au moment de l'accrétion. L'approximation $x_s \sim x$ a pour conséquence de modifier la valeur des rayons r_4 et

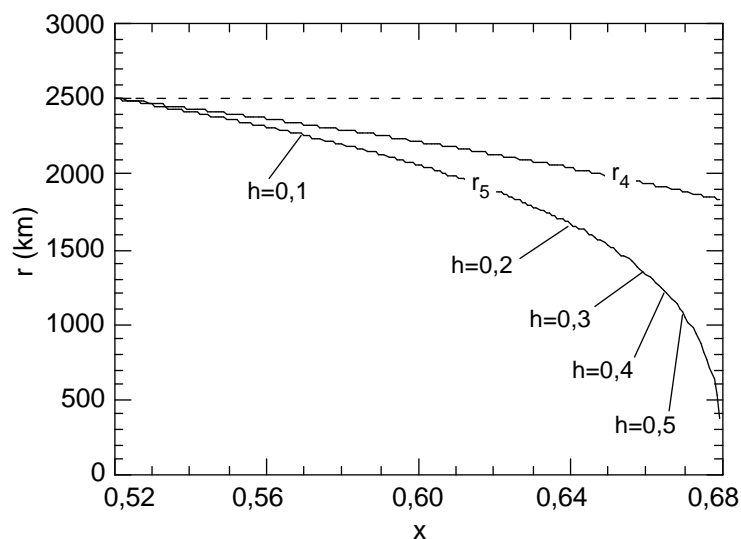


Figure 5-3. Rayons du noyau différencié (r_5) et de la couronne de silicates (r_4) en fonction de la fraction massique de silicates, x_s , en utilisant les équations de *Mueller et McKinnon* (1988). Calculs effectués pour: $R=2500$ km, $\rho_m=1900$ kg/cm³, $\rho_1=917$ kg/cm³, $\rho_2=1000$ kg/cm³, $\rho_4=3300$ kg/cm³, et $\rho_5=1300$ kg/cm³.

r_5 , quantités dont on ne se servira pas dans la suite de ce travail.

Dans le cas du satellite générique ($R=2500$ km et $\rho_m=1900$ kg/m³, cf §5.3.1), et en utilisant les valeurs de ρ_1 , ρ_2 , ρ_4 , et ρ_5 compilées par *Grasset et Sotin* (1996), une solution du système (5-2) est proposée sur la figure 5-3. Par recoupement avec la figure 5-2, il est possible d'estimer la fraction de silicate étant donnée une valeur de h (voir aussi §5.3.5).

- *Le retournement du noyau et la phase conductive.* La structure primordiale n'est pas stable, les silicates étant plus denses que les glaces du noyau. Le retournement n'est possible que si la couronne de silicates est suffisamment fracturée. Le scénario proposé par *Kirk et Stevenson* (1987) repose sur la fusion partielle du noyau par chauffage radioactif, qui induit une variation de volume capable de fracturer la couronne de silicates. Les silicates chutent dans le noyau profond, et chassent les glaces qui remontent à la surface du noyau. *Grasset et Sotin* (1996) estiment la durée du retournement du noyau à environ 7×10^8 ans. Enfin, *Kirk et Stevenson* (1987) notent que ce retournement n'est probablement pas à l'origine de l'activité tectonique de surface.

En surface, le refroidissement de l'océan primordial débute par une phase conductive. Dès que la température descend sous le point de fusion des glaces à pression nulle, l'océan cristallise. La couche de glace I s'épaissit au fur et à mesure que l'océan se refroidit. Simultanément, l'océan cristallise par sa base. Lorsque l'épaisseur de la glace I atteint une valeur critique, la convection peut démarrer. En tenant compte de la cristallisation par le bas, et en appliquant la conservation de l'énergie à l'océan, *Grasset et Sotin* (1996) montrent que l'épaisseur de glace I induite par le refroidissement conductif passe par un maximum, puis tend vers une asymptote. Si la couche de

glace I est trop épaisse, le flux de chaleur ne parvient pas à refroidir le noyau de silicates. Le maximum d'épaisseur de la couche de glace I est de l'ordre de 50 km pour un océan d'eau pure, et 35 km pour un mélange H₂O-NH₃.

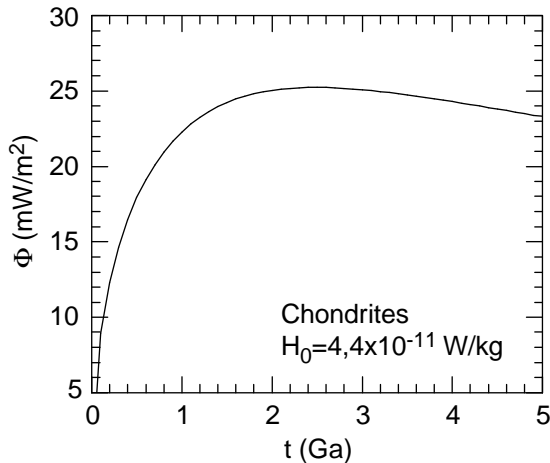


Figure 5-4. Flux de chaleur à la base de l'océan initial, d'après Kirk et Stevenson (1987).

Il est important de connaître le flux de chaleur réellement disponible à la base de l'enveloppe de glace. Ce flux est inférieur au flux de chaleur issus de la désintégration des radioéléments du noyau de silicates. En effet, le mode de transport thermique dans le noyau ne transfère pas intégralement l'énergie libérée dans le noyau. Pour estimer la perte due au transfert de chaleur dans la couronne de silicates avant le retournement du noyau, Kirk et Stevenson (1987) calculent l'élévation de température de la

couronne de silicates liée au chauffage radioactif et en déduisent une expression du flux de chaleur au sommet du noyau de silicate en fonction du temps (Φ_c),

$$\Phi_c(t) = 2\sqrt{\frac{\kappa_c t}{\pi}} \rho_c H_0 \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t}, \quad (5-3)$$

où κ_c et ρ_c sont la diffusivité thermique et la densité du noyau de silicates, H_0 le puissance radioactive dégagée par unité de masse et λ la constante de désintégration radioactive. Ce flux de chaleur est indépendant des propriétés du satellite, en particulier de sa densité moyenne. Ce calcul suppose que le transport de la chaleur au sommet de la couronne de silicate est conductif. L'évolution de Φ_c est représentée sur la figure 5-4. Le flux de chaleur augmente rapidement pendant 1,5 milliard d'années jusqu'à 25 mW/m², puis il diminue lentement après $t=2,5$ Ga. Ainsi, la couche de glace I doit être capable d'évacuer un flux de chaleur d'environ 25 mW/m².

5.2 - Quelques propriétés de la glace.

5.2.1 - Courbe de fusion de la glace.

Le liquidus de la glace I a une propriété intéressante: il décroît avec la pression, jusqu'à la transition glace I → glace III. Ensuite, pour les glaces haute pression (phases III, V et VI), la pente de Clapeyron redevient positive. Cette propriété permet à l'océan de cristalliser simultanément par

sa surface et par sa base. Elle a aussi une conséquence sur la convection dans la couche de glace I. Le nombre de Rayleigh n'est pas nécessairement une fonction croissante de l'épaisseur de cette enveloppe.

- *Eau pure.* Le liquidus de l'eau pure est approché par la relation empirique

$$T = T_0 \left[\left(\frac{P - P_0}{a} \right) + 1 \right]^{1/c} \quad (5-4)$$

Les points de référence (P_0, T_0) et les coefficients a et c utilisés dans ce travail ont été calculés

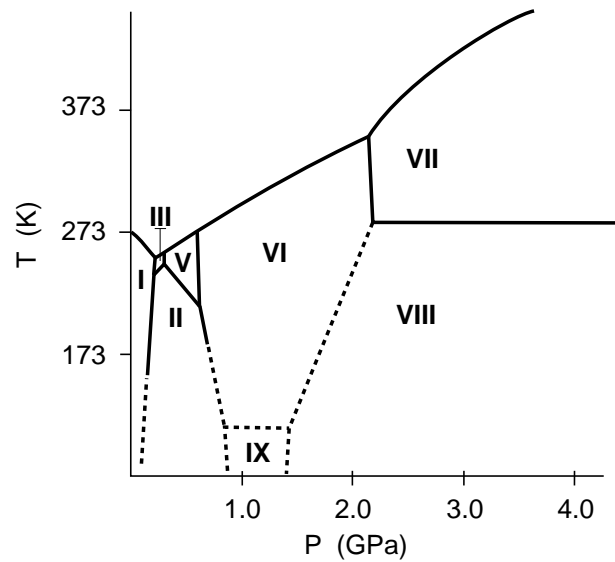


Figure 5-5. Courbe de fusion des glaces haute pression, calculés avec les coefficients de Chizhov (1993).

par Chizhov (1993) (table 5-2, et figure 5-5). La transition vers la glace III a lieu autour de $P=0,207$ GPa. Dans les conditions des satellites de glace ($g=1,33$ m²/s pour le satellite générique) il peut exister une enveloppe de glace I jusque ~ 200 km.

Phase	P_0 (MPa)	T_0 (K)	a (MPa)	c
I	0	273,16	-395,2	9,0
III	207	251,15	62	60
V	346	256,15	410	8,1
VI	625	273,31	707	4,46

Table 5-2. Coefficients du liquidus de la glace d'eau pure (équation 5-1), d'après Chizhov (1993).

- *Mélange H₂O/NH₃.* La présence de phases hydratées modifie le liquidus de la glace en le décalant vers des températures plus faibles. Lors de la cristallisation couche de glace I à partir d'un océan initial NH₃-H₂O, on ne connaît pas à priori le taux de NH₃ dans l'océan. Celui-ci augmente lorsque l'enveloppe de glace s'épaissit. Seule l'eau pure cristallise, et le NH₃ reste dans l'océan. Lorsque l'eutectique est atteint, l'hydrate d'ammonium cristallise. Le diagramme de phase du système NH₃-H₂O peut être approché à partir de liquidus connus, obtenus pour des taux de NH₃ fixes, et d'une interpolation polynômiale. Un premier pôle est le liquidus de l'eau pure, définie précédemment. Grasset et al. (1995) ont proposé un liquidus pour 15% de NH₃ en volume, a été contraint jusqu'à 1,5 GPa par (fig. 5-6). Il est approché analytiquement par

$$\begin{cases} T_m = 253 - 85,1 \cdot P - 281,8 \cdot P^2 & P \leq 0,21 \text{ GPa} \\ T_m = 193,5 + 149,8 \cdot P - 50,5 \cdot P^2 & P \geq 0,21 \text{ GPa} \end{cases} \quad (5-5)$$

où les pressions sont en GPa et les températures en K. Enfin, *Hogenboom et al. (1997)* ont déterminé le liquidus pour une composition eutectique (32,1 % de NH₃) (fig. 5-7),

$$T_m = 176,29 + 24,3 \cdot P - 77,583 \cdot P^2 \quad (5-6)$$

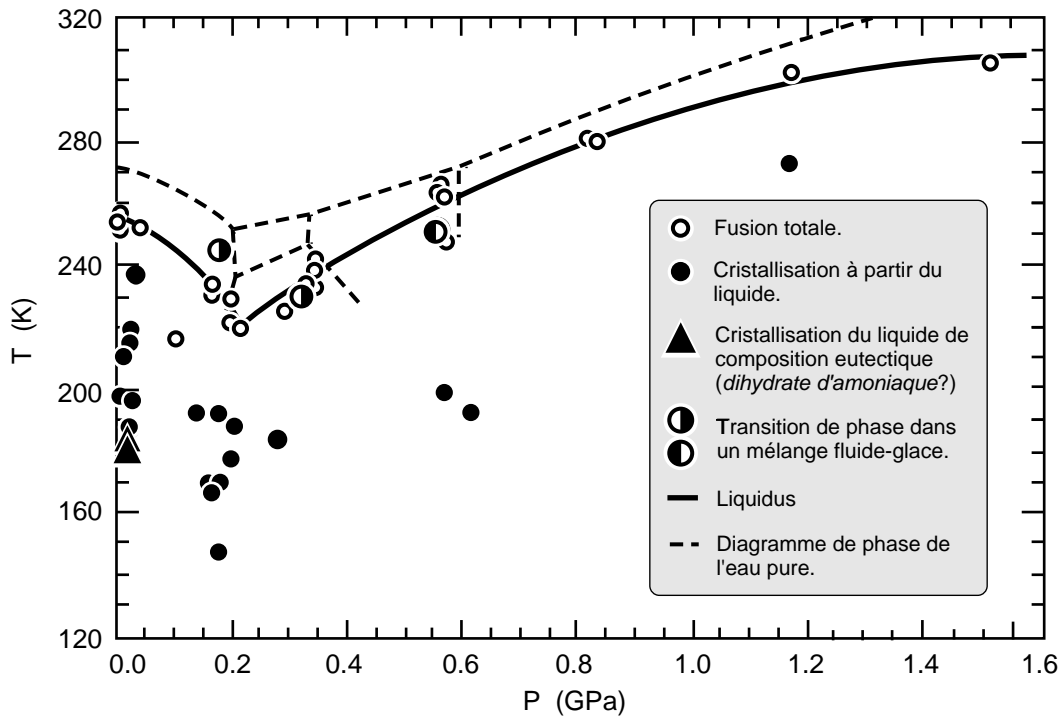


Figure 5-6. Diagramme de phase du mélange 15% NH₃-85% H₂O, d'après *Grasset et al. (1995)*.

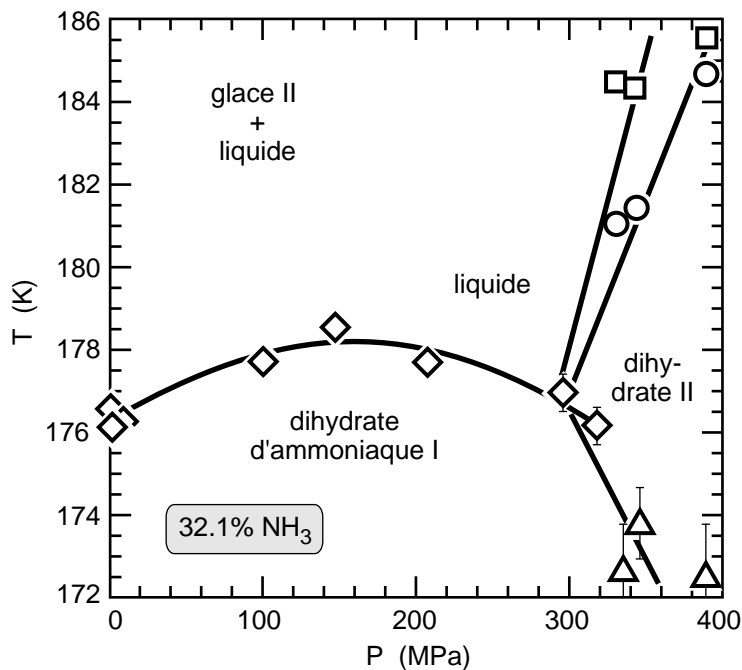


Figure 5-7. Diagramme de phase du mélange NH₃-H₂O à l'eutectique, d'après *Hogenboom et al. (1995)*.

Au delà du point triple, les expériences d'Hogenboom *et al.* (1997) suggèrent un Clapeyron de $\Gamma \sim 0,011$ GPa/K. La figure 5-8 représente le liquidus d'un mélange H₂O-NH₃ pour une teneur initiale en ammoniaque de 15%. L'enrichissement en NH₃ tient compte de la cristallisation de glace VI à la base de l'océan. La température au sommet de la glace VI est déterminée à partir de la température à la base de la glace I, et en supposant que le profil thermique dans l'océan est adiabatique. L'eutectique (T~177 K) est atteint pour une pression P~0,09 GPa (soit z~70 km pour le satellite générique).

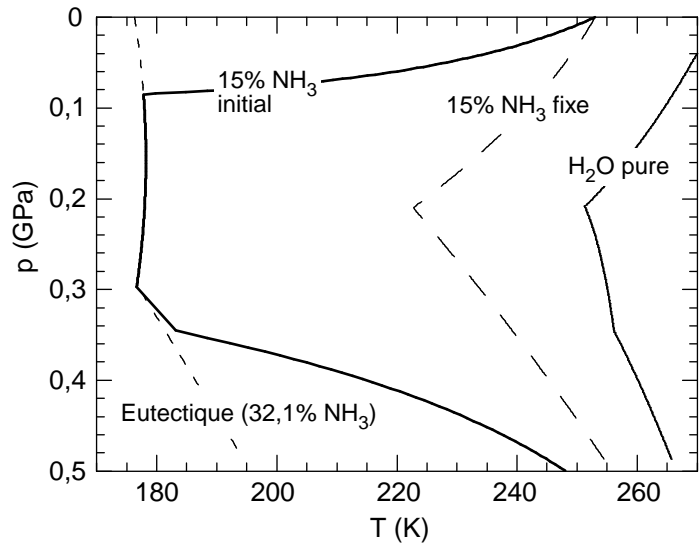


Figure 5-8. Liquidus pour une composition initiale de 15% de NH₃. Le liquidus de l'eau pure (Chizhov, 1993), 15% NH₃ fixe (Grasset *et al.*, 1995) et 32,1% de NH₃ (Hogenboom *et al.*, 1996) sont représentés. Ils servent de base à l'interpolation polynômiale calculant le liquidus composite.

- *Conséquences sur le nombre de Rayleigh.* La température à la base de la couche de glace I intervient directement et indirectement dans le nombre de Rayleigh. A température de surface fixée, elle contrôle le saut de température. Mais, comme on l'a vu dans le chapitre 3 (§3.5.5), elle

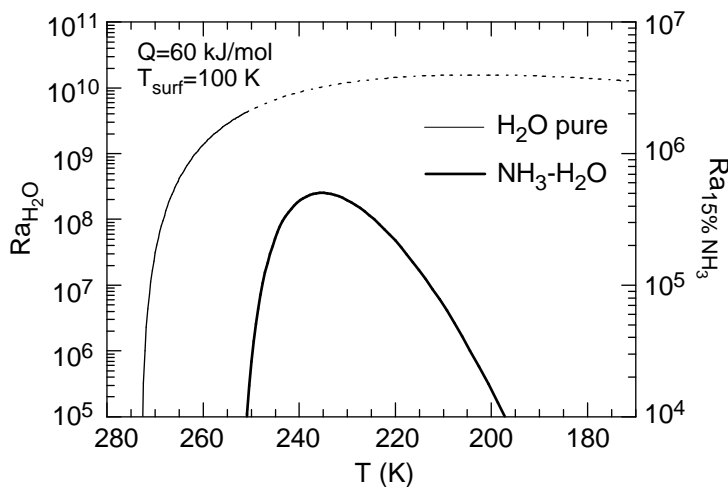


Figure 5-9. Nombre de Rayleigh en fonction de la température à la base de l'enveloppe de glace I. La portion pointillée du nombre de Rayleigh de l'eau pure représente le prolongement virtuel du liquidus de la glace I au delà de P=0,207 GPa. Valeurs des paramètres: Q=60 kJ/mol, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s et $T_{surf}=100$ K (eau pure); Q=40 kJ/mol, $\mu_0=10^{12}$ Pa.s et $T_{surf}=100$ K (NH₃-H₂O).

intervient aussi dans le calcul de la température du cœur isotherme et de la viscosité. Il est alors intéressant de tracer les variations du nombre de Rayleigh en fonction de la profondeur, ou ce qui revient au même, en fonction de la température à la base de couche de glace I (fig. 5-9). Pour cela, on ne considère que le liquidus de la glace I, en le prolongeant si besoin est au delà de la transition I→III. Dans le cas de l'eau pure, le nombre de Rayleigh

croît jusqu'à la limite de la glace ($T \sim 251$ K et $z \sim 170$ km). Si on prolonge le liquidus de la glace I au delà de cette limite, il apparaît un maximum, qui n'a ici aucune signification physique. En revanche, pour un mélange initialement à 15% de NH_3 , le nombre de Rayleigh passe par un maximum vers 235 K (~ 30 km) avant d'atteindre l'eutectique ($T \sim 177$ K et $z \sim 70$ km). La présence de NH_3 impose une profondeur maximum à la convection.

5.2.2 - Rhéologie de la glace.

La glace est un matériau particulièrement dur et résistant. A basse température (< 200 K) et basse pression (< 100 MPa), elle a un comportement cassant tant que le taux de déformation est supérieur à $4 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ (Poirier, 1982). La déformation plastique intervient pour des pressions plus élevées, ou à des taux de déformation plus lents. Si on ne tient pas compte de la taille de grain, la loi de fluage de la glace peut s'exprimer en fonction de la température T , de la pression p et des contraintes σ par (p.e. Goodman et al., 1981; Weertman, 1983)

$$\dot{\epsilon}(T, p, \sigma) = A \sigma^n \exp\left(-\frac{Q + pV}{RT}\right), \quad (5-7)$$

où Q est l'énergie d'activation à pression nulle, V le volume d'activation, n l'exposant des contraintes et A une constante.

La glace I peut fluer par diffusion ($n=1$) ou par migration de dislocations ($n>1$). Le taux de déformation est égal à la somme des taux de déformation par diffusion et par dislocation. C'est le processus le plus rapide qui contrôle la déformation. Des cartes de déformation en fonction de la température, des contraintes et de la taille de grain permettent de définir le domaine dans lequel chaque processus est dominant (Goodman et al., 1981). La diffusion est prépondérante pour des petites températures, des grains de petite taille et des taux de déformation lents.

La diffusion est rarement observée dans les expériences de laboratoire. La majorité des études trouvent des exposants compris entre 3 et 4 (Goodman et al., 1981; Weertman, 1983). Les taux de déformation considérés dans ces études (en général 10^{-8} à 10^{-4} s^{-1}) sont rapides par rapport au taux de déformation de la diffusion ($\sim 10^{-10} \text{ s}^{-1}$), ce qui favorise le fluage par dislocation. Par ailleurs, les grains de la glace naturelle sont assez gros, de l'ordre du millimètre.

Les résultats des études *in situ* sont contradictoires. Nye (1953) utilise des données relatives à la fermeture d'un tunnel creusé dans le glacier de la Jüngfrau et déduit $n=3$. Pour une expérience analogue (mesure de la vitesse d'écoulement du glacier de la Jüngfrau), Gerrard et al. (1952) trouvent $n=1,5$. Dans ces expériences, le taux de déformation est compris entre 10^{-10} à 10^{-8} s^{-1} .

Quant aux satellites de glace, on ne dispose évidemment pas de mesure *in situ* à l'heure actuelle. *Durham et al.* (1997) suggèrent un taux de déformation caractéristique de l'ordre de 10^{-11} s^{-1} , donc plus favorable à la diffusion. *Kirby et al.* (1985), puis *Durham et al.* (1992,1997), ont

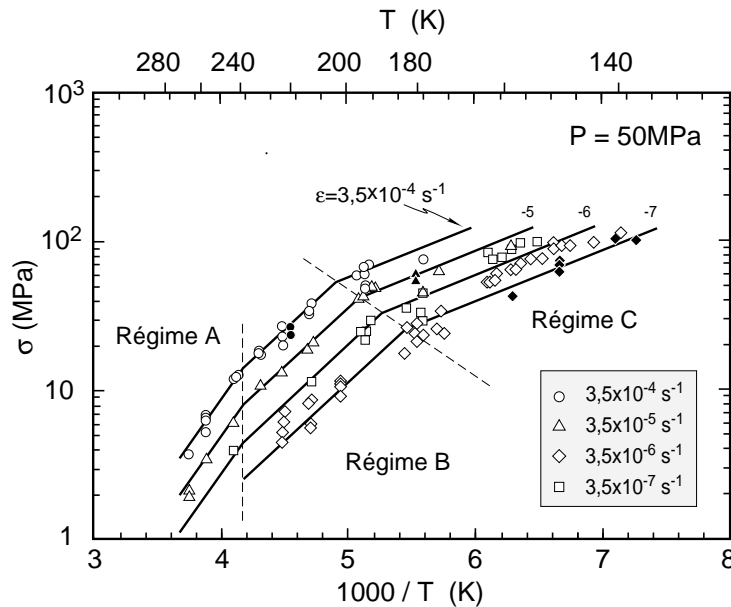


Figure 5-10. Trois régimes de fluage de la glace, en fonction de la température (*Durham et al.*, 1997).

réalisé des expériences de fluage par dislocation de la glace I haute pression, dans les conditions de température et de pression des satellites de glace. Ces expériences mettent en évidence trois régimes distincts en fonction de la température (fig. 5-10, table 5-3), l'énergie d'activation variant selon le régime. Pour le régime intermédiaire, $195 \leq T \leq 240 \text{ K}$, et $Q = 61 \pm 2 \text{ kJ/mol}$. Selon *Durham et al.* (1997), le régime de plus faible température est peu probable dans le cas des

satellites de glaces. La température critique entre ce régime et le régime intermédiaire diminue avec la contrainte appliquée. Pour $\sigma \leq 1 \text{ MPa}$, elle vaut 125 K. Le régime de basse température n'est prépondérant que pour des taux de déformation de l'ordre de 10^{-20} s^{-1} .

T (K)	A (MPa ⁻ⁿ s ⁻¹)	n	Q (kJ/mol)	V (cm ³ /mol)
240-258	11,8±0,4	4,0±0,6	91±2	-13
195-240	5,1±0,03	4,0±0,1	61±2	-13±3
≤195	-3,8	6,0±0,4	39±5	-13

Table 5-3. Les trois régimes de fluage de la glace I, d'après *Durham et al.* (1997). Pression de confinement: p=50 MPa; Taux de déformation: $3,5 \cdot 10^{-7} \cdot \dot{\epsilon} \cdot 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Les lois de fluage de la glace sont relativement bien connues. Pour des taux de déformation suffisamment petits (comme ceux auxquels on s'attend dans les satellites de glace), elles prévoient une déformation par diffusion. Cependant, on connaît encore peu de choses sur les propriétés de la glace I des satellites des planètes géantes. Les expériences actuelles reproduisent bien les conditions de température et de pression existant dans ces satellites, mais pas les taux de déformations attendus. Le cas de figure le plus proche que l'on ai pu étudier *in situ* est celui des

glaciers alpins. Comme on vient de le voir, les mesures de *Gerrard et al.* (1952) suggèrent un comportement newtonien pour de faibles taux de déformation, mais l'étude de *Nye* (1953) est en faveur d'une rhéologie non-newtonienne. Une autre inconnue (de taille) est la dimension des grains. Ce paramètre influence de façon importante le choix du mode de déformation.

5.2.3 - Choix de la loi de viscosité. Autres paramètres.

Dans la suite de ce chapitre, on supposera que la couche de glace I des satellites de glace se comporte comme un fluide newtonien. La viscosité de référence est définie pour une température légèrement supérieure au point de fusion de l'eau, et elle varie avec la profondeur, donc avec la pression. On tient ainsi compte des effets de la pression sur la loi de viscosité. L'équation

$$\mu(T) = \mu_0 \exp\left(\frac{Q + pV}{RT}\right) \quad (5-8)$$

est remplacée par

$$\mu(T) = \mu_0 \exp\left[A\left(\frac{T_m}{T} - 1\right)\right], \quad (5-9)$$

où T_m la température de fusion de la glace à pression donnée. Empiriquement, la définition (5-9) décrit bien la déformation de la glace (*Weertman*, 1968). La constante A est fixée en considérant que le contraste de viscosité entre le sommet (où $T=T_{\text{surf}}$) et la base du fluide est celui qui existe pour une viscosité obéissant à une loi d'Ahrénus. Cette condition est satisfaite si

$$A = Q/RT_m. \quad (5-10)$$

● *Choix de la viscosité de référence.* La valeur de μ_0 est fixée à partir des observations faite sur l'écoulement des glaciers terrestres. Des mesures réalisées à des températures proches du point de fusion et dans la gamme de contrainte $0,1 \leq \sigma \leq 1$ bar suggèrent (*Gerrard et al.*, 1952)

$$\dot{\epsilon} = 3.10^{-16} \sigma^{1,5}, \quad (5-11)$$

ou σ est en Pa. En prenant pour viscosité effective $\mu = \sigma/2\dot{\epsilon}$, on déduit une valeur de la viscosité non loin du point de fusion, $\mu \sim 10^{13}$ Pa.s Cette valeur est reprise dans d'autres études, notamment *Schubert et al.* (1981) et *Mueller et McKinnon* (1988), qui utilisent une loi d'Arrhénius et une viscosité référence de $\mu(T=273 \text{ K})=10^{13}$ Pa.s. Pour autant, cette valeur ne constitue pas une donnée sûre, et il sera intéressant de la faire varier de quelques ordres de grandeur.

● *L'énergie d'activation.* La glace I suit trois régimes de fluage (non-newtoniens), selon la gamme de température (*Durham et al.*, 1997). Près de la surface du satellite ($T_{\text{surf}} \sim 100$ K), c'est le régime intermédiaire qui doit être sélectionné. On a alors $Q \sim 60$ kJ/mol. A la base de la couche de glace I, $T_{\text{base}} \sim 250$ K, et il conviendrait plutôt de prendre $Q \sim 90$ kJ/mol (régime le plus 'chaud'). Globalement, la gamme de température qui convient le mieux aux satellites de glace correspond au régime intermédiaire ($195 \leq T \leq 240$ K). Pour ce régime, l'énergie d'activation est de l'ordre de 60 kJ/mol. Ces valeurs sont celles de fluages non-newtoniens, obtenues pour taux de déformations élevés. Si on considère que l'énergie d'activation correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour franchir la barrière de potentiel existant entre deux sites cristallins, sa valeur doit être relativement indépendante du mécanisme de déformation. Par ailleurs, pour un exposant de contrainte (n) supérieur à 3, il a été proposé (*Christensen*, 1984b) que la loi de puissance est équivalente à une loi newtonienne dont l'énergie d'activation est divisée d'un facteur n . Pour un fluage newtonien, *Mueller et McKinnon* (1988) se basent sur les calculs de *Friedson et Stevenson* (1983) et prennent $Q \sim 60$ kJ/mol. Par ailleurs, *Weertman* (1983) note que cette valeur est aussi celle l'énergie d'activation de la diffusion des atomes d'oxygène et d'hydrogène dans la glace. La valeur de $Q \sim 60$ kJ/mol constitue donc un bon compromis. Comme pour la viscosité de référence, il sera intéressant d'étudier l'influence de l'énergie d'activation. Les autres paramètres de la glace I (densité et paramètres thermiques) sont tirés de *Hobbs* (1974) (Table 5-4).

Quantité physique	Symbol	Unité	Valeur	Référence
Conductivité thermique	k	W/m/K	2,6	<i>Hobbs</i> (1974)
Diffusivité thermique	κ	m ² /s	$1,47 \times 10^{-6}$	<i>Hobbs</i> (1974)
Coefficient d'expansion thermique	α	K ⁻¹	$1,56 \times 10^{-4}$	<i>Hobbs</i> (1974)
Densité	ρ_I	kg/m ³	917	<i>Hobbs</i> (1974)
Viscosité au point de fusion	μ_0	Pa.s	10^{13}	<i>Gerrard et al.</i> (1952) ⁽¹⁾
Energie d'activation	Q	kJ/mol	60	p.e. <i>Durham et al.</i> (1997) ⁽²⁾

Table 5-4. Caractéristiques de la glace I pure. (1) Valeur dérivée de la mesure de l'écoulement du glacier de la Jungfrau. (2) Energie d'activation du régime intermédiaire, pour des températures $195 \leq T \leq 240$ K.

5.3 - Convection dans l'enveloppe de glace I.

A partir des paramétrisations du chapitre 3, il est possible de caractériser la convection dans la couche de glace I. On considère simplement une enveloppe de glace flottant sur de l'eau liquide, et sa capacité à transférer la chaleur vers la surface. Le chauffage interne est issu de l'énergie dissipée par les forces de marée (la glace n'a pas retenu d'éléments radioactifs en quantité

significative), mais il n'a pas été pris en compte dans ce travail. Seul intervient le chauffage par le bas, c'est-à-dire le flux de chaleur issu du noyau de silicate. La température à la base de la couche de glace est égale à la température de fusion de la glace à la pression considérée.

5.3.1 - Satellite générique.

Il est intéressant de définir un satellite type (ou générique) pour étudier l'influence de différents paramètres comme la température de surface, la taille, ou la composition de l'océan initial. Un tel objet peut être défini plus particulièrement pour les satellites de la classe de Callisto et Ganymède. Plus que la dimension, c'est la densité (donc la fraction de silicate) qui définit l'appartenance à cette catégorie. Le satellite générique a une densité moyenne $\rho_m = 1,9 \text{ g/cm}^3$ qui tient compte de l'enrichissement en silicates, et un rayon de 2500 km, valeurs qui correspondent aux moyennes observées dans le système solaire (table 5-1).

La valeur de ρ_m fixe le rayon du noyau de silicate, paramètre qui n'influe pas sur la convection dans la couche de glace superficielle. En revanche, elle contrôle partiellement l'accélération de la gravitation, donc le nombre de Rayleigh de la couche de glace I. De petites variations autour de la densité caractéristique n'induisent pas d'effets notables sur la convection de cette enveloppe. Par contre, il sera intéressant de voir ce que prévoient des variations plus fortes (par exemple un enrichissement en silicates, comme dans le cas d'Europe).

Un rayon de 2500 km est caractéristique de la classe de satellites à laquelle on s'intéresse. Le rayon influe de nouveau sur la valeur de l'accélération de la gravitation. Mais pour les variations de R effectivement observées (de Callisto ~2400 km, à Ganymède ~2600 km) la valeur de g n'est que légèrement modifiée (moins de 7% de la valeur caractéristique). Des variations plus grandes seront considérées afin de tenir compte de satellites comme Triton.

L'accélération de la gravité est donnée en fonction de la densité et du rayon par

$$g = \frac{4}{3} \pi G \rho R,$$

soit, pour un satellite de rayon indéterminé R (en km),

$$g \sim 5,31 \cdot 10^{-4} R.$$

Enfin, on supposera que l'enveloppe externe est composée de glace d'eau pure à la phase I. La température à la base de cette couche est donc donnée par (5-4). *McKinnon* (1997) traite un cas plus général. Il ne fixe pas la valeur du rayon, et prend une densité générique $\rho_m = 1,3 \text{ g/cm}^3$. Cette valeur, déduite de l'équilibre entre les phases carbonées et azotées et du rapport roche/glace-H₂O

prévu par la composition de la nébuleuse planétaire, ne tient pas compte de la présence de satellites plus denses (i.e. enrichis en silicates), ni la composition de la glace I.

5.3.2 - Saut de température dans la couche limite du bas.

Une application des paramétrisations du chapitre 3 concerne le calcul de température \bar{T} du cœur isotherme, dans le cas où la convection de la couche de glace I suit un régime de couvercle. Le

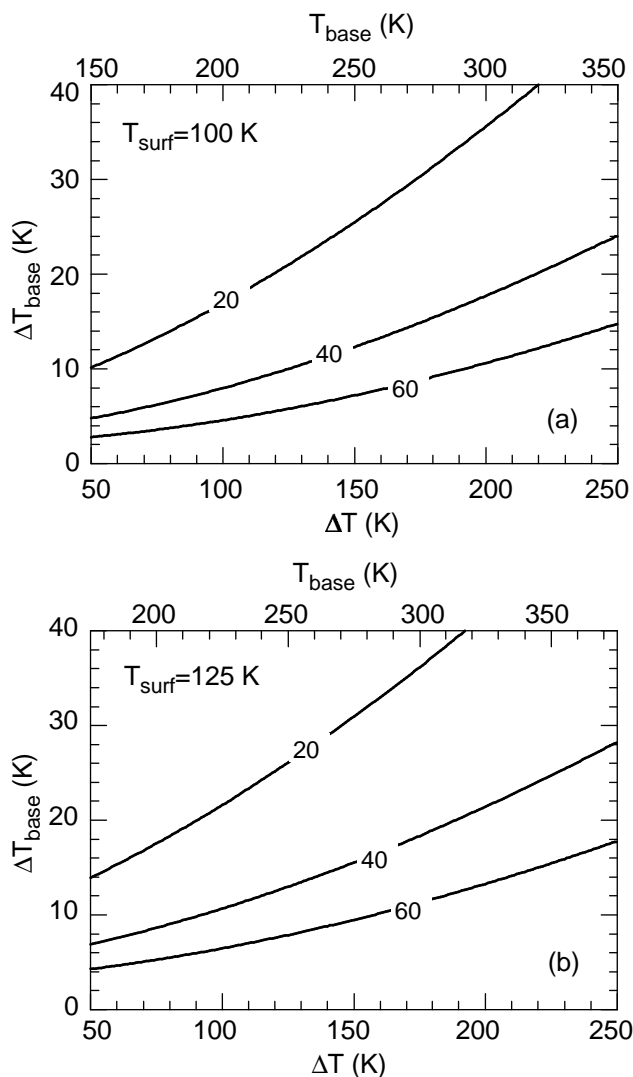


Figure 5-11. Saut de température dans la couche limite thermique du bas, en fonction du saut de température total, et pour différentes énergies d'activation (valeurs indiquées sur les courbes). La température de surface est fixée. (a) $T_{\text{surf}}=100$ K; (b) $T_{\text{surf}}=125$ K.

domaine de validité de ce régime dans le cas des satellites de glace sera précisé plus loin. La température du cœur isotherme (équation 3-20), redimensionnée dans le cas de la loi rhéologique (5-9) est donnée par la relation (3-40) (§3.5.5). Elle ne dépend que des propriétés de la glace I (énergie d'activation, viscosité près du point de fusion) et des températures aux interfaces (T_{surf} et T_{base}). Par contre, elle ne dépend pas des propriétés globale du satellite (densité, rayon).

L'application numérique de (3-40) nécessite de fixer 2 paramètres parmi ΔT , T_{surf} , et T_{base} . L'influence respective de T_{surf} et T_{base} peut être appréhendée en fixant T_{base} ou T_{surf} , et en faisant varier ΔT . Par la suite, T_{base} sera contraint par la température de fusion de la glace I à une profondeur donnée. Les valeurs des constantes c'_1 et c'_2 ont été déterminées par une méthode de moindres carrés (§3.4.5: $c'_1=1,43$ et $c'_2=-0,03$), et trois valeurs de

l'énergie d'activation de la glace I ont été considérées, 20, 40 et 60 kJ/mol. De façon générale, les forts contrastes de viscosité impliquent que de très petites différences de température sont

suffisantes pour initier les instabilités dans la couche limite thermique du bas (fig. 5-11 et 5-12). Le rôle joué par l'énergie d'activation est prépondérant. Le saut de viscosité augmente exponentiellement avec l'énergie d'activation, et la couche limite en est d'autant plus réduite. Une valeur de seulement 20 kJ/mol conduit à un saut de température deux fois plus important que

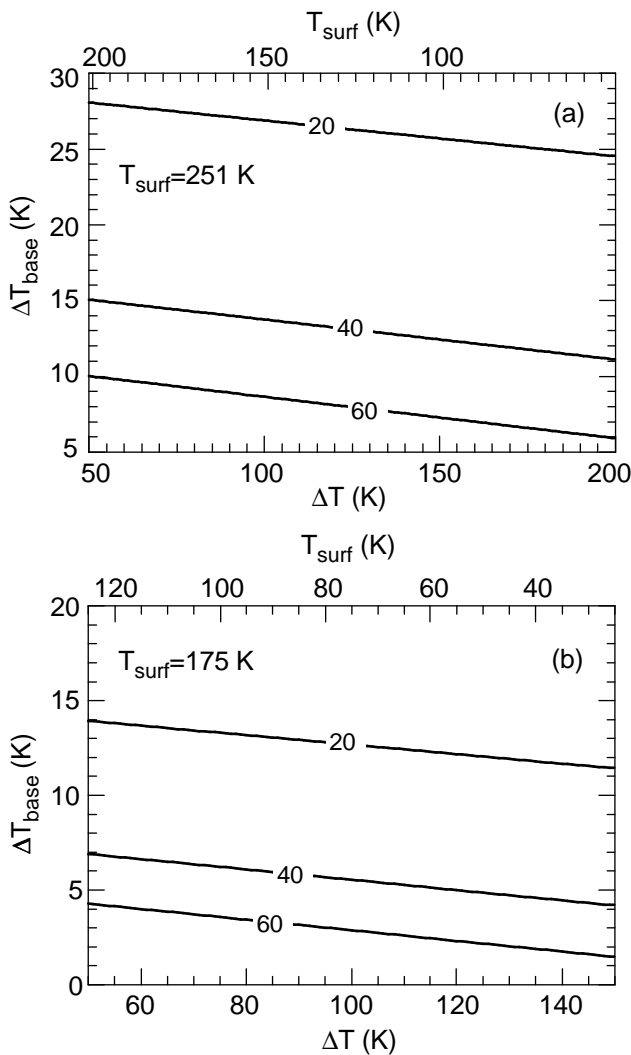


Figure 5-12. Saut de température dans la couche limite thermique du bas, en fonction du saut de température total, et pour différentes énergies d'activation (valeurs indiquées sur les courbes). La température à la base est fixée. (a) $T_{base} = 251$ K; (b) $T_{base} = 175$ K. Ces valeurs correspondent respectivement au minimum du liquidus de l'eau pure et d'un mélange à 15% de NH_3 .

pour une valeur plus réaliste de 60 kJ/mol. Par ailleurs, des valeurs élevées de Q augmentent la viscosité du cœur isotherme, et ont tendance à inhiber la convection dans la couche de glace. Indépendamment de la valeur du volume d'activation, les conditions aux limites de température ont également une influence sur l'épaisseur de la couche limite thermique du bas. Pour une température de surface fixée, une diminution de la température à la base (donc de ΔT) réduit également l'amplitude de la couche limite thermique du bas ΔT_{base} (fig. 5-11). Cet effet est imposé par le redimensionnement. La baisse de T_{base} profite à la couche limite car elle induit un plus faible contraste de viscosité. Par rapport à la formule adimensionnée, ΔT_{base} est une fonction de T_{base} . Le saut de température dans la couche limite résulte alors de la compétition entre les variations de T_{base} et celles de \bar{T} . D'après l'équation (3-40), la différence ΔT_{base} est effectivement une

fonction croissante de T_{base} , \bar{T} diminuant plus rapidement que T_{base} . Ce comportement est important dans le cas de la glace, dont la température de fusion décroît avec la pression. Le long du diagramme de phase de l'eau, on s'attend à une réduction de la couche limite avec la profondeur.

Si c'est T_{base} qui est fixée (fig. 5-12), la compétition entre \bar{T} et T_{surf} joue dans le sens inverse. Le saut de viscosité décroît avec T_{surf} , ce qui profite à la couche limite du bas. La quantité $(\bar{T} - T_{\text{surf}})$ est une fonction décroissante de T_{surf} : \bar{T} diminue moins rapidement que T_{surf} . Le saut de viscosité dans la couche limite du bas augmente avec la température de surface. Pour l'étude du satellite générique, on prendra $T_{\text{surf}}=100\text{K}$. La température à la base est égal à la température de fusion de la glace. Elle est fixée par l'épaisseur de couche de glace et le liquidus de la glace d'eau pure (fig. 5-8).

5.3.3 - Viscosité constante. Importance de la viscosité variable.

Il est intéressant de regarder le flux de chaleur prévu par les lois paramétrisées isovisqueuses. Pour que les comparaisons avec les lois à viscosité variable aient une signification, la température du milieu isotherme a été calculée avec l'équation (3-40) et la loi viscosité (5-9) (notons que si on définit la température par $T=1/2(T_{\text{surf}}+T_{\text{base}})$ et si on utilise la relation 5-9, on obtient des nombres de Rayleigh extrêmement petits). Le nombre de Nusselt est donné par

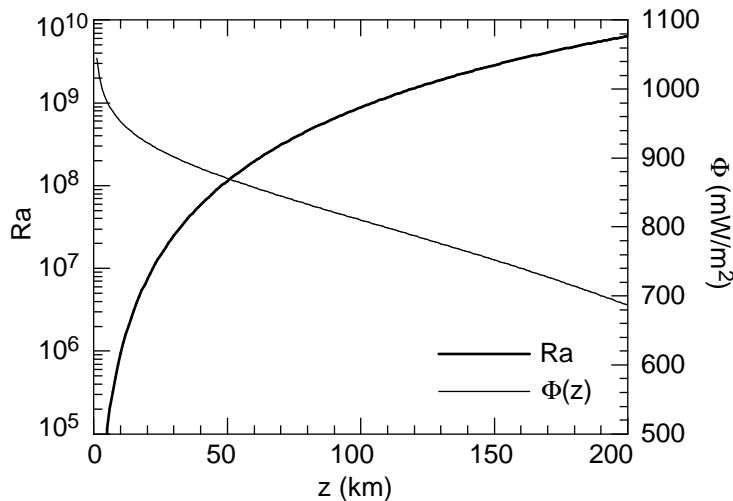


Figure 5-13. Nombre de Rayleigh (trait gras) et flux de chaleur pour une paramétrisation isovisqueuse. Paramètres de la loi de viscosité: $Q=60\text{ kJ/mol}$ et $\mu_0=10^{13}\text{ Pa.s}$.

$Nu=0,258.Ra^{0,321}$ (§1.2.5). Pour les valeurs typiques de l'énergie d'activation et de la viscosité de référence ($Q=60\text{ kJ/mol}$ et $\mu_0=10^{13}\text{ Pa.s}$), on obtient des flux de chaleur très élevés (de l'ordre de $0,7$ à 1 W/m^2 , fig. 5-13), et absolument pas réalistes. Cela souligne l'importance d'utiliser des paramétrisations du flux de chaleur tenant compte des variations de viscosité.

5.3.4 - Le nombre de Rayleigh et l'apparition de la convection.

Pour une épaisseur de l'enveloppe de glace I donnée, un nombre de Rayleigh, Ra_I , et un flux de chaleur en surface Φ peuvent être déterminés. A chaque épaisseur z correspond une pression et une température de fusion, qui est par extension la température à la base de la couche de glace,

T_{base} . La température de surface est donnée, et l'équation (3-40) permet de calculer la température de la zone isotherme (\bar{T}). Enfin, la loi de viscosité (5-9), avec les paramètres du tableau (5-4) et la température de fusion de la glace d'eau pure à la profondeur z (ici $T_m=T_{base}$), donnent accès à la viscosité du cœur isotherme ($\bar{\mu}$). On en déduit le nombre de Rayleigh de l'enveloppe de glace,

$$Ra_I = \frac{\alpha \rho_I g (T_{base} - T_{surf}) z^3}{\kappa \bar{\mu}} \quad (5-12)$$

La convection démarre pour une épaisseur de glace critique (z_c) d'environ 10 km, c'est-à-dire avant que la couche initiale créée par conduction pure n'atteigne son maximum (*Grasset et Sotin,*

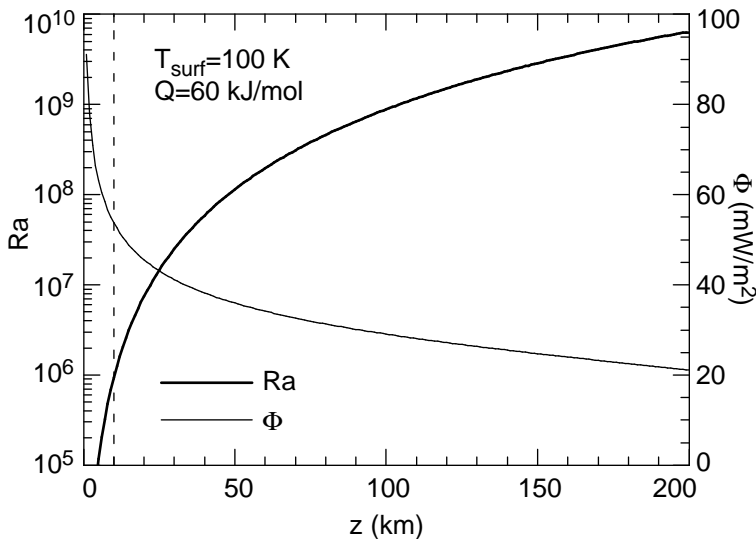


Figure 5-14. Nombre de Rayleigh (Ra_I) et flux de chaleur en surface (Φ) en fonction de l'épaisseur de glace l , pour un satellite générique. Le démarrage de la convection, pour une épaisseur de 10 km, est indiqué par la droite tiretée. Au delà de cette limite, la convection se place dans le régime de couvercle conductif.

1996). Ensuite, la convection augmente de vigueur lorsque la couche de glace s'épaissit (fig. 5-14), même au delà du minimum du liquidus ($T_{base} \sim 251$ K, à $z \sim 170$ km). Au moins jusqu'à $z=200$ km, la convection se trouve dans le régime de couvercle conductif. Le nombre de Rayleigh est représenté sur la figure 5-14. Entre 10 et 200 km, le nombre de Rayleigh est de l'ordre de 10^6 - 10^{10} .

5.3.5 - Le flux de chaleur et l'existence d'un océan sous l'enveloppe de glace.

Le nombre de Nusselt est directement calculé par (3-22), (5-12) et (5-9), l'échelle de température visqueuse adimensionnée $1/\gamma$ étant donné par (3-7). On a

$$Nu_I = 3,8 \frac{Ra_I^{0,258}}{\gamma^{1,63}}$$

Le nombre de Nusselt ainsi définit croît avec l'épaisseur de la couche de glace (fig. 5-15). En revanche, le flux conductif diminue: l'épaississement de la couche de glace est plus rapide que

l'augmentation du saut de température. Le flux de chaleur est redimensionné à l'aide du flux conductif, $\Phi = (k\Delta T/z)Nu_I$, et finalement,

$$\Phi(z) = 3,8 \frac{k\Delta T}{z} \frac{Ra_I^{0,258}}{\gamma^{1,63}} \quad (5-13)$$

Le flux de chaleur en surface est représenté sur la figure 5-14 (courbe en trait fin), dans le cas où $T_{surf}=100$ K. Bien que le nombre de Rayleigh augmente, le flux de chaleur diminue lorsque l'enveloppe de glace s'épaissit: Φ passe de 50 à 25 mW/m² entre $z=z_c$ et $z=170$ km (limite de la glace I). Cette décroissance est induite par le couvercle conductif qui limite la valeur du nombre de Nusselt. L'augmentation du nombre de Nusselt ne parvient pas à compenser la chute du flux conductif. Enfin, le flux moyen entre et $z_c=10$ km $z=170$ km vaut 31,8 mW/m².

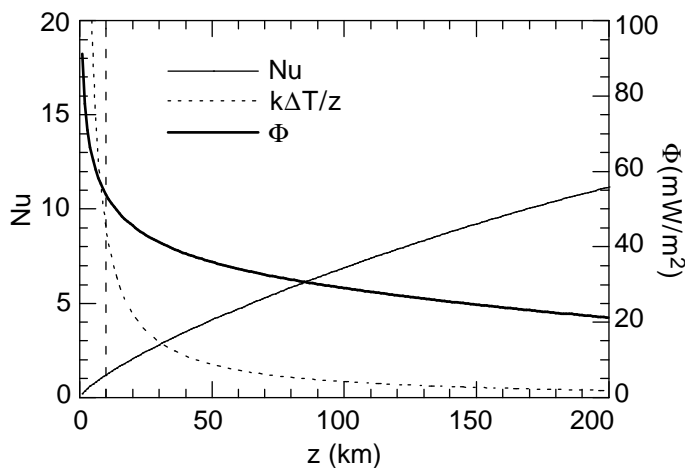


Figure 5-15. Nombre de Nusselt, flux conductif et convectif.

En l'absence de chauffage interne, le flux de chaleur en surface contraint aussi le flux de chaleur que la convection peut prendre en charge à la base de l'enveloppe de glace I. Le noyau de silicates fournit un flux de chaleur radiogénique. Une partie de la chaleur disponible est utilisée pour le changement de phase. Si le transfert de chaleur dans la couche de glace superficielle n'est pas suffisamment

efficace, la couche liquide se réchauffe. Ce réchauffement s'oppose à l'épaississement de la l'enveloppe de glace I, et conduit à un état stationnaire. L'épaisseur et le flux de chaleur de l'enveloppe de glace tendent asymptotiquement vers une limite. Cet effet a été proposé par *Grasset et Sotin* (1996) dans le cas d'un refroidissement purement conductif. Dans ces conditions, la présence d'un océan sous l'enveloppe de glace superficielle ne doit pas être exclue.

5.3.6 - Epaisseur de la lithosphère.

Etant donné le flux de chaleur au sommet de la couche de glace (q), et le saut de température dans le couvercle et la couche limite thermique du haut (ΔT_{haut}), on peut estimer l'épaisseur de la lithosphère (e_{lit}),

$$q = \frac{k\Delta T_{\text{haut}}}{e_{\text{lit}}} = \frac{k\Delta T}{z} \frac{\bar{\theta}}{\delta}, \tag{5-14}$$

où δ est l'épaisseur adimensionnée du couvercle et de la couche limite du haut, et z est l'épaisseur totale de l'enveloppe de glace. En utilisant la définition du nombre de Nusselt (équation 2-23) et les paramétrisations (3-20) et (3-22), on a

$$e_{\text{lit}} = z \frac{\bar{\theta}}{\text{Nu}} = z \frac{\gamma^{0,63}}{3,8\text{Ra}_I^{0,258}} (1,03\gamma - 1,43). \tag{5-15}$$

En fait, cette expression représente une estimation de l'épaisseur cumulée du couvercle et de la couche limite thermique. On supposera que cette valeur est représentative de l'épaisseur de

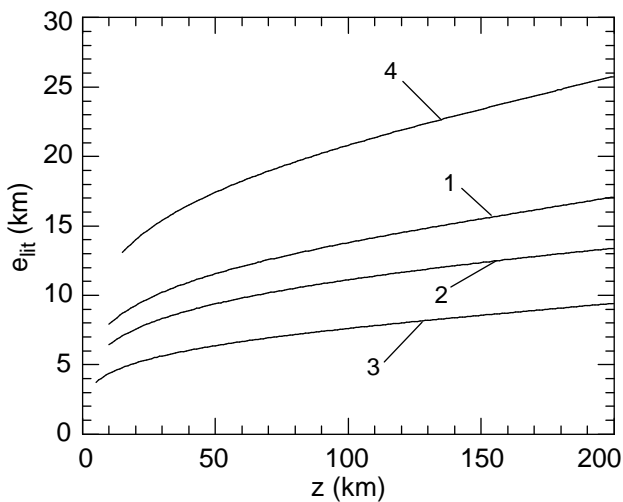


Figure 5-16. Epaisseur de la lithosphère en fonction de l'épaisseur de l'enveloppe de glace. Les paramètres sont ceux du satellite générique. (1) $Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s, et $T_{\text{surf}}=100$ K; (2) $T_{\text{surf}}=125$ K; (3) $\mu_0=10^{12}$ Pa.s; (4) $Q=80$ kJ/mol.

la lithosphère. Pour le satellite générique ($Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s), cette épaisseur est de l'ordre de 10 à 20 km, selon l'épaisseur de l'enveloppe de glace (fig. 5-16).

L'épaisseur de la lithosphère est sensible à la valeur du flux de chaleur. Elle dépend de la température de surface et des paramètres de la loi de viscosité (fig. 5-16). En particulier, elle est d'autant plus épaisse que la viscosité de référence est forte et que les variations de viscosité sont importantes. A l'inverse, une température de surface élevée diminue l'épaisseur lithosphérique.

5.3.7 - La fraction de silicate et le flux de chaleur disponible.

- *Fraction de silicates.* La densité moyenne ρ_m n'est pas suffisante pour déterminer la fraction massique de silicate $x_s=M_{\text{silicates}}/M_{\text{satellite}}$. A ρ_m donnée, x_s dépend aussi de la température de la nébuleuse planétaire, et du rayon du satellite.

Le rayon du noyau du satellite primordial (r_5) peut être déterminé indépendamment de deux façons: soit à partir du bilan de masse (système 5-2); soit à partir de l'intersection du profil thermique d'accrétion avec la température de fusion des glaces et des cathrates à pression nulle (T_m). En posant $T(r_5)=T_m$, cette seconde méthode (équation 5-1) donne

$$r_5 = \sqrt{\frac{2C_p(T_m - T_e)}{3\pi G\rho_m h}}, \tag{5-16}$$

où l'on a pris $GM(r)/rV^2 = 4$. En tenant compte de (5-16), le système (5-2) n'a plus que trois inconnues, et il est possible de déterminer la fraction de silicate x_s . Celle-ci est fonction de la fraction d'énergie cinétique convertie en chaleur lors de l'accrétion (h). Lorsque h augmente, le rayon du noyau initial diminue, et la conservation de la masse (système 5-2) implique une augmentation de la fraction de silicates (fig. 5-17 et table 5-5). Dans le même temps, l'océan primordial, dont la base est donnée par r_4 , est plus profond. Pour des valeurs de h plausibles

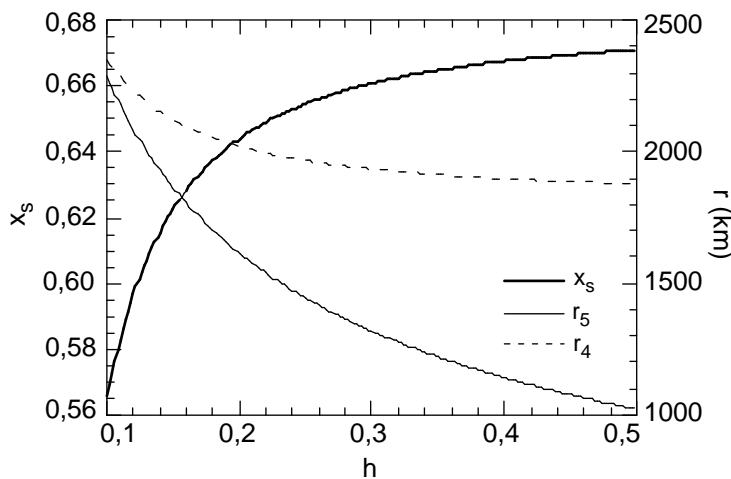


Figure 5-17. Fraction de silicate en fonction de la fraction d'énergie cinétique convertie en chaleur, dans le cas du satellite générique ($R=2500$ km et $\rho_m=1900$ kg/m³).

($0,1 \leq h \leq 0,5$), x_s est compris entre 0,565 et 0,671, et r_4 entre 2400 et 1900 km.

h	x_s	r_4 (km)	r_5 (km)
0,1	0,565	2350	2280
0,2	0,644	2020	1600
0,3	0,661	1930	1320
0,4	0,668	1900	1140
0,5	0,671	1880	1020

Table 5-5. Fraction de silicate (x_s) et rayons limites (r_4 et r_5) dans le cas du satellite générique.

• *Flux de chaleur émis par les silicates.* Une fois connue la fraction de silicate, on peut estimer la puissance libérée par la désintégration des radioéléments piégés dans les silicates. Pour autant, on n'a pas accès au flux de chaleur à la base de l'océan, qui dépend du mode de transfert de la chaleur dans le noyau de silicates, et de l'efficacité de ce transport. L'océan cristallise aussi par le bas, mais le profil thermique dans la couche de glace VI se confond avec le solidus (*Kirk et Stevenson, 1987*). La chaleur est donc intégralement transportée jusqu'à la base de l'océan.

La figure 5-18 représente l'intensité radioactive (puissance par unité de surface) issue du noyau de silicates, pour différentes valeurs de h (h fixant x et r_4). Cette quantité donne un ordre de grandeur du flux de chaleur radioactif (on gardera cette appellation dans la suite de ce chapitre). Si on prend les concentrations en éléments radioactifs généralement admises pour les météorites chondritiques (*Turcotte et Schubert, 1982, p. 141*), et $h=0,3$ ($x=0,661$), le flux de chaleur

radioactif à la base de l'océan juste après la formation du satellite était de l'ordre de 70-80 mW/m². Cette valeur est 60% plus élevée que le flux de chaleur au démarrage de la convection. Mais après 2×10⁹ ans, le flux de chaleur radioactif tombe en dessous de 25 mW/m², et pour des époques actuelles, il n'est plus que d'environ 10 mW/m². La diminution de la puissance radioactive est équivalente à une décroissance exponentielle dont la constante de temps est $\lambda_{eq}=4,62\times 10^{-10} \text{ an}^{-1}$. On en déduit facilement un flux de chaleur moyen entre t=0 et t,

$$\bar{\Phi}_{radio}(t) = \Phi_0 \frac{1 - \exp(-\lambda_{eq}t)}{\lambda_{eq}t}, \quad (5-17)$$

où Φ_0 est le flux radioactif à t=0. Pour le satellite générique et x=0,66, le flux moyen sur 4,55×10⁹ ans est d'environ 32 mW/m². Les calculs de *Kirk et Stevenson (1987)* (équation 5-3)

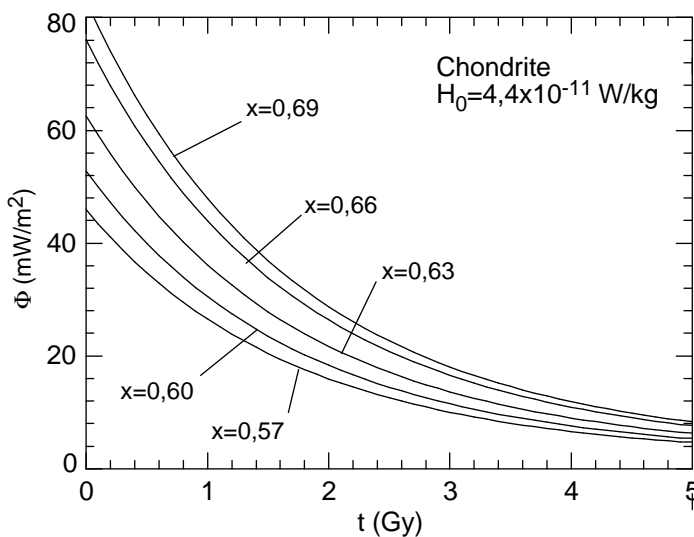


Figure 5-18. Puissance radioactive par unité de surface, pour différentes valeurs de la fraction de silicate (x), et dans le cas du satellite générique.

fournissent une meilleure approximation du flux de chaleur issu du noyau. Celui-ci aurait été beaucoup plus faible pendant le premier milliard d'année, puis il se serait stabilisé autour de 20-25 mW/m². Cette dernière valeur est comparable au flux de chaleur que peut accepter une couche de glace I de 150 km (pour cette épaisseur, l'océan est complètement cristallisé). De plus, il ne faut pas oublier qu'une partie de l'énergie est utilisée pour cristalliser l'océan. Un ordre de grandeur de cette

énergie de cristallisation (par unité de surface) est donné par

$$E = \frac{\rho_I L_I}{3} \left[\frac{R^3}{(R-z)^2} - (R-z) \right], \quad (5-18)$$

où R est le rayon du satellite, z est l'épaisseur de l'océan, L_I la chaleur latente de la glace et ρ_I sa densité. Pour R=2500 km et $L_I=284 \text{ kJ/kg}$ (*Hobbs, 1974*), $4,2\times 10^{13} \text{ J/m}^2$ sont nécessaires pour cristalliser une enveloppe de 150 km d'épaisseur. Si le temps nécessaire à cette cristallisation est de 1 Ga, le flux de chaleur utilisé pour le changement de phase est d'environ 1,3 mW/m², si bien que le flux de chaleur disponible à la base de la couche de glace n'est que légèrement modifié.

Ainsi, en tenant compte de la viscosité variable, la convection dans l'enveloppe de glace I est tout juste suffisante pour relâcher en surface la chaleur radioactive et refroidir l'océan. De plus, la quantité de chauffage interne issue de la dissipation des forces de marées n'est probablement pas négligeable. Dans ce cas, la convection dans la couche de glace I n'est peut-être pas suffisamment efficace pour refroidir intégralement l'océan primordial. Ce résultat est valable dans le cas précis du satellite et de la loi de viscosité génériques. L'influence de ces paramètres sur la convection et le flux de chaleur est étudiée dans le paragraphe suivant.

5.4 - Les paramètres du modèle.

5.4.1 - Energie d'activation et viscosité de référence.

• *Energie d'activation (Q).* Les variations de viscosité, et l'effet de couvercle, augmentent avec Q. En conséquence, l'épaisseur critique z_c augmente avec Q (fig. 5-19). La convection a plus de mal à démarer. Une valeur de z_c en fonction de Q peut être estimée, puisque d'une part le nombre de Rayleigh critique (Ra_c) est proportionnel à z_c^3 et que d'autre part (§3.4.1) $Ra_c \sim 20,9 \cdot \gamma^4$. Le facteur γ est donné par (3-7), et

$$z_c \propto Q^{4/3}.$$

Un calcul numérique donne $z_c \propto Q^{1,2}$. La différence tient au fait que γ dépend de la température moyenne, et que cette température est elle-même une fonction de Q. Par ailleurs, $\bar{\mu}$ (qui intervient dans Ra_c) dépend aussi de Q. Cet effet est secondaire, car le saut de température dans la couche limite

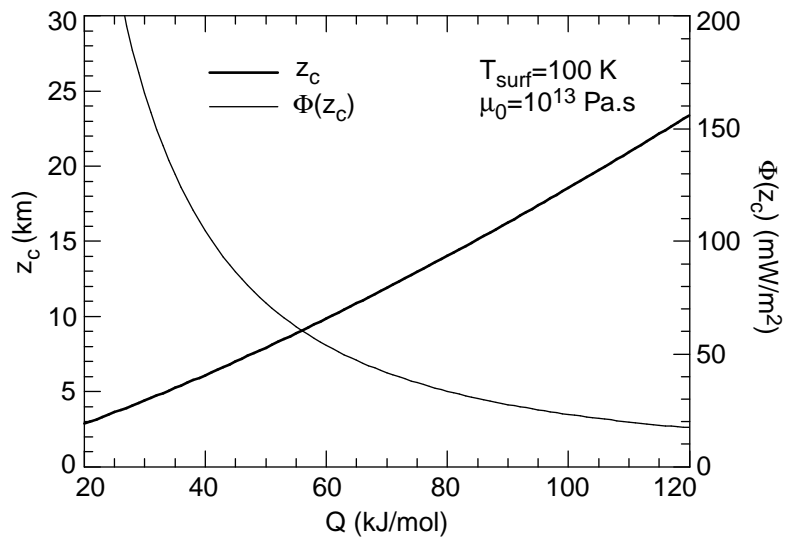


Figure 5-19. Epaisseur limite pour le démarrage de la convection (courbe en trait épais) et flux de chaleur correspondant (trait fin), en fonction de l'énergie d'activation. $T_{surf}=100$ K, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s.

thermique du bas est toujours très petit. Une dernière source d'erreur est due au fait que T_{base} (et donc ΔT) est aussi une fonction de la profondeur z_c . Ces variations sont relativement modérées (§5.2.1).

A cause de l'effet de couvercle, le flux de chaleur est fortement réduit lorsque Q augmente (fig. 5-19). Pour des valeurs réalistes de Q , entre 40 et 80 kJ/mol, $\Phi(z_c)$ varie de 100 à 30 mW/m². La même démarche peut être utilisée pour calculer le flux de chaleur correspondant à l'épaisseur z_c . Mais cette fois-ci, l'influence de $\bar{\mu}$ et du liquidus est plus marquée. Les relations

(3-7), (5-13) et $z_c \propto Q^{4/3}$ prévoient

$$\Phi(z_c) \propto Q^{-1,93}.$$

Numériquement on trouve $\Phi(z_c) \propto Q^{-1,6}$. On notera que le nombre de Rayleigh varie peu en fonction de Q (fig. 5-20). En fait, Ra ne dépend pas directement du rapport de viscosité ($\Delta\mu$), mais seulement par l'intermédiaire de la viscosité du cœur isotherme ($\bar{\mu}$). $\Delta\mu$ intervient dans l'amplitude de la couche limite thermique du bas, qui reste, comme on l'a déjà remarqué, très petite quelque soit la valeur de Q considérée: $\bar{\mu}$ et le nombre de Rayleigh varient peu avec Q .

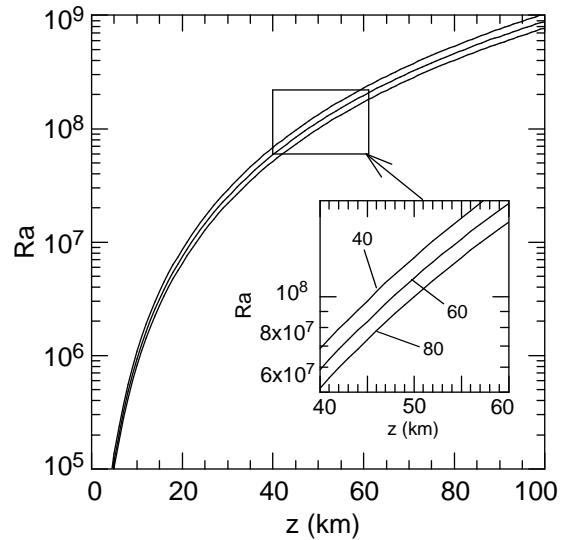


Figure 5-20. Nombre de Rayleigh en fonction de l'épaisseur de glace l , et pour plusieurs valeurs de Q (valeurs indiquées sur les courbes). $T_{\text{surf}}=100$ K, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s.

• Viscosité de référence (μ_0).

La viscosité s'oppose d'autant plus à l'écoulement qu'elle est élevée. Lorsque μ_0 augmente d'un ordre de grandeur, le nombre de Rayleigh est divisé par 10. Une plus grande épaisseur de glace est alors nécessaire pour rendre possible la convection (fig. 5-21). Le flux de chaleur en surface (calculé pour l'épaisseur

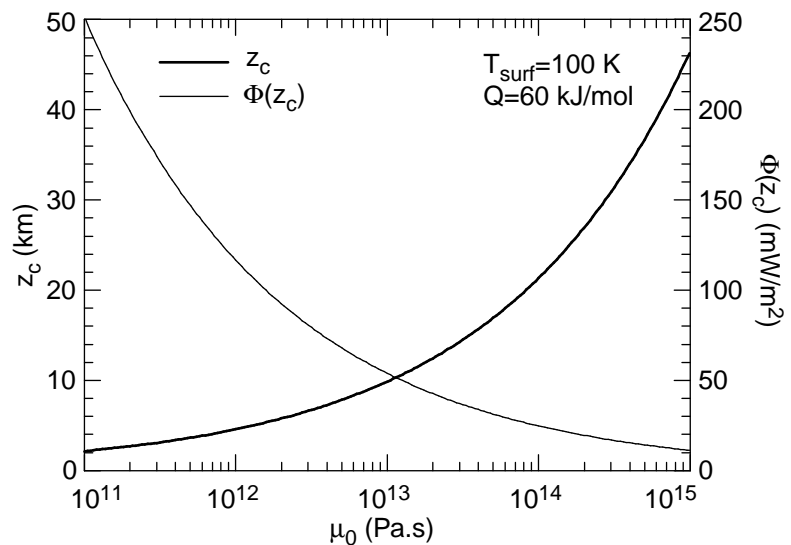


Figure 5-21. Epaisseur limite pour le démarrage de la convection (courbe en trait épais) et flux de chaleur correspondant (trait fin), en fonction de la viscosité référence (μ_0). $T_{\text{surf}}=100$ K, $Q=60$ kJ/mol.

critique z_c) est environ divisé par 2 lorsque la viscosité référence augmente d'un ordre de grandeur seulement ($\Phi(z_c) \propto \mu_0^{-0,34}$). Comme précédemment, on peut retrouver ces lois de puissance à partir des relations (3-7), (5-13) et $Ra_c \propto z_c^3$,

$$z_c \propto \mu_0^{1/3} \quad \text{et} \quad \Phi(z_c) \propto \mu_0^{-1/3}.$$

5.4.2 - Température de surface.

Une diminution de la température de surface augmente le saut de température dans l'enveloppe de glace, et doit à priori favoriser la convection. Parallèlement, le contraste de viscosité caractéristique de la couche limite thermique du bas (facteur γ) diminue. Cela profite au flux de chaleur, mais pas forcément à la convection. On a vu que \bar{T} diminuait avec T_{surf} , si bien que la viscosité du cœur isotherme reste élevée. Pour compenser cela, il faut aussi diminuer la température à la base, donc augmenter l'épaisseur de la couche de glace.

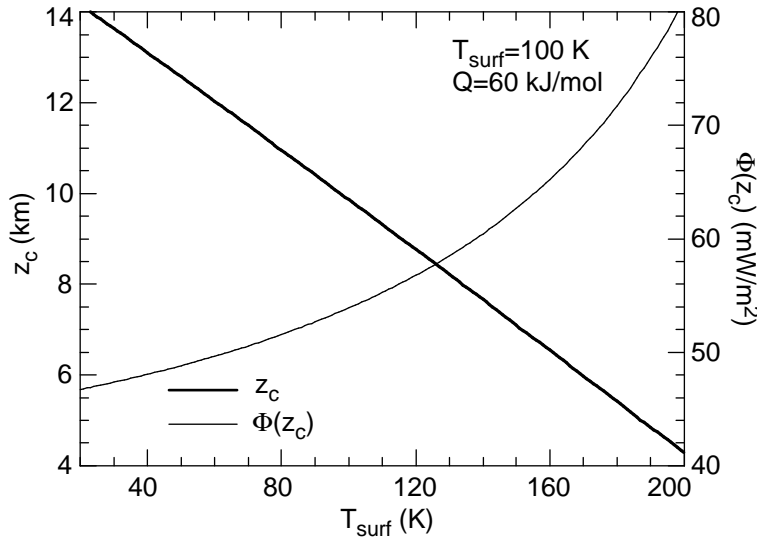


Figure 5-22. Epaisseur limite pour le démarrage de la convection (courbe en trait épais) et flux de chaleur correspondant (trait fin), en fonction de la Température de surface. $Q=60$ kJ/mol.

Analytiquement, z_c est approché par la relation

$$z_c \sim A(273 - T_{\text{surf}}), \quad \text{avec} \quad A=0,055 \text{ km/K.}$$

Le flux de chaleur à l'épaisseur critique diminue fortement avec la température de surface (fig. 5-22). La baisse de $\Delta\mu$ n'est pas suffisante par rapport à l'augmentation de la profondeur

La convection a donc plus de mal à se mettre en place pour de petites températures de surface que pour des températures plus élevées (fig. 5-22), même si cet effet est plutôt limité. $z_c \sim 12,5$ km (7 km) pour $T_{\text{surf}}=50$ K (150 K). La paramétrisation de z_c à partir des lois (5-10) est plus délicate, puisque T_{surf} intervient dans la différence de température ΔT et dans \bar{T} . D'après (3-7), z_c est proportionnelle à $\Delta T / \bar{T}^{2/3}$.

nécessaire pour entretenir la convection. Selon (5-13), le flux de chaleur en fonction de T_{surf} est proportionnelle à $\bar{T}^{3,4}/\Delta T^{0,6}$. Une expression analytique approchée de $\Phi(z_c)$ est

$$\Phi(z_c) \sim \frac{B}{\sqrt{(273 - T_{\text{surf}})}} \quad \text{avec} \quad B=710 \text{ K}^{1/2}\text{mW/m}^2.$$

Enfin, on remarquera qu'au delà de z_c , l'évolution du flux dépend peu de la température de surface (fig. 5-23).

Au total, la température de surface n'est pas un paramètre très sensible de la convection dans la couche de glace I. Une différence de 40 K (soit la différence entre les températures de surface des satellites galiléens et de Titan) induit une différence de seulement 4 km sur l'épaisseur critique de la couche de glace I, et de 5 mW/m² sur le flux de chaleur à cette profondeur critique.

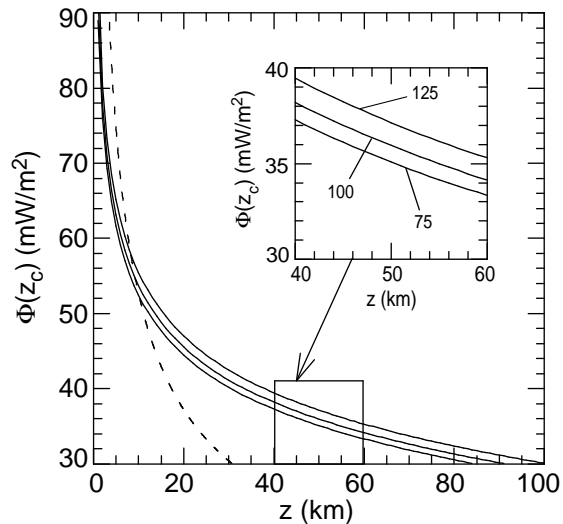


Figure 5-23. Flux de chaleur en fonction de l'épaisseur de glace I, pour différentes valeurs de la température de surface (valeurs indiquées sur les courbes). La courbe en pointillés indique la limite de la convection. Cas du satellite générique.

5.4.3 - Rayon et densité.

Ces deux quantités n'interviennent que dans le calcul de l'accélération de la gravitation, et ont à priori une influence limitée. Par rapport au satellite générique, on doit avoir, pour les profondeurs critiques,

$$z_c \sim z_{c,0} \left(\frac{2500}{R} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad z_c \sim z_{c,0} \left(\frac{1,9}{\rho_m} \right)^{1/3},$$

et pour le flux de chaleur à ces profondeurs,

$$\Phi(z_c) \sim z_{c,0} \left(\frac{R}{2500} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad \Phi(z_c) \sim z_{c,0} \left(\frac{\rho_m}{1,9} \right)^{1/3},$$

où R et en km et ρ_m en g/cm³. En fait l'accélération de la gravitation intervient également dans le calcul du liquidus (T_{base}). Mais les variations de g sont faibles, et les effets sur le liquidus et sur z_c sont de second ordre. Numériquement, on trouve

$$z_c \propto R^{-0,331}, \quad z_c \propto \rho_m^{-0,330}, \quad \Phi(z_c) \propto R^{0,328} \quad \text{et} \quad \Phi(z_c) \propto \rho_m^{0,326}.$$

La figure 5-24 montre les variations de z_c et $\Phi(z_c)$ dans les intervalles $10^3 \leq R \leq 3 \cdot 10^3$ km et $1,5 \leq \rho_m \leq 3,0$ g/cm³. Les variations de g correspondantes sont respectivement: $0,53 \leq g \leq 1,60$ ms⁻² et $1,05 \leq \rho_m \leq 2,10$ ms⁻².

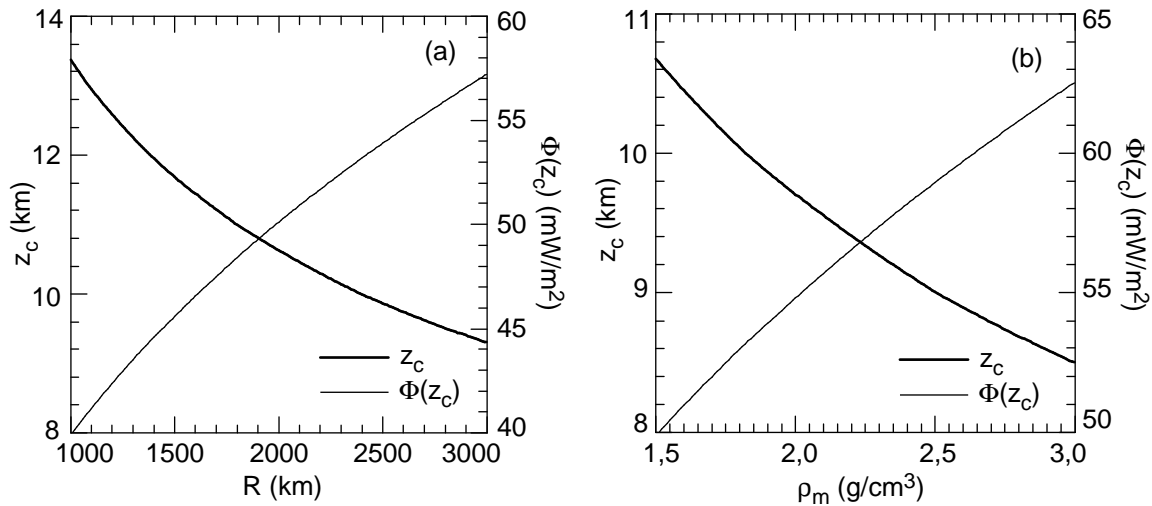


Figure 5-24. Variations de l'épaisseur critique de glace pour le démarrage de la convection (z_c) et du flux de chaleur à cette épaisseur, $\Phi(z_c)$, en fonction du rayon du satellite (a), et de sa densité moyenne (b). Les autres paramètres sont ceux du satellite générique.

5.4.4 - Paramétrisation du flux de chaleur.

La réponse du flux de chaleur aux variations de Q , μ_0 et T_{surf} est une conséquence directe de la forte dépendance en γ de la paramétrisation du Nusselt. L'influence du rayon et de la densité moyenne est plus nuancée, car ces paramètres n'interviennent que dans le calcul de g (et dans une moindre mesure, dans celui du solidus). Grâce à (3-22), l'épaisseur de glace au démarrage de la convection et le flux de chaleur correspondant se déduisent des paramètres du modèle, le plus souvent selon une loi de puissance (fig. 5-25). L'épaisseur de l'enveloppe de glace nécessaire pour le démarrage de la convection est approchée par

$$z_c \sim 3,3 \cdot 10^{-7} \mu_0^{1/3} Q^{1,2} \frac{(273 - T_{\text{surf}})}{(\rho_m R)^{0,33}}, \quad (5-19)$$

où z_c et R sont en km, Q en kJ/mol, μ_0 en Pa.s et ρ_m en g/cm³. De son côté, le flux de chaleur au démarrage de la convection $\Phi(z_c)$ (en mW/m²) est approché par

$$\Phi(z_c) \sim 7,8 \cdot 10^8 \frac{(\rho_m R)^{0,33}}{\mu_0^{0,34} \cdot Q^{1,6} \cdot \sqrt{(273 - T_{\text{surf}})}}. \quad (5-20)$$

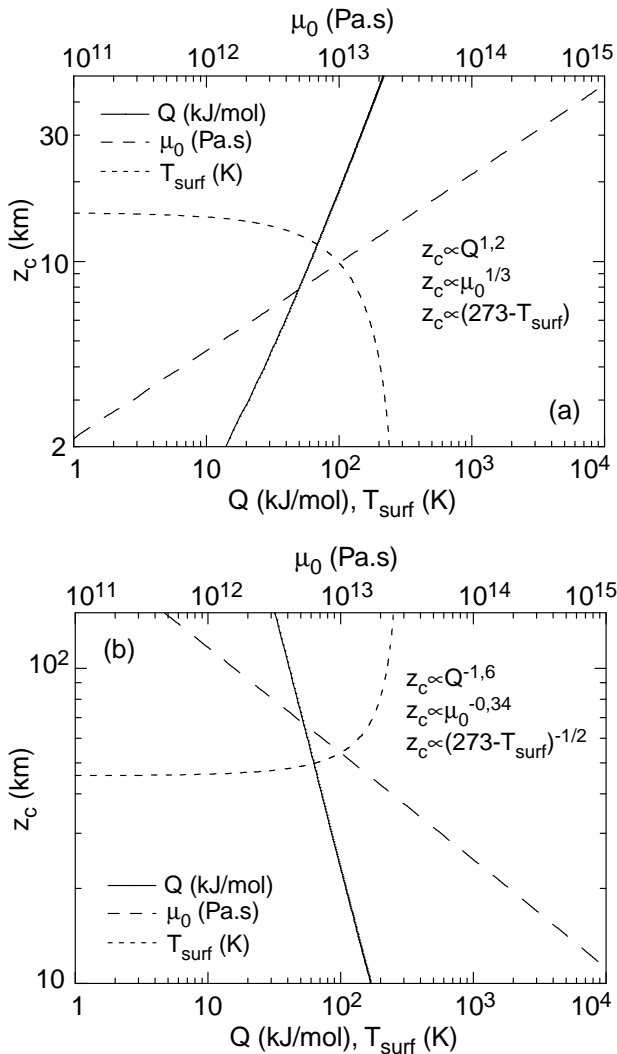


Figure 5-25. Paramétrisation de l'épaisseur minimum pour le démarrage de la convection z_c (a), et du flux de chaleur correspondant, $\Phi(z_c)$ (b), en fonction de Q , μ_0 et T_{surf} .

Il est intéressant de quantifier l'évolution du flux de chaleur lorsque l'épaisseur de l'enveloppe de glace augmente. Un point remarquable est que la forme de la courbe décrivant $\Phi(z)$ ne dépend pas du jeu de paramètres (fig. 5-26). Jusqu'à $z \sim 70$ km, le flux de

cas	1	2	3	4	5	6	7
μ_0 (Pa.s)	10^{13}	10^{13}	10^{13}	10^{12}	10^{14}	10^{13}	10^{13}
Q (kJ/mol)	40	60	80	60	60	60	60
T_{surf} (K)	100	100	100	100	100	50	150

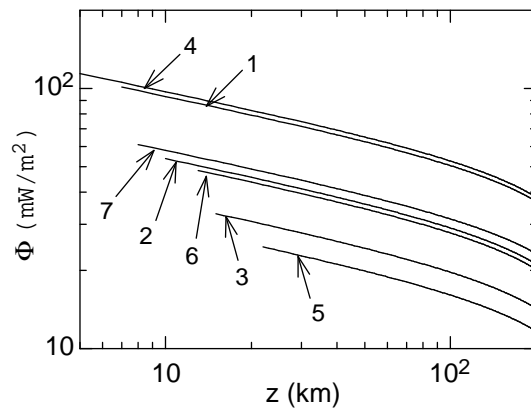


Figure 5-26. Diminution du flux de chaleur avec l'épaisseur de glace. La pente logarithmique de la décroissance est la même quel que soient les valeurs de Q , μ_0 et T_{surf} .

chaleur suit une loi de puissance. La pente logarithmique est la même quelque soit le jeu de paramètres: $\Phi(z) \propto z^{-0,25}$. Pour des épaisseurs plus importantes (120 km et plus), Φ décroît linéairement, et la pente dépend du jeu de paramètres. Le flux de chaleur transporté par une enveloppe d'épaisseur z , est approché analytiquement par

$$\Phi(z) \sim \Phi(z_c) \cdot [1 - a(z - z_c)] \cdot \left(\frac{z_c}{z}\right)^{0,25} \quad \text{avec } a = 7 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-1}. \quad (5-21)$$

La variation du flux de chaleur lorsque la couche de glace s'épaissit d'une quantité dz est donnée par la différentielle de (5-19),

$$|d\Phi(z)| = \Phi(z_c) \left(\frac{1+3az+az_c}{4z} \right) \left(\frac{z_c}{z} \right)^{0,25} dz. \quad (5-22)$$

Ces variations sont relativement petites. Pour le satellite générique, et à $z=50$ km, Φ diminue de $0,2 \text{ mW/m}^2$, lorsque la couche de glace s'épaissit de 1 km. A $z=170$ km, $|d\Phi|$ n'est plus que de $0,05 \text{ mW/m}^2$. On peut également introduire un flux moyen $\bar{\Phi}(z)$ entre $z=z_c$ et z ,

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{(z-z_c)} \int_{z_c}^z \Phi(z) \cdot dz, \quad (5-23)$$

soit, d'après (5-21),

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z_c) \frac{4z_c}{(z-z_c)} \left\{ \left(\frac{1+az_c}{3} \right) \left[\left(\frac{z}{z_c} \right)^{0,75} - 1 \right] - \frac{az_c}{7} \left[\left(\frac{z}{z_c} \right)^{1,75} - 1 \right] \right\}. \quad (5-24)$$

Dans le cas du satellite générique, le flux de chaleur moyen entre $z=z_c$ et $z=170$ km (minimum du liquidus de l'eau pure) vaut $31,8 \text{ mW/m}^2$.

5.4.5 - Composition de l'océan.

Jusqu'à présent, il a été supposé que l'océan était composée d'eau pure. L'introduction d'autres volatiles, comme l'ammoniaque, abaisse significativement le liquidus de la glace. Cela a d'importantes conséquences sur la convection dans la couche de glace I.

Evidement, la diminution de ΔT affaiblit la convection. Mais ce n'est pas le frein le plus important. Dans la loi de viscosité (5-9), la température de référence (T_m) est la température de fusion de la glace d'eau pure. Ce choix est imposé par le fait que dans l'océan eau+impuretés, seule l'eau cristallise, les autres constituants restant dans la solution liquide. La viscosité de la couche de glace doit donc correspondre à la viscosité de l'eau pure. Une température de cristallisation plus petite que celle de l'eau pure induit automatiquement une viscosité plus élevée à la base de la couche de glace, donc une condition moins favorable à l'écoulement. A cela, il faut ajouter une diminution de l'amplitude de la couche limite thermique (fig. 5-10, § 5.3.2). Cette réduction n'est pas complètement compensée par la chute de la viscosité.

Un premier calcul avec les paramètres du satellite générique et un pourcentage fixe de 15% de NH_3 révèle qu'à 200 km la convection n'a toujours pas démarrée (fig. 5-27). La présence de NH_3

constitue donc un frein réel et efficace. Par ailleurs, comme on l'a discuté plus haut (§5.2.1), le nombre de Rayleigh passe par un maximum avant que la composition eutectique ne soit atteinte.

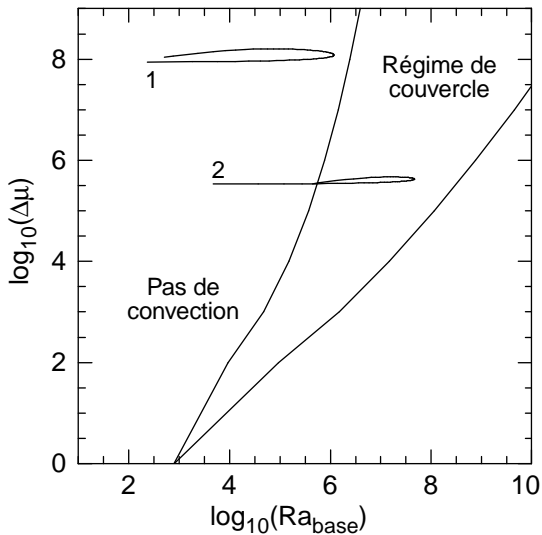


Figure 5-27. Domaine de convection dans l'enveloppe de glace I pour différentes valeurs de Q et μ_0 dans le cas où T_{base} est calculé à partir du liquidus d'un mélange 85% H_2O -15% NH_3 . Cas 1: $Q=60$ kJ/mol et $\mu_0=10^{13}$ Pa.s; Cas 2: $Q=40$ kJ/mol et $\mu_0=10^{12}$ Pa.s. $T_{surf}=100$ K dans les deux cas.

- *Condition d'apparition de la convection.* On peut toujours trouver un domaine dans lequel la convection arrivera à se produire. Il suffit de choisir des valeurs plus favorables pour les paramètres de la loi de viscosité. Une valeur de $Q=60$ kJ/mol n'exclut pas complètement l'apparition de la convection: celle-ci peut démarrer dès que la viscosité de référence est inférieure à 5×10^{12} Pa.s. De même, si on choisit de fixer $\mu_0=10^{13}$, la convection intervient pour $Q \leq 55$ kJ/mol. Ainsi, le démarrage de la convection réclame de petits changements de la loi de viscosité. Une augmentation de la température de surface favorise également la

convection: si la température de surface est suffisamment élevée, c'est-à-dire au moins 130 K, la convection peut démarrer même pour $Q=60$ kJ/mol et $\mu_0=10^{13}$. Cette valeur est légèrement supérieure à la température de surface des satellites galiléens.

A titre d'exemple, la figure 5-28 montre le nombre de Rayleigh et le flux de chaleur pour $Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{12}$ et $T_{surf}=100$ K. La convection démarre pour une épaisseur de glace modeste: environ 12 km. Ensuite, le liquidus du mélange H_2O-NH_3 contraint l'évolution du nombre de Rayleigh. Celui-ci passe par un maximum vers 32 km, puis diminue rapidement. Finalement, la convection s'arrête. Lorsque l'enveloppe de glace est trop épaisse: le nombre de Rayleigh repasse sous le nombre de Rayleigh critique aux alentours de 54 km. La présence d'ammoniaque impose une épaisseur de glace critique au delà de laquelle la convection s'arrête.

- *Nombre de Rayleigh et flux de chaleur.* La convection est moins vigoureuse que dans le cas de l'eau pure, bien que l'épaisseur de glace minimum soit approximativement la même. Le nombre de Rayleigh varie entre 10^6 et 5×10^6 , et la convection démarre pour une épaisseur de glace de 12 km. Dans le cas de l'eau pure, et pour un jeu de paramètres identique ($Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{12}$ et

$T_{\text{surf}}=100$ K), la convection démarre vers $z_c \sim 5-6$ km, et le nombre de Rayleigh varie entre 10^8 et 10^9 dans l'intervalle $10 \leq z \leq 50$ km. Le flux de chaleur au démarrage de la convection est

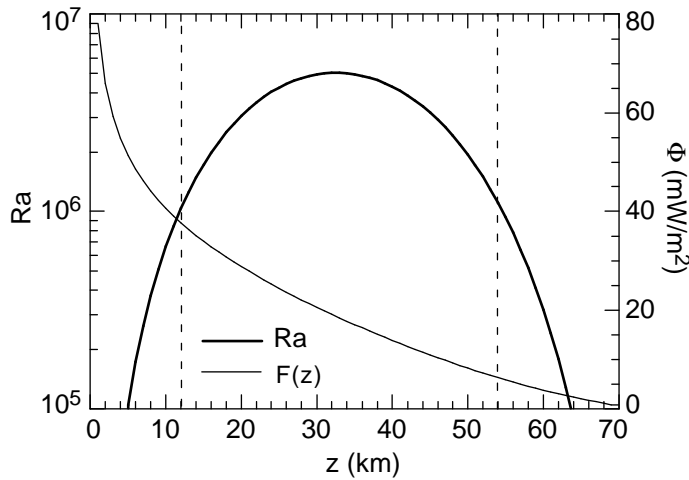


Figure 5-28. Nombre de Rayleigh et flux de chaleur pour un océan initialement à 15% de NH_3 . $Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{12}$ Pa.s et $T_{\text{surf}}=100$ K. Les lignes pointillées indiquent l'intervalle dans lequel la convection est possible. L'eutectique ($T \sim 177$ K) est atteint à $z \sim 70$ km.

plus faible. Il est d'environ 35 mW/m^2 , contre 115 mW/m^2 pour l'eau pure. La baisse du flux de chaleur avec z est beaucoup plus marquée que dans le cas de l'eau pure: $\Phi(z)$ passe de 35 à 5 mW/m^2 entre 12 et 54 km (115 à 70 mW/m^2 pour l'eau pure). De manière plus générale, les paramétrisations que l'on vient de proposer pour l'eau pure ne sont plus valables dans le cas d'un mélange $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3$. Il n'y a pas de paramétrisation alternative simple.

• *Pourcentage d'ammoniaque.* Si on réduit la quantité initiale d'ammoniaque, la composition eutectique est atteinte pour des pressions plus élevées. Le liquidus en surface est supérieur à 250 K, et les conditions pour le démarrage de la convection sont plus favorables. En dessous d'un

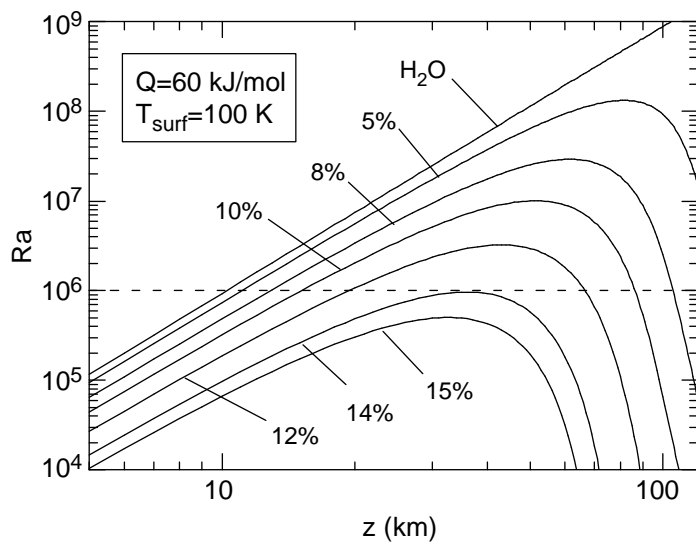


Figure 5-29. Nombre de Rayleigh en fonction de l'épaisseur de glace l , pour différentes composition de l'océan initial. Un nombre de Rayleigh critique approximatif est indiqué en pointillés. Les paramètres du modèle sont $Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{13}$ Pa.s et $T_{\text{surf}}=100$ K.

taux de NH_3 critique, la convection devient possible dans un intervalle de profondeur d'autant plus étendu que le pourcentage de NH_3 est petit. En gardant les paramètres du satellite générique, le seuil d'ammoniaque à ne pas dépasser est de 14% (fig. 5-29). Pour un taux de NH_3 de 5% , la convection démarre si l'épaisseur de l'enveloppe de glace est supérieur à 10 km. Elle est encore possible lorsque l'océan atteint la composition eutectique, pour $z \sim 145$ km.

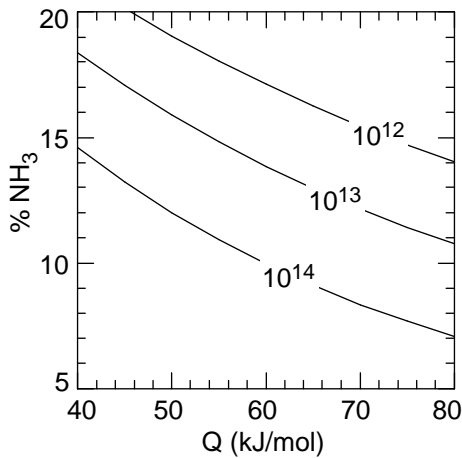


Figure 5-30. Taux d'ammoniaque critique en fonction de l'énergie d'activation et pour plusieurs valeurs de la viscosité de référence.

Le taux de NH_3 critique dépend des autres paramètres de la loi de viscosité et du satellites générique. Si ces paramètres offrent des conditions plus favorables à la convection, le taux de NH_3 critique est plus élevé. Les paramètres les plus sensibles sont ceux de la loi de viscosité. La figure 5-30 représente le taux de NH_3 critique en fonction de l'énergie d'activation et pour différentes viscosités de référence. L'effet de la température de surface n'est pas prépondérant. Il a le même rôle que dans le cas de l'eau pure: une augmentation de

température de surface favorise la convection et accroît le flux de chaleur convectif. L'accélération de la gravité a aussi une petite influence, mais contrairement à l'eau pure, elle joue contre la convection: le nombre de Rayleigh diminue lorsque g augmente. A une profondeur donnée, la pression augmente avec g . Le liquidus diminue plus rapidement, et la viscosité du

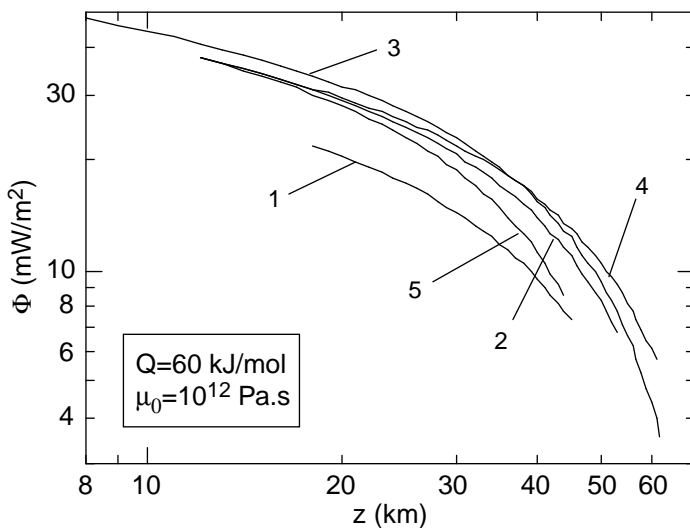


Figure 5-31. Influence de la température de surface et de l'accélération de la gravitation. $Q=60 \text{ kJ/mol}$, $\mu_0=10^{12} \text{ Pa.s}$.

cœur isotherme est plus élevée. Cet effet a aussi une conséquence sur le flux de chaleur. Celui-ci diminue d'autant plus rapidement que g est grand (fig. 5-31). Ainsi, la température de surface contrôle le flux de chaleur, et l'accélération de la gravitation contrôle la décroissance de ce flux (par l'intermédiaire du liquidus).

cas	1	2	3	4	5
$T_{\text{surf}} \text{ (K)}$	50	100	150	100	100
$g \text{ (ms}^{-2}\text{)}$	1,33	1,33	1,33	1,2	1,5

L'évolution du flux de chaleur en fonction de l'épaisseur de glace est très sensible au taux initial de NH_3 . La diminution du flux de chaleur est d'autant plus rapide que le taux initial de NH_3 est élevé (fig. 5-32). A $z=50 \text{ km}$, le flux de chaleur vaut 65, 50, et 8 mW/m^2 pour de l'eau pure, 5%, et 15% de NH_3 , respectivement. Cet effet est lié au liquidus du mélange $\text{H}_2\text{O-NH}_3$.

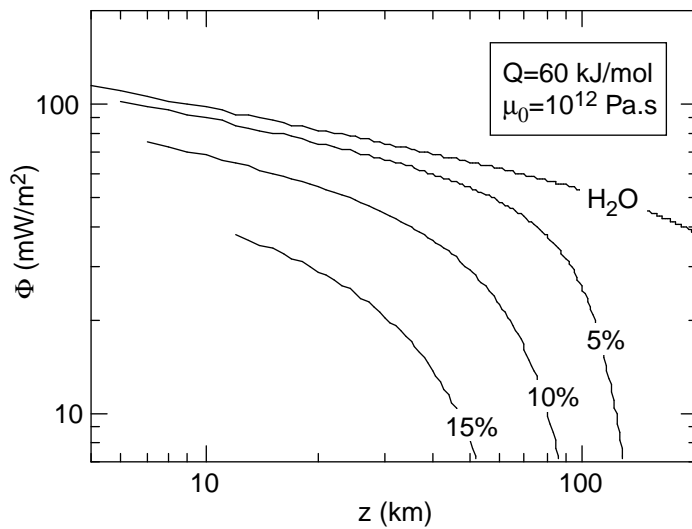


Figure 5-32. Evolution du flux de chaleur en fonction de l'épaisseur de glace I, pour différentes composition de l'océan initial. Les paramètres du modèle sont $Q=60$ kJ/mol, $\mu_0=10^{12}$ Pa.s et $T_{\text{surf}}=100$ K.

A pression donnée, la température de cristallisation du mélange décroît lorsque le taux de NH_3 augmente. Lorsque la couche de glace s'épaissit, celui-ci se rapproche de la composition eutectique, et la température à la base de l'enveloppe de glace diminue, ainsi que le nombre de Rayleigh et le flux de chaleur conductif. Cette évolution est d'autant plus rapide que le taux d'ammoniaque initial est élevé.

- *Épaisseur de la lithosphère.* La présence d'ammoniaque affaiblit la convection et réduit notablement le flux de chaleur transporté par l'enveloppe de glace I. Cette perte d'efficacité se

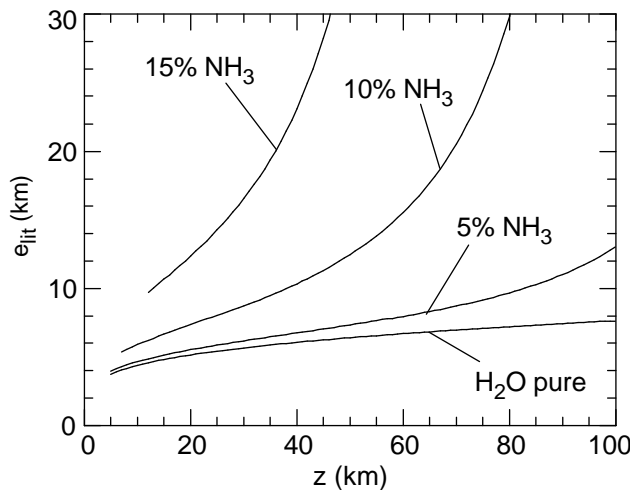


Figure 5-33. Épaisseur de la lithosphère en fonction de l'épaisseur de l'enveloppe de glace et pour différentes valeurs du taux d'ammoniaque. $Q=60$ kJ/mol et $\mu_0=10^{12}$ Pa.s.

répercute sur l'épaisseur de la lithosphère. Dans le cas d'un océan d'eau pure, celle-ci est à peu près constante. Pour $\mu_0=10^{12}$ Pa.s, elle est et de l'ordre de 5 à 10 km. Une petite quantité de NH_3 (5%) accroît l'épaisseur de la lithosphère (fig. 5-33). L'écart par rapport au cas de l'eau pure devient important lorsque l'enveloppe de glace est supérieure à 50 km. Enfin, pour des taux d'ammoniaque plus importants, la lithosphère s'épaissit.

5.4.6 - La fraction de silicates et le flux de chaleur radioactif.

La fraction de silicate contraint la densité moyenne du satellite. En faisant varier ρ_m , on mesure implicitement l'influence de x_s sur la convection de l'enveloppe de glace I. Les équations (5-1) et (5-2), calculent directement ρ_m en fonction de x_s et h (fig. 5-34). La fraction de silicate impose

également la profondeur initiale de l'océan. Pour un volume d'ammoniaque donné, ce rayon fixe la teneur initiale ammoniacque. On vient de voir que ce paramètre contraint fortement la convection dans la couche de glace. Enfin, le taux de silicate fixe la quantité de chaleur disponible. Il a déjà été dit que seule une fraction a de la puissance dégagée parvenait à la base de la couche de glace I. Si $H(t)$ est la puissance dégagée par unité de masse à l'instant t , le flux de chaleur disponible à la base de l'enveloppe de glace I est

$$\Phi_{\text{radio}}(t) = a \frac{x_s \rho_m R^3}{3r_4^2} H(t), \quad (5-25)$$

où r_4 est le rayon de la couronne de glaces haute pression, et a une constante inférieure à 1 prenant en compte le fait que le flux de chaleur n'est pas entièrement transmis à la base de la couche de glace. Pour les satellites de glaces, x_s varie entre 0,55 et 0,70 (tableau 5-6), ce qui induit une variation du flux de chaleur radioactif de l'ordre de 40% à R et ρ_m fixés (fig. 5-18). La figure 5-34 suggère que la densité s'écarte peu (moins

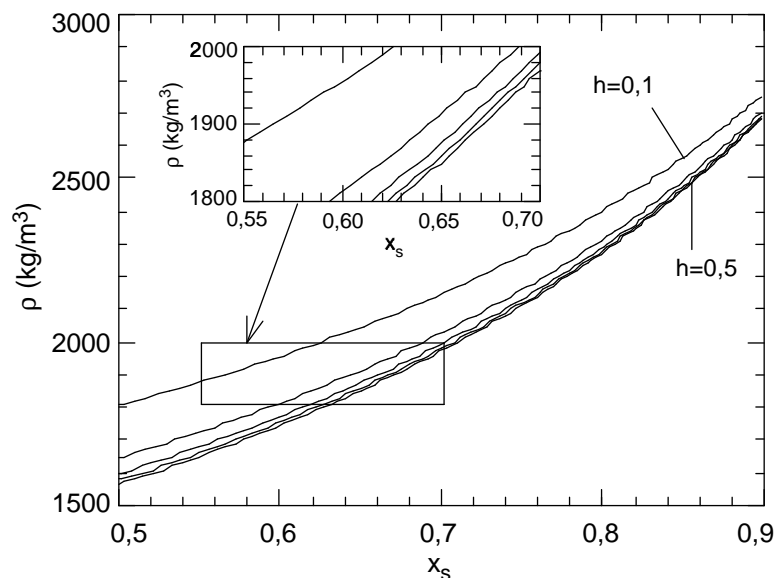


Figure 5-34. Densité moyenne en fonction de la fraction massique de silicate, et pour différentes valeurs de h . $R=2500$ K, $T_e=100$ K.

10% de la valeur générique (1900 kg/m³). En revanche, les rayons sont susceptibles de varier plus fortement autour du rayon générique (40% pour un satellite de 1500 km de rayon). Le facteur a reste problématique. Il ne peut être approché que par une étude globale du refroidissement du satellite, prenant notamment en compte le refroidissement du noyau de silicate, le mode de transfert de la chaleur dans la couronne glaces et de silicates, et l'énergie latente de fusion emmagasinée lors de la cristallisation de l'océan.

En définitive, il faut retenir que la vigueur et l'efficacité de la convection sont très sensibles au choix des paramètres de la loi de viscosité. Le flux de chaleur au démarrage de la convection est divisé par 2 dans l'intervalle de viscosité de référence possible ($10^{12} \leq \mu_0 \leq 10^{13}$ Pa.s) et par 3 dans l'intervalle d'énergie d'activation ($40 \leq Q \leq 80$ kJ/mol).

Les paramètres physiques du satellite (rayon, densité et température de surface) ont un impact modéré. Le rayon et la densité moyenne interviennent dans le flux de chaleur radioactif. En revanche, la présence d'ammoniaque dans l'océan initial est un paramètre très influent de la convection dans la couche de glace superficielle. Elle freine la convection et réduit significativement l'efficacité du transfert de chaleur. La composition du mélange évolue au cours de la cristallisation, si bien que le flux de chaleur diminue d'autant plus rapidement que le taux de NH_3 initial est élevé.

5.5 - Discussion: planétologie comparée.

5.5.1 - Fraction de silicate, masse volumique et flux de chaleur radioactif.

Si la densité moyenne ne donne pas directement la composition du satellite, elle fournit tout de même un indice sérieux. Le satellite générique ($R=2500$ km, $T_e=100$ K) est composé de silicates à plus de 80% dès que $\rho_m \geq 2300$ kg/m³ (fig. 5-34).

- *Fraction de silicate et densité.* Sur Europe, les glaces pures occupent une enveloppe superficielle de seulement 50 à 70 km (table 5-6). Elle ne représente que 4 à 5 % de la masse, soit 10 à 15% du volume. Europe est donc un corps essentiellement rocheux. Ganymède, Callisto et Titan sont plus riches en glaces: de 30 à 45 % en masse. Quelque soit la valeur de h , ils ont pu

Satellite	T_e (K)	R (km)	ρ_m (g/cm ³)	h	x	r_4 (km)
Europe	120	1569	2,97	0,2-0,5	0,943-0,950	1520-1500
Ganymède	120	2634	1,94	0,1-0,5	0,625-0,690	2320-1990
Callisto	120	2403	1,86	0,1-0,5	0,548-0,655	2270-1780
Titan	80	2575	1,88	0,1-0,5	0,541-0,662	2470-1930
Triton	60	1355	2,04	0,4-0,5	0,655-0,683	1270-1200
Générique	100	2500	1,90	0,1-0,5	0,565-0,671	2350-1880

Table 5-6. Domaine possible pour la fraction de silicate (x) et le rayon de la couronne de silicate initiale (r_4) pour différents satellites.

acquérir une structure différenciée (noyau/couronne de silicate/océan) à la fin de l'accrétion. Selon la valeur de h , la profondeur de l'océan initial varie de 600 à 100 km. Triton, de plus petite dimension, s'écarte plus nettement du satellite générique. Cette petite taille, et une température de la nébuleuse plus faible (~60 K), compromettent la formation d'un océan initial. Celui-ci n'a pu exister que si $h \cdot 0,4$. Moyennant cela, la composition de Triton est proche de celle des

satellites de glace, comme le suggère sa densité ($\rho_m=2,05 \text{ g/cm}^3$). Les glaces contribuent pour 32-35 % de la masse totale. L'océan initial est peu profond (de l'ordre de 100 km), et le minimum du liquidus ne peut pas être atteint: l'océan ne cristallise que par le haut. L'appellation de satellite de glace s'applique aux corps composé d'environ de 30 à 40% de glace. La densité est un bon critère d'identification des satellites de cette famille. La taille du satellite n'est pas un critère décisif, mais le profil thermique d'accrétion impose un rayon minimum dont Triton est proche.

● *Flux de chaleur radioactif.* La figure 5-35 représente le flux de chaleur radioactif brut en fonction du temps (équation 5-25, avec $a=1,0$). Comme précédemment, les concentrations utilisées sont les valeurs chondritiques. La fraction d'énergie cinétique convertie en chaleur vaut 0,3 (0,42 pour Triton) et les valeurs de r_4 correspondantes sont reportées dans le tableau 5-7. Les

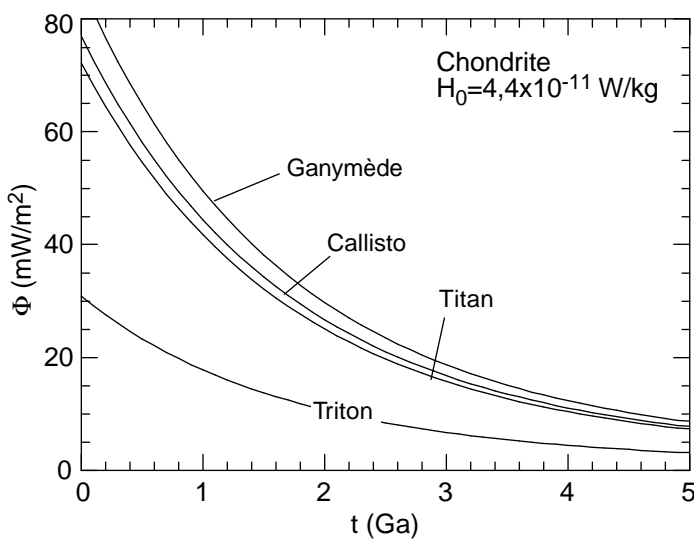


Figure 5-35. Evolution du flux de chaleur radioactif pour Callisto, Ganymède, Titan et Triton. Les concentrations en radioéléments sont celles des chondrites, et $h=0,3$ (0,42 pour Triton).

flux radioactifs de Ganymède, Callisto et Titan sont comparables (table 5-7). Ils sont de l'ordre de 75-85 mW/m² après l'accrétion, puis ils passent à ~30 mW/m² à $t=2 \times 10^9$ ans, et 10 mW/m² aujourd'hui. Sur $4,55 \times 10^9$ ans, ils sont en moyenne de 30 à 40 mW/m². Triton, plus petit, a emmagasiné moins de radioéléments. Ainsi, le flux de chaleur radioactif vaut seulement 40% du flux de chaleur de Titan.

Satellite	T_{surf} (K)	x	r_4 (km)	Φ_0 (mW/m ²)	$\bar{\Phi}_{\text{radio}}$ (mW/m ²)
Ganymède	120	0,683	2030	85,8	36,0
Callisto	120	0,644	1835	72,3	30,4
Titan	80	0,650	1990	76,9	32,3
Triton	60	0,661	1255	30,8	12,9
Générique	100	0,660	1940	76,1	31,8

Table 5-7. Fraction de silicate, rayon de la couronne de silicate initiale, flux radioactif initial et flux de chaleur sur $4,55 \times 10^9$ ans. $h=0,3$ (0,42 dans le cas de Triton).

5.5.2 - Convection dans la couche de glace I.

• *Océan d'eau pure.* Le flux de chaleur est calculé à partir des relations (5-19) à (5-21), pour $Q=60$ kJ/mol et deux valeurs de μ_0 (fig. 5-36, table 5-8). Lorsque $\mu_0=10^{12}$ Pa.s, le flux de chaleur dans l'enveloppe de glace est toujours supérieur (en moyenne) au flux de chaleur radioactif 'brut'. Il est également supérieur à l'estimation de *Kirk et Stevenson (1987)*, qui est de

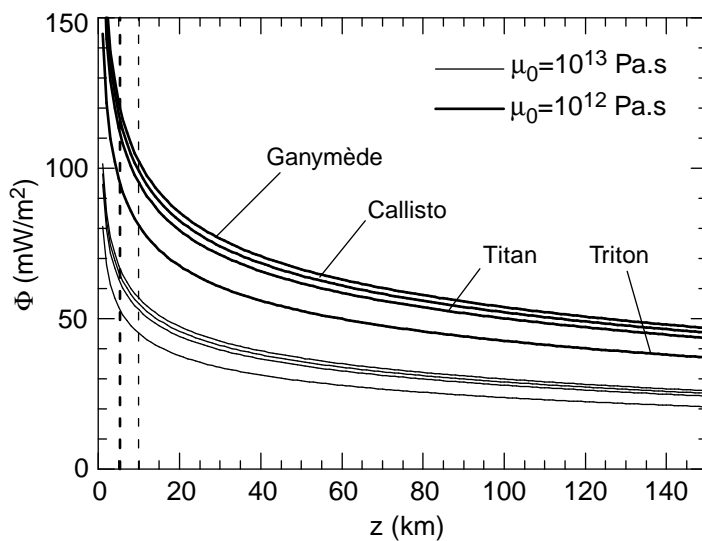


Figure 5-36. Flux de chaleur à travers de l'enveloppe de glace I pour $\mu_0=10^{13}$ Pa.s (traits fins) et $\mu_0=10^{12}$ Pa.s (traits gras). Les droites en pointillées indiquent l'épaisseur minimum pour le démarrage de la convection. Energie d'activation $Q=60$ kJ/mol.

Satellite	z_c (km)	$\Phi(z_c)$ (mW/m ²)	$\bar{\Phi}$ (mW/m ²)
$\mu_0=10^{12}$ Pa.s			
Ganymède	4,0	129,1	61,6
Callisto	4,2	123,4	59,5
Titan	5,1	112,9	56,9
Triton	6,8	89,3	54,9
$\mu_0=10^{13}$ Pa.s			
Ganymède	8,6	59,0	33,3
Callisto	9,0	56,4	32,1
Titan	11,0	51,6	30,7
Triton	14,7	40,8	29,2

Table 5-8. Epaisseur critique pour le démarrage de la convection (z_c), flux de chaleur à z_c , et flux moyen entre $z=z_c$ et $z=170$ km (100 km pour Triton).

l'ordre de 25 mW/m². Pour une épaisseur de glace de 150 km, il est de 45 mW/m² (37 mW/m² pour Triton). Dans ces conditions, il est probable que l'océan a pu cristalliser complètement. Pour $\mu_0=10^{13}$ Pa.s, le flux radioactif initial est supérieur (d'environ 40%) au flux de la couche de glace à z_c (avec $z_c \sim 10$ km). Après 2,5 Ga, le flux radioactif devient inférieur au flux de chaleur à travers une enveloppe de glace de 150 km (100 km pour Triton). Toutefois, le flux convectif est proche de la valeur de Kirk et Stevenson, et il n'est pas certain que l'océan a pu se refroidir efficacement et cristalliser. La production de chaleur interne par la dissipation des forces de marée pourrait bloquer la cristallisation de l'océan. Ainsi, pour chacun des quatre satellites considérés, la convection à viscosité variable

dans la couche de glace I n'est peut être pas assez efficace pour refroidir un océan initial d'eau pure. Dans ce cas, l'épaisseur de la couche de glace tend vers une limite, et il subsiste un océan sous cette enveloppe. Par la suite, la convection a pu se poursuivre dans la couche de glace I. Le calcul du temps nécessaire pour atteindre cet équilibre nécessite un bilan de chaleur de l'océan.

Enfin, l'épaisseur de la lithosphère varie peu en fonction de l'épaisseur de glace. Pour $z=100$ km, elle est de 10 km pour Ganymède et Callisto, 15 km pour Titan et 20 km pour Triton (fig. 5-37a). Ces épaisseurs ne sont pas très élevées. Comme de plus la convection est vigoureuse (le nombre de Rayleigh est de l'ordre de 10^9), il est probable que la convection induise de la tectonique en surface. La convection induit un cisaillement à la base de la lithosphère. Ces contraintes s'accroissent dans la lithosphère. McKinnon (1997) donne une approximation de la contrainte horizontale ainsi créée, en fonction du maximum de la contrainte convective (τ_{max}),

$$\sigma_{xx} = \frac{z}{2e_{lit}} \tau_{max}, \quad (5-26)$$

où z est l'épaisseur de la couche de glace et e_{lit} l'épaisseur de la lithosphère. Le maximum de contrainte adimensionnée est calculé par la paramétrisation du chapitre 3

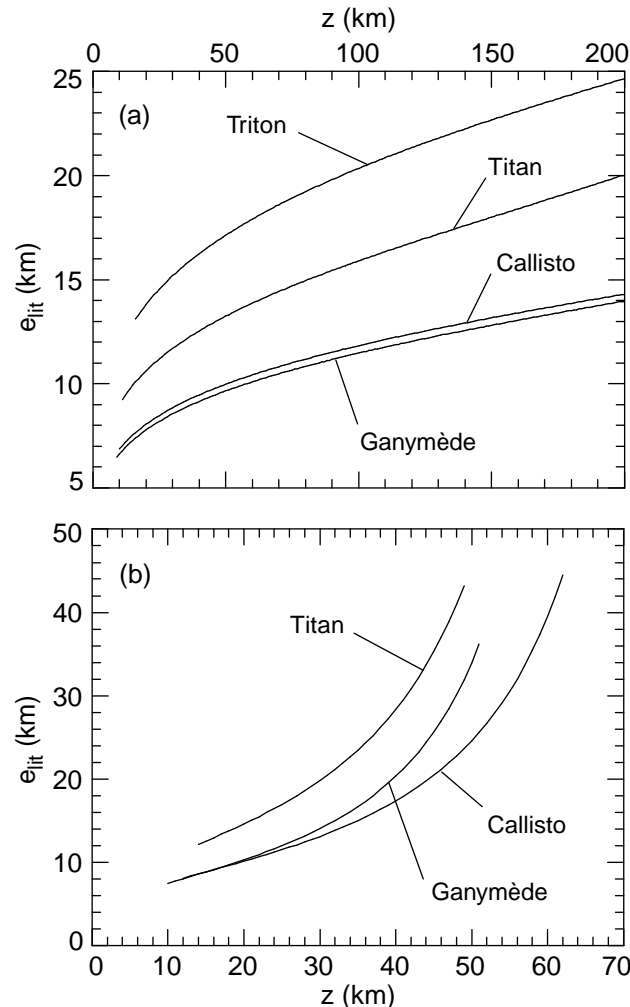


Figure 5-37. Epaisseur de la lithosphère en fonction de l'épaisseur de la couche de glace. (a) Océan d'eau pure; (b) 15% d'ammoniaque.

(§3.4.7, tableau 3-5). La contrainte caractéristique est $\mu_0\kappa/z^2$, soit environ 10^{-3} Pa pour une couche de glace de 100 km d'épaisseur. Si $Ra \sim 10^9$ et $\gamma \sim 18$, la contrainte maximale est de l'ordre de 0,1 MPa, et la contrainte lithosphérique liée à la convection est de l'ordre de 0,5 MPa.

Les comportements de Ganymède et de Callisto sont très semblables. Leur noyau respectif dégage à peu près la même quantité de chaleur, et les flux de chaleur à travers l'enveloppe de glace I sont très proches l'un de l'autre. Toujours dans le cas d'un océan d'eau pure, on notera que

l'enveloppe de glace de Triton peut (ou a pu) être animée d'un mouvement de convection. La surface de Triton présente effectivement de nombreuses traces d'activité tectonique, mais l'origine de cette activité est encore mal connue.

• *Mélange eau-ammoniaque.* La figure 5-38 représente le nombre de Rayleigh (a) et le flux de chaleur (b) pour un taux d'ammoniaque de 15%, et pour $Q=60$ kJ/mol et $\mu_0=10^{12}$ Pa.s. Comme on l'a vu pour le satellite générique, la convection n'est possible que si l'épaisseur de l'enveloppe de glace est comprise dans un intervalle de valeurs données. La convection est impossible dans Triton, même pour $\mu_0=10^{12}$ Pa.s. L'épaisseur de l'océan est trop faible. Le liquidus diminue très rapidement et induit des viscosités élevées dans le cœur isotherme. Ganymède et Callisto se démarquent plus nettement que dans le cas de l'eau pure: Callisto atteint des nombres de Rayleigh plus élevés, et la convection s'arrête pour une épaisseur de glace un peu plus importante que pour Ganymède. La profondeur de l'océan initial est approximativement la même pour les deux

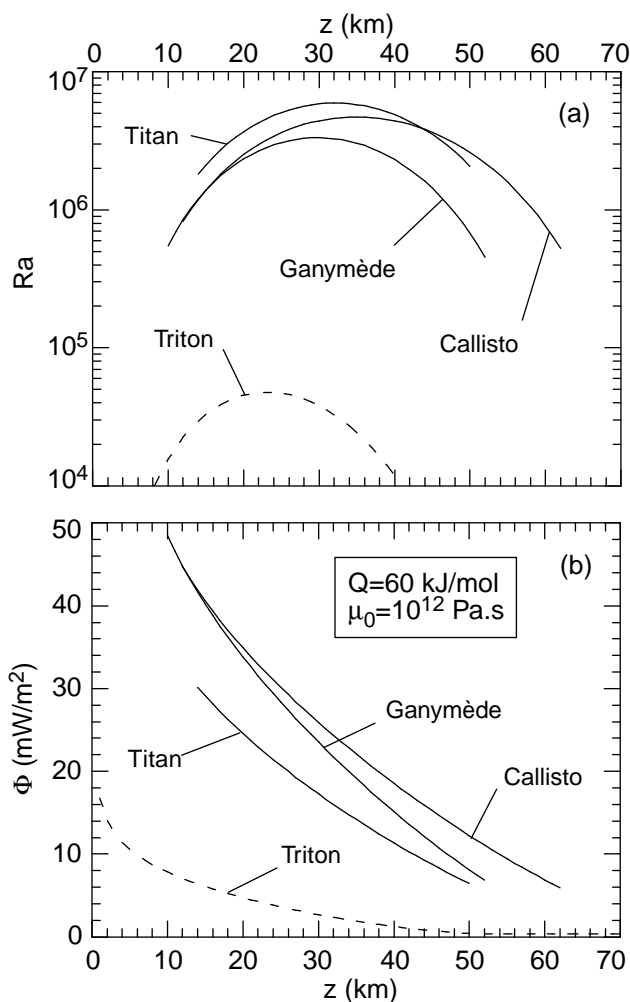


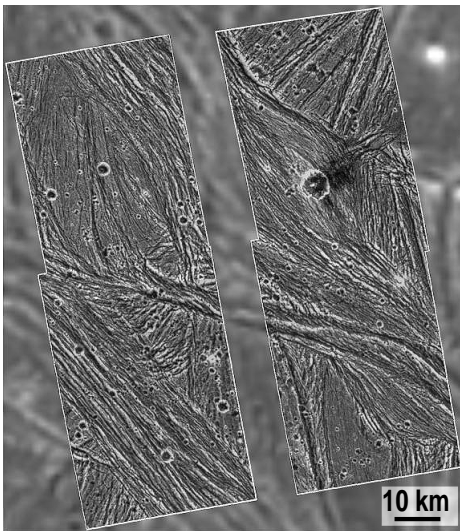
Figure 5-38. Nombre de Rayleigh (a) et flux de chaleur (b) dans le cas où l'océan initial est composé de 15% de NH_3 et dans l'intervalle où la convection est possible. Triton est représenté en pointillés, car la convection n'y est pas possible. $Q=60$ kJ/mol et $\mu_0=10^{12}$ Pa.s.

satellites, et n'est pas responsable de cette différence. En revanche, l'accélération de la gravité est légèrement plus forte sur Ganymède (1,42) que sur Callisto (1,24). A une profondeur donnée, la pression est un peu plus élevée sur Ganymède. Le liquidus (la viscosité) diminue (augmente) plus rapidement dans Ganymède que dans Callisto. L'océan initial de Titan est comparable à ceux de Ganymède et de Callisto. La température de surface est plus faible, ce qui induit un nombre de Rayleigh plus élevé, mais réduit l'intervalle de profondeur dans lequel la convection est possible.

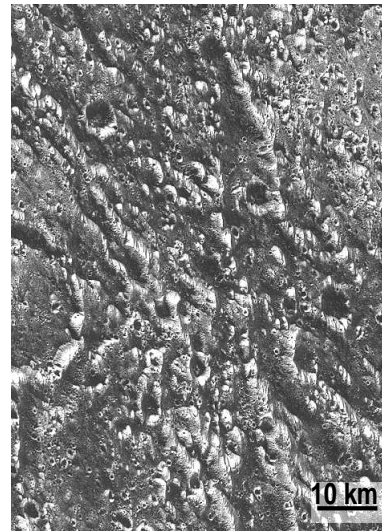
Comme on l'a déjà remarqué dans l'étude du satellite générique, les flux de chaleur diminuent plus rapidement que dans le cas de l'eau pure. Pour Callisto, Φ passe de 50 à 12 mW/m² entre $z=10$ et $z=50$ km (fig. 5-38b). Les flux moyens sont également plus faibles. Entre $z=10$ et $z=50$ km, ils valent 21,4, 22,9 et 19,5 mW/m² pour Ganymède, Callisto et Titan, respectivement. Le flux de chaleur diminue plus rapidement lorsque l'accélération de la gravitation est plus forte. Il est légèrement plus élevé pour Callisto que pour Ganymède. L'influence de la température de surface est visible dans le cas de Titan: Titan évacue moins bien la chaleur que Ganymède et Callisto. Par contre, la chute du flux de chaleur est moins prononcée que pour Ganymède.

Ganymède et de Callisto (détails de la surface)

Ganymède ($R=2634$ km, $M=1,48 \times 10^{23}$ kg, $\rho=1,94$ g/cm³)

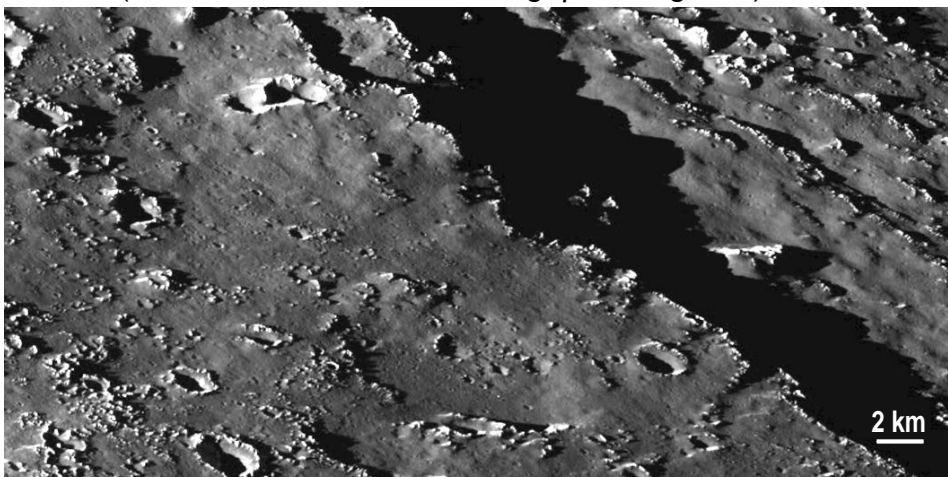


Région d'Uruk Sulcus



Région de Galilée

Callisto ($R=2403$ km, $M=1,08 \times 10^{23}$ kg, $\rho=1,86$ g/cm³)



Région de Valhalla

Au total, la présence d'ammoniaque dans l'océan freine significativement le transport de la chaleur dans l'enveloppe de glace, et inhibe le refroidissement de l'océan. Lorsque le flux de chaleur radioactif est supérieur ou égal au flux de chaleur convectif, l'épaississement de la couche de glace est bloqué. L'enveloppe de glace agit comme un bouchon filtrant : l'énergie qui arrive du noyau est partiellement transférée en surface. La fraction qui n'est pas prise en charge par la convection s'accumule momentanément dans l'océan. Par la suite, le flux de chaleur qui arrive du noyau diminue avec le temps, si bien que l'énergie accumulée est progressivement relâchée en surface. La convection s'arrête lorsque l'enveloppe de glace devient trop épaisse. Deux cas de figure peuvent alors se présenter. Si la cristallisation de l'enveloppe est bloquée avant que l'épaisseur critique n'ait été atteinte, la convection reste possible dans la couche de glace. Dans le cas inverse, l'activité interne cesse et l'océan se refroidit par conduction. Si on prend 25 mW/m^2 comme flux de chaleur radioactif de référence, c'est la première solution qu'il faut retenir. L'épaississement est bloqué assez rapidement: vers $z=20 \text{ km}$ dans le cas de Titan, et pour $z\sim 30 \text{ km}$ dans les cas de Ganymède et de Callisto. Mais là encore, un bilan de chaleur est nécessaire pour quantifier la durée de la cristallisation et calculer l'évolution ultérieure du système. On notera enfin que la lithosphère est nettement plus épaisse que dans le cas de l'eau pure (fig. 5-37b). A $z=50 \text{ km}$, elle vaut 25 km et 20 km respectivement pour Ganymède et Callisto (contre environ 10 km dans le cas de l'eau pure). Evidemment, une lithosphère plus épaisse et une convection moins vigoureuse ne favorisent pas une éventuelle tectonique de surface. En prenant $Ra=10^7$, $\gamma=16$, $z=50 \text{ km}$ et $e_{lit}=25 \text{ km}$, la contrainte lithosphérique est de l'ordre de 10^3 Pa seulement.

5.5.3 - Ganymède et Callisto.

Ganymède et Callisto ont des caractéristiques physiques très semblables. Cette similitude laisse supposer des dynamiques internes très proches, mêmes si des différences plus marquées apparaissent lorsque l'océan contient de l'ammoniaque. La tectonique de surface reflète partiellement la dynamique de la couche de glace. Pourtant, les surfaces de Ganymède et de Callisto sont très différentes. A l'inverse de Ganymède, Callisto possède une surface très cratérisée, mais tectoniquement peu marquée. De plus, cette faible activité tectonique est très âgée: elle remonte à l'époque du bombardement météoritique. Elle n'est donc probablement pas liée à la dynamique interne de Callisto (s'il y en a une) mais plutôt à des phénomènes comme le refroidissement de la lithosphère ou le rejeu de failles après un impact météoritique.

La différence d'aspect entre Ganymède et Callisto est compréhensible si la structure interne de Callisto est demeurée indifférenciée, comme l'ont proposé *Schubert et al.* (1981). Une explication possible serait que la température de la nébuleuse primitive était beaucoup plus faible dans l'environnement de Callisto que dans celui de Ganymède. Ainsi, le profil thermique d'accrétion n'aurait pas permis à Callisto d'acquérir une structure différenciée. Cette hypothèse est infirmée par les dernières mesures de la sonde Galiléo, qui suggèrent que Callisto est différencié. De même, les petites variations des paramètres physiques (rayon et densité) ne sont probablement pas à l'origine des différences observées. En revanche, la composition de l'océan est un paramètre très sensible. Nous avons vu qu'en présence d'ammoniaque, la couche de glace I convectait plus difficilement et évacuait beaucoup moins bien la chaleur que dans le cas d'un océan d'eau pure. De plus, la présence d'ammoniaque en quantité suffisante (5% et plus) épaissit la lithosphère. Au total, il est plus difficile de casser cette lithosphère. Ainsi, il n'est pas évident que la convection de l'enveloppe de glace I induise des structures tectoniques en surface. Si Callisto était initialement plus riche en ammoniaque que Ganymède, son évolution a pu être beaucoup plus rapide. La lithosphère se serait épaissit rapidement, et les contraintes induites par la convection de l'enveloppe de glace n'auraient pas été suffisantes pour la fracturer. Dans cette hypothèse, il faut aussi s'attendre à ce qu'il existe un océan sous l'enveloppe de glace de Callisto : celle-ci ne parvient pas à relâcher le flux radioactif, et elle tend vers une limite. Toujours selon cette hypothèse, on ne peut pas exclure que l'enveloppe de glace de Callisto ait dépassé l'épaisseur critique et que la convection n'ait pas pu s'y poursuivre. Au contraire, s'il contient peu d'ammoniaque, l'océan de Ganymède a cristallisé plus facilement (peut-être même complètement), et la convection dans la couche de glace I est plus vigoureuse. L'enveloppe de glace serait encore aujourd'hui animée de convection. Finalement, l'absence de tectonique sur Callisto pourrait être due aux effets cumulés du renforcement de la lithosphère et de l'affaiblissement de la convection dans la couche de glace I, ces deux effets étant eux-mêmes la conséquence de la présence d'ammoniaque dans l'océan initial.

Ce scénario est valable si l'océan initial de Callisto était effectivement riche en ammoniaque. La présence d'ammoniaque dans l'océan initial des satellites de glace s'appuie essentiellement sur la présence d'ammoniaque dans la nébuleuse primitive, et sur le fait que Titan possède une atmosphère riche en azote, qui pourrait être issue du volcanisme de surface. Mais des recherches actuelles tendent à remettre en question cette présence. Par ailleurs, il suppose que la nébuleuse jovienne était hétérogène, au moins en ce qui concerne l'ammoniaque. Pour l'instant, il n'y a pas d'arguments pour soutenir cette hypothèse.

Conclusion.

Les résultats de ce chapitre précisent l'influence des paramètres de la loi de viscosité de la glace I et des propriétés du satellite. Les paramètres de la loi de viscosité sont très influents, mais sont à priori les mêmes quelque soit le satellite. Par contre, ils restent encore assez mal contraints. De même, on n'a pas de certitude concernant le mécanisme de fluage qui intervient effectivement dans les satellites de glace.

La température de surface, le rayon et la densité ont une influence relativement limitée. Il faut s'écarter significativement des valeurs moyennes définies par le satellite générique pour observer des différences notables (c'est par exemple le cas de Triton). En revanche, la composition de l'océan primordial est un paramètre très sensible. Un océan d'eau liquide a pu cristalliser complètement, si on ne tient pas compte d'un éventuel chauffage interne. A l'inverse, la présence d'ammoniaque affaiblit la convection et impose une épaisseur de glace maximale au delà de laquelle la convection s'arrête. Parallèlement, le transport de chaleur est moins efficace et la lithosphère est beaucoup plus épaisse. La couche de glace I ne parvient pas à transférer en surface toute la chaleur qui arrive à sa base, et l'océan ne peut pas cristalliser complètement.

Les différences observées entre les surfaces de Ganymède et de Callisto pourraient être liées à une différence de composition de l'océan initial. Si Callisto était plus riche en ammoniaque, la convection a été moins vigoureuse et la lithosphère plus épaisse. Ces deux éléments ont alors pu empêcher une tectonique de surface.

Ces quelques remarques, bien que très générales, montrent qu'il est important de tenir compte des variations de viscosité si on veut comprendre l'évolution générale des satellites de glace. Une étude plus approfondie devra écrire le bilan énergétique de l'océan, en estimant le flux de chaleur radioactif réellement disponible à la base de l'océan et en intégrant la chaleur latente de cristallisation. Ainsi, on pourra calculer le temps nécessaire pour l'épaississement de l'enveloppe de glace, et mieux appréhender l'évolution de la structure interne du satellite, tout particulièrement celle de l'océan et de la lithosphère.

Conclusion

*Le dernier homme sur la Terre était assis tout seul dans une pièce.
Il y eut un coup à la porte.*

(Fredric Brown)

La terre se refroidit. La convection du manteau assure le transfert de la chaleur vers la surface. Les modèles de refroidissement doivent estimer la quantité de chaleur effectivement transportée par le manteau. De telles estimations sont établies par les modèles de convection. Elles dépendent donc étroitement des hypothèses d'entrée de ces modèles. De ce point de vue, une approche systématique permet de mieux cerner l'influence exercée par tel ou tel paramètre sur la convection. Dans ce travail, nous avons appliqué ce type d'approche au cas précis des variations de viscosité avec la température. Les précédentes études ont montré qu'une augmentation des variations de viscosité réduisait substantiellement la vigueur et l'efficacité de la convection.

Il est également essentiel de bien comprendre ce qui se passe dans les couches limites thermiques. Ce sont elles en effet qui contrôlent la quantité de chaleur prise en charge par le manteau. Les couches limites qui se développent au sommet et à la base d'un fluide isovisqueux chauffé par en dessous sont équivalentes; mais lorsque la viscosité du fluide dépend de la température, nous avons vu que la couche limite thermique du bas devenait plus active que celle du haut. Pour un fluide newtonien, le saut de température à travers cette couche limite peut s'exprimer assez simplement en fonction d'un seul paramètre décrivant les variations de viscosité. Toujours dans le cas d'un fluide newtonien, on a pu établir une paramétrisation du flux de chaleur en fonction du nombre de Rayleigh et des variations caractéristiques de viscosité. Enfin, on a vu que même à viscosité variable, les conditions aux limites influençaient notablement la structure de l'écoulement. En 2D, une surface mobile permet de maintenir une structure en rouleaux, même pour de grands rapports d'aspect.

Par rapport au problème que pose la convection dans les planètes telluriques, le modèle développé dans ce travail a été nécessairement simplifié. Ainsi, il n'a été tenu compte ni de la géométrie, ni du chauffage interne. Le couvercle conductif qui se forme est une 'lithosphère'

purement thermique. Une modélisation du comportement mécanique de la lithosphère nécessiterait l'emploi d'une rhéologie non-newtonienne.

Cependant, notre modèle permet quelques applications simples et intéressantes. Par exemple, il prévoit un flux de chaleur faible à la limite noyau/manteau (de 2 à 6 TW), ce qui plaide en faveur d'une couche conductrice au sommet du noyau.

Les distributions thermiques issues de ce modèle conduisent, lorsqu'elles sont associées à un modèle pétrologique dépendant de la température, à des profils de vitesse sismique et de densité proches de ceux observés par les modèles sismiques de référence. Les profils synthétiques montrent qu'une couche limite thermique peut, dans certaines conditions, passer sismiquement inaperçue. De même, la viscosité variable réduit l'importance des anomalies de vitesse au niveau des courants ascendants, et donc leur chance d'être détectés par tomographie sismique est également réduite.

Les résultats du modèle numérique permettent de contraindre la convection dans l'enveloppe superficielle des satellites de glace des planètes géantes. La composition de l'océan initial est un paramètre particulièrement sensible. On a montré que la présence éventuelle d'ammoniaque réduirait fortement l'intensité de la convection et le flux de chaleur à travers l'enveloppe de glace. Ainsi, on ne peut pas exclure la possibilité qu'il existe encore aujourd'hui un océan sous l'enveloppe de glace. Une étude plus précise et plus quantitative de l'évolution des satellites de glace passe par un bilan énergétique de l'océan. Cette étude sera mise en œuvre à l'issue de ce travail.

Ces résultats montrent l'importance de la viscosité variable. Cependant, le modèle construit dans ce travail ne permet pas de conclure quant à la structure de la convection mantellaire. D'autres paramètres doivent être examinés. En particulier, il sera intéressant de voir comment, et dans quelles proportions, le chauffage interne et la géométrie sphérique modifient les paramétrisations que l'on a proposées. Ces paramètres ont déjà fait l'objet d'études systématiques pour un fluide isovisqueux, mais encore pas dans le cas d'un fluide à viscosité variable. Enfin, pour mieux décrire la convection dans le manteau, on sera amené à superposer une convection chimique à la convection thermique. Ce type d'approche est aussi une manière originale d'aborder le problème des transitions de phases, et en particulier celui de la limite entre les manteaux inférieur et supérieur de la Terre.

Annexes et références

Sommaire

Annexe 1 : Méthodes numériques	223
A1.1 - Résolution des équations de Navier-Stokes	223
A1.1.1 Schéma numérique ADI	223
A1.1.2 Accélération de la convergence par la méthode multigrille	226
A1.2 - Résolution de l'équation de la chaleur	232
A1.1.1 Schéma numérique	232
A1.1.2 Schéma upwind	232
Annexe 2 : Amplitude de la couche limite	
thermique du haut	235
Références	237
Résumé	249
Abstract	250

Annexe 1: Méthodes numériques.

A1 1- Résolution des équations de Navier-Stokes.

A1 1.1- Shéma numérique ADI.

Etant donné un champ de température, la distribution des vitesses est donnée par la résolution des équations de Navier-Stokes. La recherche des vitesses est d'abord ramenée à un problème en différences finies. Les équations (II-14) sont discrétisées sur une grille de pas vertical Δz et le pas horizontal Δx . Les solutions sont ensuite obtenues par relaxation des équations discrètes, à partir d'un état initial. Le pas de temps de relaxation Δt est choisi en fonction du rapport global de viscosité. Il dépend aussi de la viscosité en chaque point, et du saut de viscosité local selon la direction x ou selon la direction z (en toute rigueur, il faut donc définir un pas de temps Δt_z pour le balayage vertical, et un autre, Δt_x , pour le balayage horizontal). La forme générale de Δt a été déterminée par *Choblet* (communication personnelle), au moyen d'une analyse de Fourier:

$$\Delta t_x(i,j) = \frac{a_1 \exp \left[1,274 \cdot 10^{-4} \left(1 - \frac{\mu(i,j-1)}{\mu(i,j)} \right)^2 \right]}{\mu(i,j) \Delta x^2} \quad \text{pour le balayage en } x$$
$$\Delta t_z(i,j) = \frac{a_1 \exp \left[1,274 \cdot 10^{-4} \left(1 - \frac{\mu(i-1,j)}{\mu(i,j)} \right)^2 \right]}{\mu(i,j) \Delta z^2} \quad \text{pour le balayage en } z$$

a_1 est une constante, fixée en fonction du rapport global de viscosité. La relaxation des pressions utilise un pas de temps légèrement différent, faisant intervenir une deuxième constante, a_2 . La vitesse de convergence est très sensible à la valeur des pas de temps de relaxation sur la vitesse et la pression. Pour obtenir une vitesse de convergence optimale, il faut régler ces valeurs en agissant sur les constantes a_1 et a_2 . Le schéma employé est un schéma implicite, c'est-à-dire que les N éléments d'une ligne (ou d'une colonne) à un instant donné sont calculés simultanément. Cette opération est réalisée en résolvant un système (tridiagonal dans le cas qui nous intéresse) de N équations. Le relaxation ADI (Alternate Direction Implicit) est bien adaptée à la résolution d'équations différentielles partielles bidimensionnelles (voir p.e. *Press et al.*, 1992, pp. 854-862). Elle partage une itération de relaxation en deux temps: réactualisation des vitesses selon la direction verticale (de n à $n+1/2$), puis selon la direction horizontale (de $n+1/2$ à $n+1$), cet ordre

pouvant être inversé. La pression est réactualisée après le balayage vertical et après le balayage horizontal, également par relaxation. Au total, les équations de Navier-Stokes sont discrétisées et résolues à l'aide du schéma numérique suivant:

• balayage vertical:

Composante verticale de la vitesse:

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\Delta t_z/2} = \Delta_{xx}(v^n) + 2\Delta_{zz}(v^{n+1/2}) + \Delta_{zx}(u^n) - \Delta_z(p^n) + f_z \quad \text{avec:}$$

$$\Delta_{zz}(v^{n+1/2}) = \frac{\mu(i,j)v^{n+1/2}(i+1,j) - [\mu(i,j) + \mu(i-1,j)]v^{n+1/2}(i,j) + \mu(i-1,j)v^{n+1/2}(i-1,j)}{\Delta z^2}$$

$$\Delta_{xx}(v^n) = \frac{\mu^{x+}v^n(i,j+1) - (\mu^{x+} + \mu^{x-})v^{n+1/2}(i,j) + \mu^{x-}v^n(i,j-1)}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_{zx}(u^n) = \frac{\mu^{x+} [u^n(i,j+1) - u^n(i-1,j+1)] - \mu^{x-} [u^n(i,j) - u^n(i-1,j)]}{\Delta x \Delta z}$$

$$\Delta_z(p^n) = \frac{p^n(i,j) - p^n(i,j-1)}{\Delta z}$$

Composante horizontale de la vitesse:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t_z/2} = 2\Delta_{xx}(u^n) + \Delta_{zz}(u^{n+1/2}) + \Delta_{xz}(v^{n+1/2}) - \Delta_x(p^n) + f_x \quad \text{avec:}$$

$$\Delta_{xx}(u^n) = \frac{\mu(i,j)u^n(i,j+1) - [\mu(i,j) + \mu(i,j-1)]u^{n+1/2}(i,j) + \mu(i,j-1)u^n(i,j-1)}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_{zz}(u^{n+1/2}) = \frac{\mu^{z+}u^{n+1/2}(i+1,j) - (\mu^{z+} + \mu^{z-})u^{n+1/2}(i,j) + \mu^{z-}u^{n+1/2}(i-1,j)}{\Delta z^2}$$

$$\Delta_{xz}(v^{n+1/2}) = \frac{\mu^{z+} [v^{n+1/2}(i+1,j) - v^{n+1/2}(i+1,j-1)] - \mu^{z-} [v^{n+1/2}(i,j) - v^{n+1/2}(i,j-1)]}{\Delta x \Delta z}$$

$$\Delta_x(p^{n+1/2}) = \frac{p^n(i,j) - p^n(i,j-1)}{\Delta x}$$

• balayage horizontal:

Composante verticale de la vitesse:

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\Delta t_x/2} = \Delta_{xx}(v^{n+1}) + 2\Delta_{zz}(v^{n+1/2}) + \Delta_{zx}(u^{n+1/2}) - \Delta_z(p^{n+1/2}) + f_z \quad \text{avec:}$$

$$\Delta_{zz}(v^{n+1/2}) = \frac{\mu(i,j)v^{n+1/2}(i+1,j) - [\mu(i,j) + \mu(i-1,j)]v^{n+1}(i,j) + \mu(i-1,j)v^{n+1/2}(i-1,j)}{\Delta z^2}$$

$$\Delta_{xx}(v^{n+1}) = \frac{\mu^{x+}v^{n+1}(i,j+1) - (\mu^{x+} + \mu^{x-})v^{n+1}(i,j) + \mu^{x-}v^{n+1}(i,j-1)}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_{zx}(u^{n+1/2}) = \frac{\mu^{x+} [u^{n+1/2}(i,j+1) - u^{n+1/2}(i-1,j+1)] - \mu^{x-} [u^{n+1/2}(i,j) - u^{n+1/2}(i-1,j)]}{\Delta x \Delta z}$$

$$\Delta_z(p^{n+1/2}) = \frac{p^{n+1/2}(i,j) - p^{n+1/2}(i,j-1)}{\Delta z}$$

Composante horizontale de la vitesse:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t_x/2} = 2\Delta_{xx}(u^{n+1}) + \Delta_{zz}(u^{n+1/2}) + \Delta_{xz}(v^{n+1}) - \Delta_x(p^{n+1/2}) + f_x \quad \text{avec :}$$

$$\Delta_{xx}(u^{n+1}) = \frac{\mu(i,j)u^{n+1}(i,j+1) - [\mu(i,j) + \mu(i,j-1)]u^{n+1}(i,j) + \mu(i,j-1)u^{n+1}(i,j-1)}{\Delta x^2}$$

$$\Delta_{zz}(u^{n+1/2}) = \frac{\mu^{z+}u^{n+1/2}(i+1,j) - (\mu^{z+} + \mu^{z-})u^{n+1/2}(i,j) + \mu^{z-}u^{n+1/2}(i-1,j)}{\Delta z^2}$$

$$\Delta_{xz}(v^{n+1}) = \frac{\mu^{z+} [v^{n+1}(i+1,j) - v^{n+1}(i+1,j-1)] - \mu^{z-} [v^{n+1}(i,j) - v^{n+1}(i,j-1)]}{\Delta x \Delta z}$$

$$\Delta_x(p^{n+1/2}) = \frac{p^{n+1/2}(i,j) - p^{n+1/2}(i,j-1)}{\Delta x}$$

La viscosité pondère les dérivées de vitesses. Le choix des grilles entrelacées entraîne que toutes ces dérivées ne sont pas nécessairement calculées au centre des cellules. Certaines sont en fait calculées au noeuds de grille, ce qui conduit à interpoler la viscosité à partir des 4 plus proches voisins de chacun de ces noeuds:

$$\mu^{z+} = \frac{1}{4} [\mu(i+1,j) + \mu(i,j) + \mu(i+1,j-1) + \mu(i,j-1)]$$

$$\mu^{z-} = \frac{1}{4} [\mu(i,j) + \mu(i-1,j) + \mu(i,j-1) + \mu(i-1,j-1)]$$

$$\mu^{x+} = \frac{1}{4} [\mu(i,j+1) + \mu(i-1,j+1) + \mu(i,j) + \mu(i-1,j)]$$

$$\mu^{x-} = \frac{1}{4} [\mu(i,j) + \mu(i-1,j) + \mu(i,j-1) + \mu(i-1,j-1)]$$

A1 1.2- Accélération de la convergence par la méthode multigrille.

La résolution des équations de Navier-Stokes directement sur une grille fine est coûteuse en temps de calcul. La méthode multigrille est une technique d'accélération de la convergence des équations de Navier-Stokes (p.e. *Stüben and Trottenberg, 1982*). Elle ramène le temps de calcul à des valeurs plus acceptables.

A1 1.2.1- Description de la méthode.

Le principe de la méthode multigrille est de résoudre le problème posé sur la grille la plus fine en utilisant des grilles auxiliaires de maillages plus grossiers, donc moins coûteuses en temps de calcul. Plus précisément, les grilles intermédiaires servent à calculer les erreurs induites par la résolution partielle des équations de Navier-Stokes sur la grille fine. La résolution exacte n'est réalisée que sur la grille la plus grossière.

Le cycle multigrille est initialisé en calculant une valeur approchée des champs de pression et de vitesse (P^{app} et \mathbf{V}^{app}) en chaque point de la grille la plus fine. Quelques itérations de relaxation sur cette grille conduisent à P^{app} et \mathbf{V}^{app} . Au lieu de satisfaire le système exact,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{V} - \nabla P + \mathbf{f} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (A1-1)$$

P^{app} et \mathbf{V}^{app} sont solution des équations:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{V}^{app} - \nabla P^{app} + \mathbf{f} = \mathbf{r}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^{app} = s_1 \end{cases} \quad (A1-2)$$

où \mathbf{r}_1 est le résidu en vitesse (\mathbf{r}_1 a une composante dans chaque direction d'espace) et s_1 le résidu en pression. Cette approximation induit des erreurs (ou défauts) sur les champs de pression et de vitesse, respectivement d_1 et \mathbf{e}_1 :

$$d_1 = P - P^{app} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{V} - \mathbf{V}^{app} \quad (A1-3)$$

La validité de la méthode multigrille repose sur le fait que les opérateurs $\Theta = \Delta \bullet - \nabla \bullet + \bullet$ et $\nabla \bullet$ sont linéaires: la somme de deux solutions de ces opérateurs est elle-même solution de ces opérateurs. En retranchant les équations (A1-2) au système exact, on obtient les équations vérifiées par les erreurs sur les vitesses et les pressions:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{e}_1 - \nabla d_1 + \mathbf{r}_1 = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{e}_1 + s_1 = 0 \end{cases} \quad (A1-4)$$

Le résidu \mathbf{r}_1 et s_1 jouent le rôle des forces de volume.

A priori, la résolution de (A1-4) sur la grille fine est aussi coûteuse que celle de (A1-1). C'est pourquoi les résidus \mathbf{r}_1 et s_1 et sont transférés sur une grille plus grossière, l'opérateur de transfert réalisant une moyenne arithmétique des résidus de la grille fine. En général, cette nouvelle grille est encore trop coûteuse pour que l'on puisse y résoudre (A1-4) exactement, et ce sont de nouveau des valeurs approchées (cette fois-ci de \mathbf{e}_1 et d_1) que l'on cherche d'abord à déterminer:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{e}_1^{\text{app}} - \nabla d_1^{\text{app}} + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{e}_1^{\text{app}} + s_1 = s_2 \end{cases}$$

introduisant de ce fait des erreurs au second ordre:

$$d_2 = d_1 - d_1^{\text{app}} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^{\text{app}}$$

L'enchaînement *Calcul approché des erreurs-Calcul et transfert des résidus* est ainsi réitéré sur une série de grilles k , de moins en moins fines:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{e}_k^{\text{app}} - \nabla d_k^{\text{app}} + \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{e}_k^{\text{app}} + s_k = s_{k+1} \end{cases} \quad (\text{A1-5})$$

avec:

$$d_k = d_{k-1} - d_{k-1}^{\text{app}} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1} - \mathbf{e}_{k-1}^{\text{app}} \quad (\text{A1-6})$$

On parvient finalement sur la grille la plus grossière (grille N) dont la taille est maintenant suffisamment petite pour se permettre d'y résoudre exactement les erreurs au N^{ième} ordre.

Dans la seconde partie du cycle (phase de remontée), la détermination exacte des \mathbf{e}_N et d_N se propage sur les grilles plus fines, donnant accès aux \mathbf{e}_k et d_k , puis à \mathbf{V} et P . Lors de chaque passage d'une grille k vers une grille $k-1$, on détermine \mathbf{e}_{k-1} et d_{k-1} à l'aide des relations (A1-6):

$$d_{k-1} = d_{k-1}^{\text{app}} + d_k \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{e}_{k-1}^{\text{app}} + \mathbf{e}_k \quad (\text{A1-7})$$

\mathbf{e}_k et d_k sont interpolés à partir des résultats de la grille k , $\mathbf{e}_{k-1}^{\text{app}}$ et d_{k-1}^{app} sont les erreurs approchées d'ordre $k-1$ calculées au cours de la phase de descente du cycle, et que l'on a gardé en mémoire. Sur la grille $k-1$, quelques itérations de relaxation (avec, comme valeurs initiales, les \mathbf{e}_{k-1} et d_{k-1} calculées par A1-7) permettent d'obtenir des valeurs plus précises de \mathbf{e}_{k-1} et d_{k-1} , avant d'accéder à la grille supérieure. Ces itérations de relaxation se justifient par le fait que l'interpolation des erreurs de la grille k sur la grille $k-1$ introduit de petites inexactitudes.

Dans notre code 2D, nous avons choisi de partir d'une grille fine comportant $2^n \times 2^m$ cellules (n et m n'étant pas forcément égaux). Les grilles suivantes sont obtenues en divisant par deux le

nombre de points dans chaque dimension (sauf dans le cas d'une grille rectangulaire, où le processus multigrille est stopé dans la dimension comportant le moins de points, alors qu'il se poursuit dans l'autre direction), jusqu'à la grille la plus grossière, de définition $2^{(n+1-l)} \times 2^{(m+1-k)}$. La condition $l=n$ et $k=m$ et k n'est pas nécessaire, et l'on verra au contraire que de meilleurs résultats peuvent être obtenus en choisissant des grilles finales 4×4 par exemple.

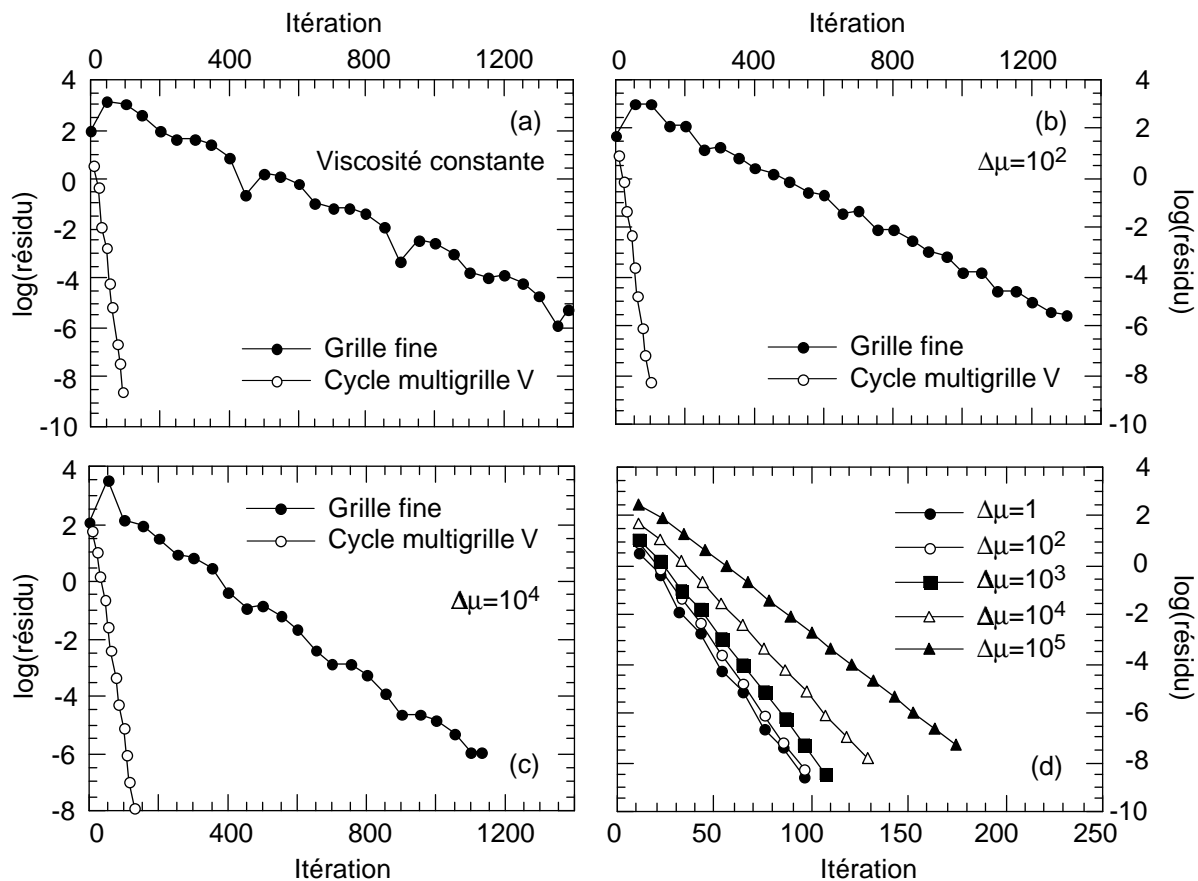


Figure A1-1. Efficacité du cycle multigrille. (a) viscosité constante; (b) $\Delta\mu=10^2$; (c) $\Delta\mu=10^4$; (d) cycle multigrille en V pour différents rapports de viscosité. Les abscisses sont graduées en itérations de grille fine. Coefficients de relaxation: $\omega=9$ et $\alpha=0,4$. Bords libres, $Ra=10^5$.

A1 1.2.2- Efficacité du cycle multigrille.

Pour tester l'efficacité du cycle multigrille (MGI), on compare, à conditions initiales identiques, une série de calculs réalisés sur une grille fine (de taille 32×32) seule, avec une seconde série utilisant la méthode MGI (fig. A 1-1). Le cycle MGI utilisé est un cycle en V simple (5 grilles, de 32×32 à 2×2). Il ressort de ces tests que la méthode MGI est efficace, aussi bien à viscosité constante qu'à viscosité variable. Cet avantage diminue sensiblement lorsque le rapport de viscosité augmente : le gain est d'un facteur 15 à viscosité constante, et seulement de 8 pour

$\Delta\mu=10^4$. Cette perte d'efficacité (voir aussi fig. A1-1 a) peut être compensée par un meilleur ajustement du pas de temps de relaxation (choix de ces coefficients a_1 et a_2). A noter, également, que la chute du résidu est plus régulière (linéaire) dans le cas du cycle MGI.

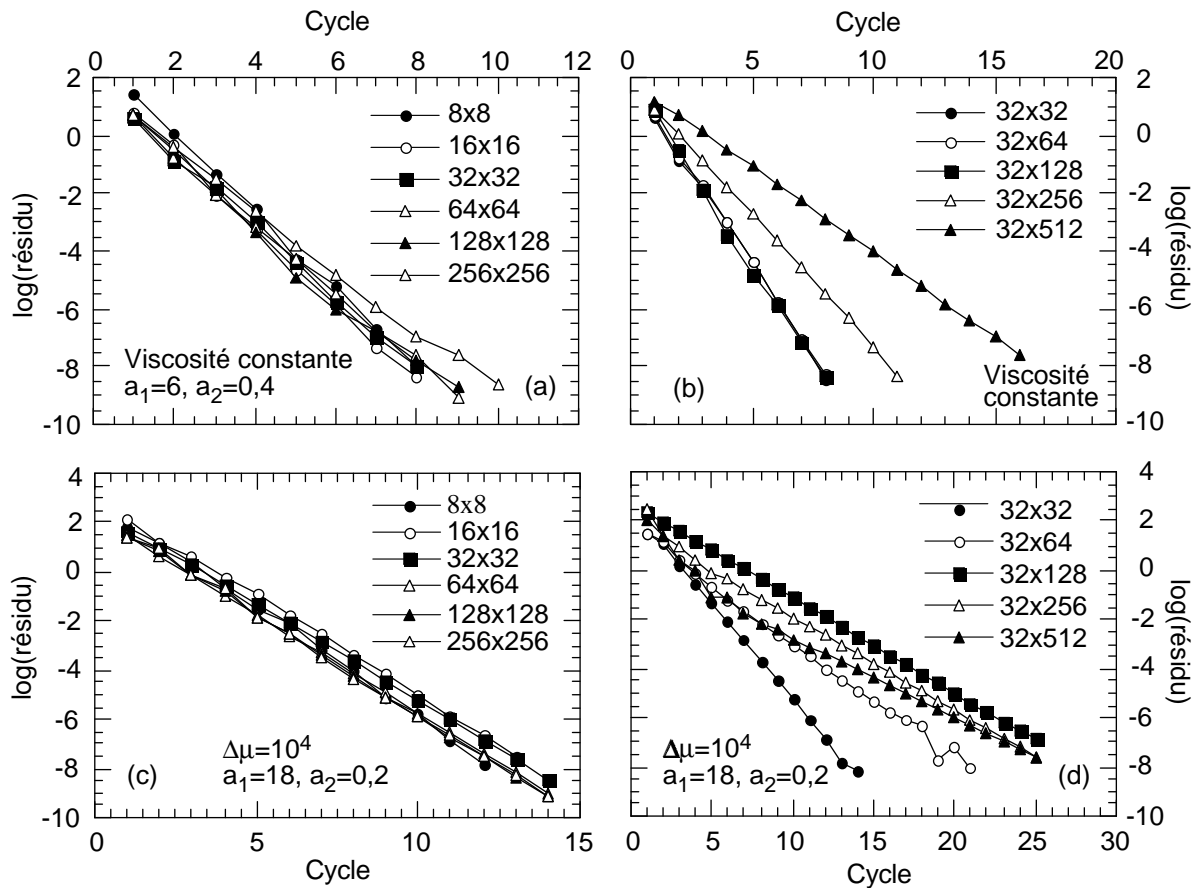


Figure A1-2. Test de convergence de la méthode multigrille: chute des résidus en pression. (a) et (b) viscosité constante. (c) et (d) $\Delta\mu=10^4$. Résultats obtenus pour 4 bords libres, perturbation de température sinusoidale. Cycle multigrille V complet.

A1 1.2.3- Test de convergence.

Chaque cycle multigrille permet de diminuer la valeur des résidus sur les champs de vitesses et de pression. Le rapport entre la valeur des résidus en fin et en début de cycle quantifie le gain obtenu au cours d'un cycle. La méthode multigrille prévoit que chaque cycle a la même efficacité. En d'autres termes, la chute des résidus doit être linéaire: si r_i est le résidu (en pression ou en vitesse) à la fin du $i^{\text{ème}}$ cycle, la fonction f définie par $\log(r_i)=f(i)$ est représentée par une droite. Par ailleurs, étant donné un jeu de paramètres physiques et de relaxation, l'efficacité du multigrille est indépendante de la définition de la grille fine (la grille de départ) : les droites représentant la chute des résidus pour des grilles de départ de différentes finesses doivent être

colinéaires. En revanche, le nombre de cycles multigrille nécessaires pour arriver à convergence dépend des valeurs initiales (au début du premier cycle) des résidus de grille fine, qui peuvent varier avec la finesse de cette grille.

Dans l'ensemble, les tests réalisés pour des grilles de différentes définitions (fig. A1-2) montrent que la méthode multigrille est bien adaptée à la résolution des équations de Navier-Stokes. Les critères cités plus haut sont relativement bien respectés. Ceci n'est plus vrai dans le cas de boîtes rectangulaires. Le cycle multigrille en V n'est pas adapté à des grilles de rapport géométrique supérieur ou égal à 4.

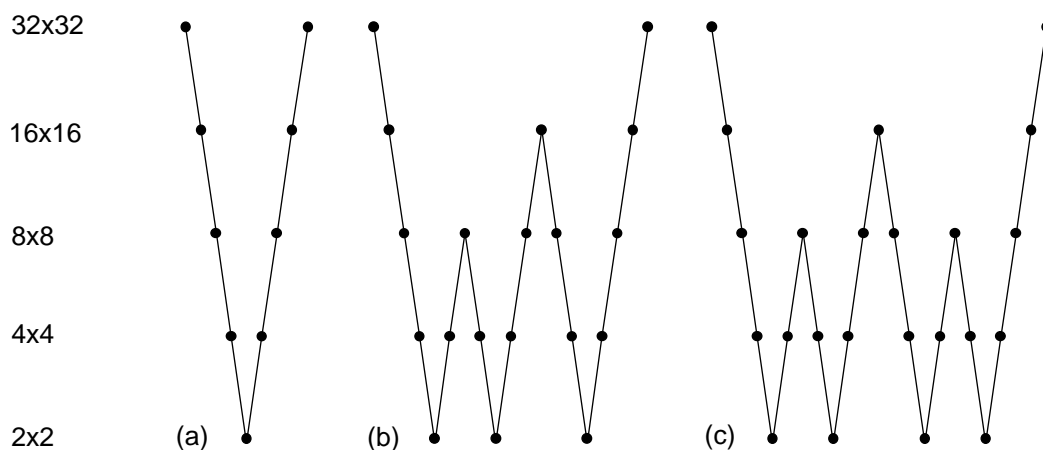


Figure A1-3. Trois cycles multigrille, à partir d'une grille fine 32x32. (a) Cycle en V: 5 grilles. (b) Full multigrille: 5 grilles et 1 pic intermédiaire, sur la grille 16x16. (c) Cycle en W complet: 5 grilles et 3 pics intermédiaires, respectivement sur les grilles 8x8, 16x16 et 8x8). Le cycle en W simplifié, non représenté, comporte 1 pic intermédiaire sur la grille 16x16.

A1 1.2.4- Choix du cycle multigrille.

Le cycle en V n'est pas le seul possible. Le type de cycle MGI, et le nombre de grilles utilisées peuvent avoir une influence sur la vitesse de convergence. En particulier, la morphologie du cycle en V (descente jusqu'à la grille la plus grossière, puis remontée directe vers la grille fine) n'est pas imposée par la méthode MGI. On peut choisir d'autres structures, dont le 'full' multigrille (F) et le cycle en W (fig. A1-3). Le principe est simple: descente jusqu'à la grille la plus grossière, puis remonté vers une grille intermédiaire avant le retour sur la grille la plus fine (cette opération pouvant être répétée plusieurs fois). A chaque passage sur la grille la plus grossière, la relaxation calcule la solution exacte. Nous avons testé 2 types de cycles en W: cycle W complet (3 pics intermédiaires) et simplifié (un seul pic intermédiaire). Les cycles en W permettent un gain sensible quelque soit le rapport de viscosité (fig. A1-4). Cette efficacité augmente avec $\Delta\mu$, et la

structure en W devient réellement intéressante à partir de $\Delta\mu=10^4$. Le cycle en W est également mieux adapté que le cycle en V pour la détermination des équations de Navier-Stokes sur des grilles rectangulaires (fig. A1-4 e et f). Le 'full' multigrille n'a pas été exploré systématiquement dans cette étude. Les quelques essais qui ont été effectués montrent des qualités comparables à celles du cycle W complet.

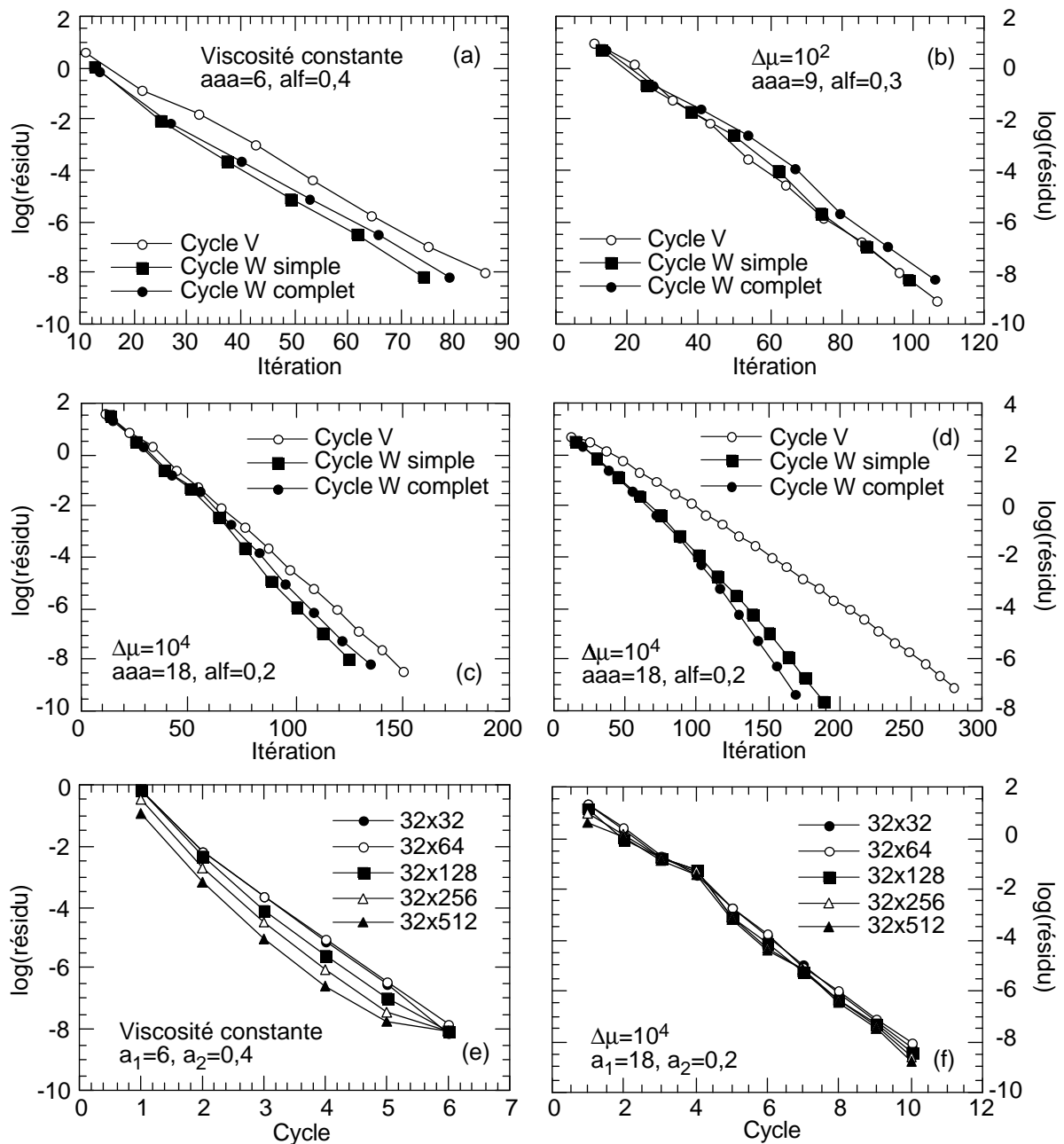


Figure A1-4. Intérêt du cycle en W. (a-d) comparaison des cycles en V et en W. (e et f) tests de convergence pour des grilles rectangulaires. (a et e) viscosité constante, (b) $\Delta\mu=10^2$, (c et f) $\Delta\mu=10^4$, (d) $\Delta\mu=10^6$. Conditions aux limites de bords libres. $Ra=10^5$. Tolérance des défauts finaux: 10^{-6} .

D'autre part, il n'est pas nécessaire de descendre jusqu'à la grille la plus grossière (grille 2x2). On peut en fait restreindre le cycle à un nombre donné de grilles, en s'arrêtant par exemple sur l'avant dernière grille (grille 4x4). Le gain apporté par cette variante n'est pas évident pour des conditions initiales de température classiques (perturbation sinusoïdale, profil conductif). En revanche, pour des champs de température plus compliqués (profils convectifs), elle peut devenir nécessaire (fig. A1-5) : les fortes variations de viscosité (induites par les couches limites thermiques) requièrent une précision minimale pour assurer la convergence du calcul numérique.

A1 2- Résolution de l'équation de la chaleur.

A1 2.1- Shéma numérique.

La résolution de l'équation adimensionnée de la température (système 2-11) est également traitée par un méthode en différence finie, mais explicite cette fois-ci. La température, grandeur scalaire, est déterminée au centre de chaque cellule délimitée par la grille fine. La température vérifie:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \Delta(T^n) - \left[u^n \Delta_x(T^n) + v^n \Delta_z(T^n) \right] + h_s$$

$$\Delta(T^n) = \frac{T^n(i, j+1) - 2T^n(i, j) + T^n(i, j-1)}{\Delta x^2} + \frac{T^n(i+1, j) - 2T^n(i, j) + T^n(i-1, j)}{\Delta z^2}$$

avec: $\Delta_x(T^n) = \frac{T^n(i, j+1) - T^n(i, j-1)}{2\Delta x}$

$$\Delta_z(T^n) = \frac{T^n(i+1, j) - T^n(i-1, j)}{2\Delta z}$$

Le pas de temps Δt est différent du pas de temps de la relaxation introduit pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

A1 2.2- Shéma Upwind.

A1 2.2.1- Intérêt et définition de la méthode.

Le terme d'advection de la chaleur ($\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$) est à l'origine d'instabilités numériques, si on utilise tel quel le shéma explicite précédent. Les perturbations de température créées par ce terme advectif doivent suivre la direction de l'écoulement. Par exemple, si $u^n(i, j)$ est positive, ce qui se passe au point $(i, j+1)$ à l'instant n ne devrait pas (ou peu) affecter le terme advectif et donc la température $T^{n+1}(i, j)$. Le schéma simple du § A2-1 calcule $T^{n+1}(i, j)$ à partir des 4 plus proches

voisins de $T^n(i,j)$ pris à l'instant n , sans tenir compte de la direction de l'écoulement. Cela se traduit par une diffusion artificielle, purement numérique, qui induit des erreurs et peut faire diverger le calcul. Il est possible de réduire ces erreurs en tenant compte de la direction locale de l'écoulement. Les schémas dit "Upwind" ont précisément cette propriété. L'idée générale de ce type de schémas est d'accorder plus de poids aux points situés en amont de l'écoulement qu'à ceux situés en aval. Le modèle Upwind le plus simple prend en considération le sens du vecteur vitesse, mais pas sa norme (p.e. *Press et al.*, 1992, pp. 831-833). Il attribue un poids nul aux points situés en amont de l'écoulement. Selon que le signe de la vitesse est positif ou négatif, le gradient de température est calculé à partir de la dérivée à gauche ou de la dérivée à droite de la température. Soit, en deux dimensions:

$$u^n \Delta_x(T^n) = u^n(i,j) \begin{cases} \frac{T^n(i,j) - T^n(i,j-1)}{\Delta x}, & u^n(i,j) > 0 \\ \frac{T^n(i,j+1) - T^n(i,j)}{\Delta x}, & u^n(i,j) < 0 \end{cases}$$

et

$$v^n \Delta_z(T^n) = v^n(i,j) \begin{cases} \frac{T^n(i,j) - T^n(i-1,j)}{\Delta z}, & v^n(i,j) > 0 \\ \frac{T^n(i+1,j) - T^n(i,j)}{\Delta z}, & v^n(i,j) < 0 \end{cases}$$

Numériquement, ce résultat est satisfait en pondérant les dérivées à gauche et à droite :

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = A \left[\frac{T^n(i,j) - T^n(i,j-1)}{\Delta x} \right] + B \left[\frac{T^n(i,j+1) - T^n(i,j)}{\Delta x} \right]$$

$$+ C \left[\frac{T^n(i,j) - T^n(i-1,j)}{\Delta z} \right] + D \left[\frac{T^n(i+1,j) - T^n(i,j)}{\Delta z} \right]$$

avec

$$A = \frac{u^n(i,j) - |u^n(i,j)|}{2} \quad B = \frac{u^n(i,j) + |u^n(i,j)|}{2}$$

$$C = \frac{v^n(i,j) - |v^n(i,j)|}{2} \quad D = \frac{v^n(i,j) + |v^n(i,j)|}{2}$$

A1 2.2.2- Le schéma exponentiel.

La correction apportée par le schéma Upwind donne de bons résultats lorsque le nombre de Péclet du système est voisin de l'unité. Dans le cas de la convection thermique dans les manteaux planétaires, le temps de diffusion de la chaleur est très supérieur au temps caractéristique de convection, ce qui conduit à des nombres de Péclet élevés: en prenant respectivement pour la

vitesse, la longueur et la diffusivité thermique caractéristiques $V=1$ cm/an, $b=660$ km et $\kappa=10^{-6}$ m²/s , on a pour le manteau supérieur de la Terre: $Pe=Vb/\kappa\sim 210$. A ces valeurs, les résultats du schéma Upwind en 2D sont beaucoup moins performants (le problème 1D reste lui bien approché par un simple Upwind). *Spalding* [1972] (voir aussi *Patankar*, 1980, pp. 79-109) remplace les poids du schéma Upwind traditionnel par des coefficients dépendant exponentiellement du nombre de Péclet. Ces coefficients permettent de calculer numériquement la solution exacte du problème 1D (fig. A2). Dans le problème 2D, la solution numérique s'écarte de la solution exacte, mais reste beaucoup plus efficace que l'Upwind traditionnel. Ecrits en variables adimensionnées (et pour le cas particulier où la température est estimée au centre de l'intervalle), les coefficients exponentiels du problème 2D sont:

$$f_x^+(i, j) = \frac{1}{1 + \exp[u(i, j)dx / 2]} \quad f_x^-(i, j) = \frac{\exp[u(i, j)dx / 2]}{1 + \exp[u(i, j)dx / 2]}$$

$$f_z^+(i, j) = \frac{1}{1 + \exp[v(i, j)dz / 2]} \quad f_z^-(i, j) = \frac{\exp[v(i, j)dz / 2]}{1 + \exp[v(i, j)dz / 2]}$$

et le terme advectif est calculé par:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{f_x^+(i, j)T^n(i, j) - f_x^-(i, j)T^n(i, j-1)}{\Delta x} + \frac{f_x^+(i, j+1)T^n(i, j+1) - f_x^-(i, j+1)T^n(i, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{f_z^+(i, j)T^n(i, j) - f_z^-(i, j)T^n(i-1, j)}{\Delta z} + \frac{f_z^+(i+1, j)T^n(i+1, j) - f_z^-(i+1, j)T^n(i, j)}{\Delta z}$$

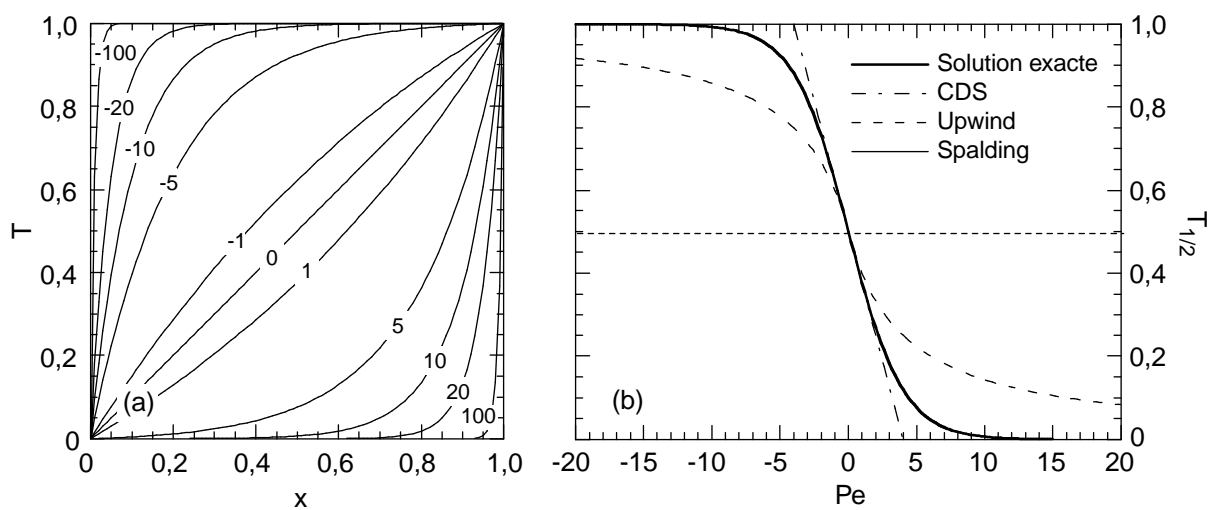


Figure A1-5. (a) Solution exacte de l'équation de diffusion en 1D , pour différentes valeurs du nombre de Péclet. (b) Comparaison de différents schémas numériques pour la résolution 1D de l'équation de la chaleur.

Annexe 2: Amplitude de la couche limite thermique du haut

Dans le cas du régime de couvercle, toute l'épaisseur du fluide ne participe pas à la convection. La couche limite thermique du haut ne s'étend pas jusqu'en surface, et cède la place à un couvercle rigide et conducteur. L'analyse dimensionnelle développée par *Davaille et Jaupart* (1993) donne une expression de la différence de température dans cette couche limite (ΔT_e) en fonction d'une échelle de température visqueuse (ΔT_v). Davaille et Jaupart font le raisonnement pour un fluide chauffé en volume, et une petite modification doit être apportée dans le cas d'un chauffage par en dessous, liée l'apparition d'une couche limite à la base du fluide.

Le flux de chaleur en surface (q_s) est d'abord adimensionnalisé par rapport au flux purement conducteur qui existerait, s'il n'y avait pas de convection, dans un milieu d'épaisseur d traversé par une différence de température ΔT . Le flux adimensionné \hat{q} est une fonction des paramètres sans dimension du problème:

$$\hat{q} = \frac{q_s}{k \Delta T / d} = f_1(Ra_h^+, \gamma) \quad (A2-1)$$

γ mesure les variations locales de viscosité. Dans le cas d'une loi de viscosité exponentiel, il est égal au logarithme du contraste de viscosité à travers le fluide. Il entre dans le calcul de la viscosité. Ra_h^+ est le nombre de Rayleigh de champ lointain, pour la moitié supérieure du fluide. Il caractérise l'importance relative des forces de poussée dans cette partie du fluide, en ignorant l'influence de la moitié inférieure (celle-ci est considérée comme un milieu semi-infini). Ra_h^+ est donné par:

$$Ra_h^+ = \frac{\rho g \alpha \Delta T_h^+ (d/2)^3}{\mu \kappa} \quad (A2-2)$$

où ΔT_h^+ est le saut de température à travers la moitié supérieure. Le flux de surface est alors:

$$q_s = \frac{k}{2} \left(\frac{\rho g \alpha}{\mu \kappa} \right)^{1/3} (\Delta T_h^+)^{1/3} \Delta T \cdot f_2(\gamma) \quad (A2-3)$$

Dans le cas d'un chauffage interne, $\Delta T_h^+ = \Delta T$. Mais pour un fluide chauffé par la base, une petite partie de ΔT (ΔT_b^+) est absorbée par la couche limite thermique du bas.

Seule une partie de la couche limite du haut est instable, le couvercle ne participant pas à la convection. Le saut de température requis pour le développement d'instabilités, ΔT_e , est différent de ΔT_h^+ . Le flux de chaleur en surface doit vérifier:

$$q_s = k \left(\frac{\rho g \alpha}{\mu \kappa} \right)^{1/3} \Delta T_e^{4/3} \quad (\text{A2-4})$$

La différence $\Delta T_b^+ = \Delta T - \Delta T_h^+$, et les équations (A2-3) et (A2-4), conduisent à:

$$\Delta T_e = \Delta T \left(1 - \frac{\Delta T_b^+}{\Delta T} \right)^{1/4} \left[\frac{f_2(\gamma)}{2} \right]^{3/4} \quad (\text{A2-5})$$

ΔT_b^+ peut s'exprimer simplement en fonction de ΔT et de γ (Morris et Canright, 1984). Une approximation de (A2-5) est obtenue alors en supposant que $\Delta T_b^+ \ll \Delta T$:

$$\Delta T_e = a \Delta T \cdot f_3(\gamma) + b \quad (\text{A2-6})$$

où a et b sont deux constantes.

Une échelle de température visqueuse, ΔT_v , peut être définie dans la zone où les instabilités sont confinées (Davaille et Jaupart, 1993). Cette échelle représente les variations relatives de viscosité induites par le saut de température dans la couche limite:

$$\Delta T_v = - \frac{\mu(\bar{T})}{\frac{d\mu}{dT}(\bar{T})} \quad (\text{A2-7})$$

(A2-7) revêt une forme particulièrement simple dans le cas d'une loi exponentielle : $\Delta T_v = \Delta T / \gamma$.

Elle permet de réécrire (A2-6):

$$\Delta T_e = c_1 / \gamma + c_2 \quad (\text{A2-8})$$

avec $c_1 = a / \Delta T$ et $c_2 = b$.

Références

- Akagi, M. et S. Akimoto, 1979, High pressure equilibria in a garnet lherzolite with special reference to Mg^{2+} - Fe^{2+} partitioning among constituent minerals, *Phys. Earth Planet. Int.*, **19**, 31-51.
- Allègre, C.J., G. Manhès et C. Göpel, 1995, The age of the Earth, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **59**, 1445-1456.
- Allègre, C.J., A. Hofmann et K. O'Nions, 1996, The Argon constraints on mantle structure, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 3555-3557.
- Anderson, O.L., 1980, The temperature of the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, **85**, 7003-7010.
- Anderson, D.L. et J.B. Minster, 1980, Seismic velocity, attenuation and rheology of the upper mantle, in *Source mechanism and earthquake prediction*, edited by C.J. Allègre, pp. 13-22, Editions du CNRS, Paris.
- Ashby, M.F. et R.A. Verrall, 1977, Micromechanisms of flow and fracture, and their relevance to the rheology of the upper mantle, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, **288**, 59-95.
- Bai, Q., S.J. Mackwell et D.L. Kohlstedt, 1991, High-temperature creep of olivine single crystals. 1. Mechanical results for buffered samples, *J. Geophys. Res.*, **96**, 2441-2463.
- Beauchesne, S. et J.-P. Poirier, 1989, Creep of barium titanate perovskite: a contribution to a systematic approach to the viscosity of the lower mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, **55**, 187-199.
- Bercovici, D., G. Schubert et G.A. Glatzmaier, 1989, Three-dimensional spherical models of convection in the Earth's mantle, *Science*, **244**, 950-954.
- Bergholz, R.F., M.M. Chen and F.B. Cheung, Generalization of heat-transfer results for turbulent free convection adjacent to horizontal surfaces, 1979, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **22**, 763-769.
- Bertrand, P., C. Sotin, J.-C. Mercier et E. Takahashi, 1986, From the simplest chemical system to the natural one : garnet peridotite barometry, *Contrib. Mineral. Petrol.*, **93**, 168-178.
- Bina, C.R. et G. Helffrich, Phase transition Clapeyron slopes and transition zone seismic discontinuity topography, 1994, *J. Geophys. Res.*, **99**, 15853-15860.
- Bindschadler, D.L., G. Schubert et W.M. Kaula, 1992, Coldspots and hotspots: global tectonics and mantle dynamics of Venus, *J. Geophys. Res.*, **97**, 13495-13532.
- Blankenbach, B., F. Busse, U. Christensen, L. Cserepes, D. Gunkel, U. Hansen, H. Harder, G. Jarvis, M. Koch, G. Marquart, D. Moore, P. Olson, H. Schmeling and T. Schnaubelt, 1989, A benchmark comparison for mantle convection codes, *Geophys. J. Int.*, **98**, 23-38.

- Booker, J.R., 1976, Thermal convection with strongly temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, **76**, 741-754.
- Booker, J.R. et K.C. Stengel, 1978, Further thoughts on convective heat transport in a variable-viscosity fluid, *J. Fluid Mech.*, **86**, 289-291.
- Buffet, B.A., H.E. Huppert, J.R. Lister et A.W. Woods, 1992, Analytical model for solidification of the Earth core, *Nature*, **356**, 329-331.
- Busse, F.H., 1967a, On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math. and Phys.*, **46**, 140-149.
- Busse, F.H., 1967b, The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle, *J. Fluid Mech.*, **30**, 625-649.
- Busse, F.H. et J.A. Whitehead, 1971, Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.*, **47**, 305-320.
- Carter, N.L. et H.G. Ave'Lallemant, 1970, High temperature flow of dunite and peridotite, *Bull. Geol. Soc. Am.*, **81**, 2181-2202.
- Cassen, P.M., Peale, S.J. et R.T. Reynolds, 1981, Structure and thermal evolution of the Galilean satellites, in *The satellites of Jupiter*, edited by D. Morrison, Univ. of Arizona Press, Tucson.
- Cazenave, A., A. Souriau et K. Dominh, 1989, Global coupling of Earth surface topography with hotspots, geoid and mantle heterogeneities, *Nature*, **340**, 54-57.
- Chandrasekhar, S., 1981, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, 2nd edn., 652 pp., Clarendon Press, New-York.
- Chen, G., R. Miletich, K. Mueller et H.A. Spetzler, 1997, Shear and compressional mode measurements with Ghz ultrasonic interferometry and velocity-composition systematics for the pyrope-almandine solid solution series, *Phys. Earth Planet. Int.*, **99**, 273-287.
- Chizhov, V.E., 1993, Thermodynamic properties and equation of state of high-pressure ice phases, translated from *Prikladnaya Mekhanika Tekhnicheskaya Fizika*, **2**, 113-123.
- Choblet, G., et C. Sotin, 1997, Numerical models of transient cooling for a fluid with temperature-dependent viscosity, *Terra Nova*, **9**, 38.
- Chopelas, A., et R. Boehler, 1989, Thermal expansion measurements at very high pressure, systematics, and a case for a chemically homogeneous mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **16**, 1347-1350.
- Chopra P.N. et M.S. Paterson, 1984, The role of water in the deformation of dunite, *J. Geophys. Res.*, **89**, 7861-7876.
- Christensen, U.R., 1984a, Heat transport by variable viscosity convection and implications for the Earth's thermal evolution, *Phys. Earth Planet. Int.*, **35**, 264-282.
- Christensen, U.R., 1984b, Convection with pressure- and temperature-dependent non-newtonian rheology, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **77**, 343-384.

- Christensen, U.R., 1985a, Heat transport by variable viscosity convection II: pressure influence, non-newtonian rheology and decaying heat sources, *Phys. Earth Planet.Int.*, **37**,183-205.
- Christensen, U.R., 1985b, Thermal evolution models for the Earth, *J. Geophys. Res.*, **90**, 2995-3007.
- Christensen, U.R. et D.A. Yuen, 1985, Layered convection induced by phase transitions, *J. Geophys. Res.*, **90**, 10291-10300.
- Christensen, U.R. et H. Harder, 1991, 3-D convection with variable viscosity, *Geophys. J. Int.*, **104**, 213-226.
- Chu, T.Y. et R.J. Goldstein, 1973, Turbulent convection in a horizontal layer of water, *J. Fluid Mech.*, **60**, 141-159.
- Coulomb, J. et G. Jobert, 1972, *Traité de géophysique interne*, 1. Sismologie et pesanteur, 614 pp., Masson, Paris.
- Daly, S.F., 1980, Convection with decaying heat sources : constant viscosity, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **61**, 519-547.
- Davaille, A. et C. Jaupart, 1993, Transient high-Rayleigh-number thermal convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, **253**, 141-166.
- Davaille, A. et C. Jaupart, 1994, Onset of thermal convection in fluids with temperature-dependent viscosity: application to the oceanic mantle, *J. Geophys. Res.*, **99**, 19853-19866.
- Davies, G.F. et A.M. Dziewonski, 1975, Homogeneity and constitution of the Earth's lower mantle and outer core, *Phys. Earth Planet. int.*, **10**, 336-343.
- Doin, M.-P., L. Fleitout et D. McKenzie, 1996, Geoid anomalies and the structure of continental and oceanic lithospheres, *J. Geophys. Res.*, **101**, 16119-16135.
- Duffy, T.S. et D.L. Anderson, 1989, Seismic velocities in mantle minerals and the mineralogy of the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, **94**, 1895-1912.
- Duffy, T.S., C.-S. Zha, R.T. Downs, H.-K. Mao et R.J. Hemley, 1995, Elasticity of forsterite and the composition of the upper mantle, *Nature*, **378**, 170-173.
- Durham, W.B. et C. Goetze, 1977, Plastic flow of orientated single crystals of olivine. 1. Mechanical data, *J. Geophys. Res.*, **82**, 5737-5753.
- Durham, W.B., C. Froideveaux et O. Jaoul, 1979, Transient and steady-state creep of pure forsterite at low stress, *Phys. Earth Planet. Int.*, **19**, 263-274.
- Durham, W.B., S.H. Kirby et L.A. Stern, 1992, Effects of dispersed particulates on the rheology of water ice at planetary conditions, *J. Geophys. Res.*, **97**, 20883-20897.
- Durham, W.B., S.H. Kirby et L.A. Stern, 1997, Creep of water ices at planetary conditions: a compilation, *J. Geophys. Res.*, **102**, 16293-16302.
- Dupeyrat, L., C. Sotin et E.M. Parmentier, 1995, Thermal and chemical convection in planetary mantles, *J. Geophys. Res.*, **100**, 497-520.

- Dziewonski, A.M. et D.L. Anderson, 1981, Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. int.*, **25**, 297-356.
- Foster, T.D., 1969, Convection in a variable viscosity fluid heated from within, *J. Geophys. Res.*, **74**, 685-693.
- Fowler, A.C., 1985, Fast thermoviscous convection, *Stud. Appl. Math.*, **72**, 189-219.
- Frick, H., F.H. Busse et R.M. Clever, 1983, Steady three-dimensional convection at high Prandtl numbers, *J. Fluid Mech.*, **127**, 141-153.
- Friedson, A.J., et D.J. Stevenson, 1983, Viscosity of rock-ice mixtures and applications to the evolution of the icy satellites, *Icarus*, **56**, 1-14.
- Fukao, Y., 1992, Seismic tomogram of the Earth's mantle : geodynamics implications, *Science*, **258**, 625-630.
- Fukao, Y., M. Obayashi, H. Inoue et M. Nenbai, 1992, Subducting slabs stagnant in the mantle transition zone, *J. Geophys. Res.*, **97**, 4809-4822.
- Gaherty, J.B. et T. Lay, 1992, Investigation of laterally heterogeneous shear velocity structure in D" beneath Eurasia, *J. Geophys. Res.*, **97**, 417-436.
- Garon, A.M. et R.J. Goldstein, 1973, Velocity and heat transfer measurements in thermal convection, *Phys. Fluids*, **16**, 1818-1825.
- Gerrard, J.A.F., M.F. Perutz et A. Roch, 1952, Measurement of the velocity distribution along a vertical line through a glacier, *Proc. R. Soc. A*, **207**, 554-572.
- Giannandrea, E. et U. Christensen, 1993, Variable viscosity convection experiments with a stress free upper boundary and implications for the heat transport in the Earth's mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, **78**, 139-152.
- Gillet, P., 1995, Mineral physics, mantle mineralogy and mantle dynamics, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **320**, 341-356.
- Goetze, C., 1975, Sheared lherzolites : from the point of view of rock mechanics, *Geology*, **3**, 172-173.
- Goodman, D.J., H.J. Frost et M.F. Ashby, 1981, The plasticity of polycrystalline ice, *Phil. Mag. A*, **43**, 665-695.
- Gosciny, R. et A. Uderzo, 1961, *Astérix le Gaulois*, 48 p., Dargaud, Paris.
- Grasset, O., S. Beauchêne et C. Sotin, 1995, Etude par spectroscopie Raman *in situ* du diagramme de phase de NH₃-H₂O dans le domaine 100 MPa-1,5 GPa : application à la dynamique de Titan, *C. R. Acad. Sci. Paris A*, **320**, 249-256.
- Grasset, O. et C. Sotin, 1996, The cooling rate of a liquid shell in Titan's interior, *Icarus*, **123**, 101-112.
- Grasset, O. et E.M. Parmentier, 1997, Thermal convection in a volumetrically heated, infinite Prandtl number fluid with strongly temperature-dependent viscosity: implications for planetary thermal evolution, *submitted to J. Geophys. Res.*

- Green, H.W. et S.V. Radcliffe, Dislocation mechanism in olivine and flow in the upper mantle, 1972, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **15**, 239-247.
- Guéguen, Y., 1977, Dislocations in mantle peridotite nodules, *Tectonophysics*, **39**, 231-252.
- Guyon, E., J.P. Hulin et L. Petit, 1991, Hydrodynamique physique, 506 pp., InterEdition, Paris.
- Hager, B.H. et R.J. O'Connell, 1981, A simple global model of plate dynamics and mantle convection, *J. Geophys. Res.*, **86**, 4843-4867.
- Hager, B.H. et R.W. Clayton, 1989, Constraints on the structure of the mantle convection using seismic observations, flow models and the geoid, in *mantle convection : plate tectonics and global dynamics*, edited by W.R. Peltier, p. 657-763, Gordon and Breach, New-York.
- Haggerty, S.E. et V. Sautter, 1990, Ultradeep (greater than 300 kilometers), ultramafic upper mantle xenoliths, *Science*, **288**, 993-996.
- Hansen, U. et D.A. Yuen, 1993, High Rayleigh number regime of temperature-dependent viscosity convection and the earth's early thermal history, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2191-2194.
- Hashin, Z. et S. Shtrikman, 1963, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 127-140.
- Haskell, N.A., 1935, The motion of a viscous fluid under a surface load 1. *Physics*, **6**, 265-269.
- Haskell, N.A., 1936, The motion of a viscous fluid under a surface load 2. *Physics*, **7**, 56-61.
- Haxby, W.F. et J.K. Weissel, 1986, Evidence for small scale convection from SEASAT altimeter data, *J. Geophys. Res.*, **91**, 3507-3520.
- Hobbs, P.V., 1974, Ice physics, 837 pp., Oxford University Press.
- Hogenboom, D.L., J.S. Kargel, G. Consolmagno, T.C. Holden, L. Lee et M. Buyyounouski, 1997, The ammonia-water system and the chemical differentiation of icy satellites, *Icarus*, **128**, 171-180.
- Holmes, A., 1945, Principle of physical geology, The Ronald Press Company, New York.
- Inoue, H., Y. Fukao, K. Tanabe et Y. Ogata, 1990, Whole mantle P-wave travel time tomography, *Phys. Earth Planet. Int.*, **59**, 294-328.
- Isacks, B.L., J. Oliver, et L.R. Sykes, 1968, Seismology and the new global tectonics, *J. Geophys. Res.*, **73**, 5855-5899.
- Ita, J. et L. Stixrude, 1992, Petrology, elasticity, and composition of the mantle transition zone, *J. Geophys. Res.*, **97**, 6849-6866.
- Ito, E. and E. Takahashi, Ultra high pressure transformations and the constitution of the deep mantle, 1987, in *High pressure research in mineral physics*, edited by M.H. Manghnani and Y. Syono, pp. 221-229, Washington D.C..
- Ito, E., M. Akaogi, L. Topor et A. Navrotsky, 1990, Negative pressure-temperature slopes for reactions forming MgSiO₃ perovskite from calorimetry, *Science*, **259**, 1275-1278.
- Ivins, E.R. et C.G. Sammis, 1995, On lateral viscosity contrast in the mantle and the rheology of low-frequency geodynamics, *Geophys. J. Int.*, **123**, 305-322.

- Jacobsen, J.B. et G.J. Wasserburg, 1979, The mean age of mantle and crustal reservoir, *J. Geophys. Res.*, **84**, 7411-7429.
- Jarvis, G.T. et W.R. Peltier, 1982, Mantle convection as a boundary layer phenomenon, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **68**, 389-427.
- Jarvis, G.T. et W.R. Peltier, 1989, Convection models and geophysical observations, in *mantle convection : plate tectonics and global dynamics*, edited by W.R. Peltier, pp. 479-593, Gordon and Breach, New York.
- Jaupart, C. and B. Parsons, 1985, Convective instabilities in a variable viscosity fluid cooled from above, *Phys. Earth Planet Int.*, **39**, 14-32.
- Jochum, K.P., A.W. Hoffmann, E. Ito, H.M. Seufert et W.M. White, 1983, K, U and Th in mid-ocean ridge basalt glasses and heat production, *Nature*, **306**, 431-436.
- Karato, S.-I., 1987, Seismic anisotropy due to lattice preferred orientation of minerals: kinematic or dynamic?, in *High pressure researches in mineral physics*, edited by M.H. Manghani and Y. Syono, pp. 455-471, American Geophysical Union, Washington D.C..
- Karato, S.-I., 1992, On the Lehmann discontinuity, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 2255-2258.
- Karato, S.-I., M.S. Paterson et J.D. Fitzgerald, 1986, Rheology of synthetic olivine aggregates: influence of grain size and water, *J. Geophys. Res.*, **91**, 8151-8176.
- Karato, S.-I. et P. Wu, 1993, Rheology of the upper mantle :a synthesis, *Science*, **260**, 771-778.
- Kennett, B.L.N., E.R. Engdahl et R. Buland, 1995, Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes, *Geophys. J. Int.*, **122**, 108-124.
- King, S.D. et G. Masters, 1992, An inversion for radial viscosity structure using seismic tomography, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 1551-1554.
- Kirby, S.H., W.B. Durham et H.C. Heard, 1985, Rheology of H₂O ices I_h, II and III at high pressures: a progress report, in *Proc. NATO Workshop Ices in the Solar System*, edited by J. Klinger, B. Benest, A. Dollfus et R. Smoluchowski, pp. 89-107, Reidel, Dordrecht.
- Kirk, R.L. et D.J. Stevenson, 1987, Thermal evolution of a differentiated Ganymede and implications for surface features, *Icarus*, **69**, 91-134.
- Kohlstedt, D.L. et C. Goetze, 1974, Low-stress high-temperature creep in olivine single crystals, *J. Geophys. Res.*, **79**, 2045-2051.
- Krishnamurti, R., 1970a, On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow, *J. Fluid Mech.*, **42**, 309-320.
- Krishnamurti, R., 1970b, On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time-dependent flow, *J. Fluid Mech.*, **42**, 309-320.
- Kvernfold, O., 1979, Rayleigh-Bénard convection with one free and one rigid boundary, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **12**, 273-294.
- Labrosse, S., Contribution à l'étude du refroidissement de la Terre, Thèse de l'Université Paris VII, 179 pp., Paris.

- Lambeck, K. P. Johnson and M. Nakada, 1990, Glacial rebound and sea level change in northwestern Europe, *Geophys. J. Int.*, **103**, 451-468.
- Landolt-Börnstein, 1982, Physical properties of rocks, 373 pp., Springer-Verlag, Berlin.
- Lay, T. et D.V. Helmberger, 1983, A lower mantle S wave triplication and the shear velocity structure of D", *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **75**, 799-837.
- Li, X.-D. et B. Romanowicz, 1996, Global mantle shear velocity model developed using nonlinear asymptotic coupling theory, *J. Geophys. Res.*, **101**, 22245-22272.
- Lunine, J. I. et D. J. Stevenson, 1982, Formation of the galilean satellites in a gaseous nebula, *Icarus*, **52**, 14-39.
- Lunine, J. I. et D. J. Stevenson, 1987, Clathrate and ammonia hydrates at high pressure: application to the origin of methane on Titan, *Icarus*, **70**, 61-77.
- Machetel, P. et P. Weber, 1991, Intermittent layered convection in a model mantle with an endothermic phase change at 670 km, *Nature*, **350**, 55-57.
- McKenzie, D.P., J.M. Roberts et N.O. Weiss, 1974, Convection in the Earth's mantle: towards a numerical simulation, *J. Fluid Mech.*, **62**, 465-538.
- Meng, Y., D.J. Weidner, G.D. Gwanmesia, R.C. Liebermann, M.T. Vaughan, Y. Wang, K. Leinenweiber, R.E. Pacalo, A. Yeganeh-Haeri et Y. Zhao, 1993, In situ high P-T X-ray diffraction studies on three polymorphs (α, β, γ) of Mg_2SiO_4 , *J. Geophys. Res.*, **98**, 22199-22207.
- Mercier, J.-C. C., 1985, Olivine and pyroxene, in *Preferred orientation in deformed minerals*, R.W. Wenk editor, Academic Press.
- Mitrovica, J.-X. et W.R. Peltier, 1992, Constraints on mantle viscosity from relative sea level variations in Hudson Bay, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 1185-1188.
- Montagner, J.P. and T. Tanimoto, 1991, Global upper mantle tomography of seismic velocities and anisotropies, *J. Geophys. Res.*, **96**, 20337-20351.
- Moore, D.R. et N.O. Weiss, 1973, Two-dimensional Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.*, **58**, 289-312.
- Moresi, L.-N. et V.S. Solomatov, 1995, Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations, *Phys. Fluids*, **7**, 2154-2162.
- Morris, S. et D. Canright, 1984, A boundary-layer analysis of Bénard convection in a fluid of strongly temperature-dependent viscosity, *Phys. Earth Planet. Int.*, **36**, 355-373.
- McKinnon, W.B., 1997, Geodynamics of icy satellites, soumis à *Solar system ices*.
- Mueller, S. et W.B. McKinnon, 1988, Three-layered models of Ganymede and Callisto: composition, structures and aspect of evolution, *Icarus*, **76**, 437-464.
- Nakada, M. and K. Lambeck, 1989, Late Pleistocene and Holocenesea-level change in the Australian region and mantle rheology, *J. Geophys. Res.*, **96**, 497-517, 1989.

- Nataf, H.-C., 1986, Elements d'anatomie et de physiologie du manteau terrestre, Thèse de l'université de Paris XI, 355 pp., Orsay.
- Nataf, H.-C. et F.M. Richter, 1982, Convection experiments with highly temperature-dependent viscosity and the thermal evolution of the planets, *Phys. Earth Planet. Int.*, **32**, 320-329.
- Nataf, H.-C. et S. Houard, 1993, Seismic discontinuity at the top of D" : a world-wide feature?, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2371-2374.
- Nisbet, E.G., M.J. Cheadle, N. Arndt et M.J. Bickle, 1993, Constraining the potential temperature of the Archaean mantle : a review of the evidence from komatiites, *Lithos*, **30**, 291-307.
- Nye, J.F., 1953, The flow law of ice from measurements in glaciers tunnels, laboratory experiments and the Jungfraufirn borehole experiment, *Proc. R. Soc. A*, **219**, 477-489.
- Ogawa, M., G. Schubert et A. Zebib, 1991, Numerical simulations of three-dimensional thermal convection in a fluid with strongly temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, **233**, 299-328.
- Parsons, B. et J.G. Sclater, 1977, An analysis of the variation of the ocean floor bathymetry and heat flow with age, *J. Geophys. Res.*, **82**, 803-827.
- Patankar, S.V., 1980, Numerical heat transfert and fluid flow, 197 pp., Taylor & Francis.
- Peltier, W.R., 1974, The impulse response of a Maxwell Earth, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **12**, 649-669.
- Peltier, W.R., 1989, Mantle viscosity, in *mantle convection : plate tectonics and global dynamics*, edited by W.R. Peltier, pp. 389-478, Gordon and Breach, New York.
- Peltier, W.R., 1996, Mantle viscosity and ice-age ice sheet topography, *Science*, **273**, 1359-1364.
- Peltier, W.R., R.A. Drummond and A.M. Tushingham, 1986, Post-glacial rebound and transient lower mantle rheology, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **87**, 79-116.
- Peltier, W.R. and A.M. Tushingham, 1989, Global sea-level rise and the greenhouse effect: might they be connected, *Science*, **244**, 806-810.
- Poirier, J.-P., 1982, Rheology of ices : a key to the tectonics of the ice moons of Jupiter and Saturn, *Nature*, **299**, 683-688.
- Poirier, J.-P., 1985, Creep of crystals, 260 pp., Cambridge University Press, Cambridge.
- Poirier, J.-P., 1991, Introduction to the physics of the Earth interior, 264 p., Cambridge University Press, Cambridge.
- Poirier, J.-P. et R.C. Liebermann, 1984, On the activation volume for creep and its variation with depth in the Earth's lower mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, **35**, 283-293.
- Post, R.L., 1977, High-temperature creep of Mt. Burnet dunite, *Tectonophysics*, **42**, 75-110.
- Press, H.W., D.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, Numerical recipes, 2nd edition, 963 pp, Cambridge University Press, 1992.

- Ratcliff, J.T., G. Schubert et A. Zebib, 1995, Three-dimensional variable viscosity convection of an infinite Prandtl number Boussinesq fluid in a spherical shell, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 2227-2230.
- Revenaugh, J. and T.H. Jordan, 1991, Mantle layering from ScS reverberations 3. The upper mantle, *J. Geophys. Res.*, **96**, 19781-19810.
- Reynolds, R.T. et P.M. Cassen, 1979, On the internal structure of the major satellites of the major planets, *Geophys. Res. Lett.*, **6**, 121-124.
- Ricard, Y. et C. Vigny, 1989, Mantle dynamics with induced plate tectonics, *J. Geophys. Res.*, **94**, 17543-17559.
- Ricard, Y., C. Vigny and C. Froidevaux, 1989, Mantle heterogeneities, geoid and plate motion: a Monte Carlo inversion, *J. Geophys. Res.*, **94**, 13739-13754.
- Ricard, Y., H.-C. Nataf et J.-P. Montagner, 1996, The three-dimensional seismological model a priori constrained : confrontation with seismic data, *J. Geophys. Res.*, **101**, 8457-8472.
- Richter, F.M. et B. Parsons, 1975, On the interaction of two scales of convection in the mantle, *J. Geophys. Res.*, **80**, 2529-2541.
- Richter, F.M., H.-C. Nataf et S.F. Daly, 1983, Heat transfert and horizontally averaged temperature of convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, **129**, 173-192.
- Rigden, S.M., G.D. Gwanmesia et R.C. Liebermann, 1994, Elastic waves velocities of a pyrope-majorite garnet of 3 GPa, *Phys. Earth Planet. Int.*, **86**, 35-44.
- Roberts, G.O., 1979, Fast viscous Bénard convection, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **12**, 235-272.
- Rossby, H.T., 1969, A study of Bénard convection with and without rotation, *J. Fluid Mech.*, **36**, 309-335
- Runcorn, S.K., 1962, Towards a theory of continental drift, *Nature*, **193**, 311-314.
- Safronov, V.F., 1972, Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the Earth and planets, *NASA Tech. Transl.*, TTF-677.
- Saxena, S.K. et G. Shen, 1992, Assessed data on heat capacity, thermal expansion and compressibility for some oxides and silicates, *J. Geophys. Res.*, **97**, 19813-19825.
- Schubert, G., P. et Cassen R.E. Young, 1979, Subsolidus convective cooling of terrestrial planets, *Icarus*, **38**, 192-211.
- Schubert, G., D. J. Stevenson et K. Ellsworth, 1981, Internal structures of the galilean satellites, *Icarus*, **47**, 46-59.
- Schubert, G. et C.A. Anderson, 1985, Finite element calculations of very high Rayleigh number thermal convection, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **80**, 575-601.
- Sclater, J.G., C. Jaupart et D. Galson, 1980, The heat flow through oceanic and continental crust and the heat loss of the Earth, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **18**, 269-311.

- Solomatov, V.S., 1995, Scaling of temperature- and stress-dependent viscosity convection, *Phys. Fluids*, **7**, 266-274.
- Solomatov, V.S. et L.-N. Moresi, 1997, Three regimes of mantle convection with non-Newtonian viscosity and stagnant lid convection on the terrestrial planets, *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 1907-1910.
- Somerscale, E.F.C. et I.W. Gazda, 1969, Thermal convection in high Prandtl number liquids at high Rayleigh number, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **12**, 1491-1511.
- Sinogeikin S.V., J.D. Bass, B. O'Neil et T. Gasparik, 1997, Elasticity of tetragonal end-member majorite and solid solutions in the system $Mg_4Si_4O_{12}$ - $Mg_3Al_2Si_3O_{12}$, *Phys. Chem. Min.*, **24**, 115-121.
- Sleep, N.H., 1990, Hotspots and mantle plumes:some phenomenology, *J. Geophys. Res.*, **95**, 6715-6736.
- Snieder, R., J. Beckers et F. Neele, 1991, The effect of small-scale structure on normal mode frequencies and global inversions, *J. Geophys. Res.*, **96**, 501-515.
- Somerscale, E.F.C. et I.W. Gazda, 1969, Thermal convection in high Prandtl number liquids et high Rayleigh numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **12**, 1491-1511.
- Sotin, C., 1986, Contribution à l'étude de la structure et de la dynamique interne des planètes, Thèse de l'Université Paris VII, 385 pp., Paris.
- Sotin, C. and S. Labrosse, 1997, Thermal convection in an isoviscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below : applications to heat transfert through planetary mantles, *submitted to Phys. Earth Planet. Int.*.
- Spalding, D.B., 1972, A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives, *Int. J. num. Meth. Engng.*, **4**, 551-559.
- Spohn, T. et G. Schubert, 1982, Modes of mantle convection and the removal of heat from the Earth's interior, *J. Geophys. Res.*, **87**, 4682-4696.
- Spohn, T. et D. Breuer, 1993, Mantle differentiation through continental crust growth and recycling and the thermal evolution of the Earth, *Geophys. Mon.*, **14**, 55-71.
- Stacey, F.D., 1992, Physics of the Earth, 3rd edn., 513 pp., Brookfield press, Brisbane.
- Stengel, K.C., D.S. Oliver et J.R. Booker, 1982, Onset of convection in a variable-viscosity fluid, *J. Fluid Mech.*, **120**, 411-431.
- Stevenson, D.J., T. Spohn et G. Schubert, 1983, Magnetism and thermal evolution of terrestrial planets, *Icarus*, **54**, 466-489.
- Su, W. et M. Dziewonski, 1992, On the scale of mantle heterogeneity, *Phys. Earth Planet. Int.*, **74**, 29-54.
- Stüben, K. et U. Trottenberg, 1982, Multigrids methods : fundamentals algorithms, model problem analysis and applications, in *Multigrid methods*, edited by W. Hackbusch and U. Trottenberg, pp. 1-175, Springer-Verlag, New-York.

- Suzuki, I., S. Okajima et K. Seya, 1979, Thermal expansion of single-crystal manganosite, *J. Phys. Earth*, **27**, 63-69.
- Tackley, P.J., 1993, Effects of strongly temperature-dependent viscosity on time-dependent, three-dimensional models of mantle convection, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2187-2190.
- Tackley, P.J., D.J. Stevenson, G.A. Glatzmaier et G. Schubert, 1993, Effects of an endothermic phase transition at 670 km depth in a spherical model of convection in the Earth's mantle, *Nature*, **361**, 699-704.
- Tarantola, A. et B. Valette, 1982, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least square criterion, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **20**, 219-232.
- Torrance, K.E. et D.L. Turcotte, 1971, Thermal convection with large viscosity variations, *J. Fluid Mech.*, **47**, 113-125.
- Trampert, J. et R. Snieder, 1996, Model estimations biased by truncated expansions: possible artifacts in seismic tomography, *Science*, **271**, 1257-1260.
- Travis, B., P. Olson et G. Schubert, 1990a, The transition from two-dimensional to three-dimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection, *J. Fluid Mech.*, **216**, 71-91.
- Travis, B., S. Weinstein et P. Olson, 1990b, Three-dimensional convection planforms with internal heat generation, *Geophys. Res. Lett.*, **17**, 243-246.
- Turcotte, D.L. et E.R. Oxburgh, 1967, Finite amplitude convective cells and continental drift, *J. Fluid Mech.*, **28**, 29-42.
- Turcotte, D.L., 1980, On the thermal evolution of the Earth, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **48**, 43-58.
- Turcotte, D.L. et G. Schubert, 1982, *Geodynamics: application of continuum physics to geological problems*, 450 pp., John Wiley & Sons.
- Vacher, P., 1995, *Apport des modèles de convection à l'interprétation des données sismiques*, Thèse de l'Université Paris XI, 221 pp., Orsay.
- Vacher, P., A. Mocquet et C. Sotin, 1996, Comparison between tomographic structures and models of convection in the upper mantle, *Geophys. J. Int.*, **128**, 45-56.
- Vacher, P., A. Mocquet et C. Sotin, 1997, Computation of seismic profiles from mineral physics the importance of the non-olivine components for explaining the 660 km depth discontinuity, soumis à *Phys. Earth Planet. int.*
- Van der Hilst, R.D., S. Widiyantoro et E.R. Engdahl, 1997, Evidence for deep mantle circulation from global tomography, *Nature*, **386**, 578-584.
- Vine, F.J. et D.H. Matthews, 1963, Magnetic anomalies over ocean ridges, *Nature*, **199**, 947-949.
- Weber, M. et J.P. Davis, 1990, Evidence of a laterally variable lower mantle structure from P and S waves, *Geophys. J. Int.*, **102**, 231-255.
- Weertman, J., 1968, Dislocation climb theory of steady-state creep, *Trans. Amer. Soc. Metals*, **61**, 681.

-
- Weertman, J., 1970, The creep strength of the Earth's mantle, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **8**, 145-168.
- Weertman, J., 1983, Creep deformation of ice, *Ann. Rev. Earth Planet Sci.*, **11**, 215-240.
- Weinstein, S.A. et P. Olson, 1990, Planforms in thermal convection with internal heat sources at large Rayleigh and Prandtl numbers, *Geophys. Res. Lett.*, **17**, 239-242.
- Weinstein, S.A. et U. Christensen, 1991, Convection planforms in a fluid with a temperature-dependent viscosity beneath a stress-free upper boundary, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 2035-2038.
- White, D.B., 1988, The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity, *J. Fluid Mech.*, **191**, 247-286.
- Willis, G.E. et J.W. Deardorff, 1967, Development of short-period temperature fluctuations in thermal convection, *Phys. Fluids*, **10**, 931-937.
- Wilson, T., 1963, A possible origin of Hawaiian islands, *Can. J. Phys.*, **41**, 863-870.
- Winterer, E.L. et D.T. Sandwell, 1987, Evidence for en-echelon cross-grain ridges for tensional cracks in the Pacific, *Nature*, **329**, 534-537.
- Wu, P. and W.R. Peltier, 1983, Glacial isostatic adjustment and the free air gravity anomaly as a constraint on the deep mantle viscosity, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **74**, 377-449.
- Wyssession, M.E., E.A. Okal et C.R. Bina, 1992, The structure of the core mantle boundary from diffracted waves, *J. Geophys. Res.*, **97**, 8749-8764.
- Yamazaki, A. et K. Hirahara, 1994, The thickness of upper mantle discontinuities, as inferred from short-period J-array data, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1811-1814.
- Zahnle, K., J.B. Pollack, D. Grinspoon et L. Jones, 1992, Impact generated atmospheres over Titan, Ganymede and Callisto, *Icarus*, **95**, 1-23.

Résumé

Ainsi que l'ont montré de précédentes études, les variations de viscosité affaiblissent la convection et réduisent l'efficacité du transfert thermique. Ce travail étudie les effets des variations de viscosité sur la convection de Rayleigh-Bénard. Pour cela, on a développé un modèle numérique bidimensionnel de convection à nombre de Prandtl infini. La viscosité dépend exponentiellement de la température. Trois régimes convectifs doivent être distingués, selon le nombre de Rayleigh et l'amplitude des variations de viscosité. Dans le cas du régime de couvercle, qui confine la convection dans une sous-couche, nous avons déterminé une paramétrisation du flux de chaleur et du saut de température dans la couche limite thermique du bas. Nos résultats suggèrent que la convection est gouvernée par la couche limite thermique du bas, et que la sous-couche ne peut pas être traitée comme un fluide isovisqueux. Appliqués au manteau supérieur de la Terre, nos résultats permettent de calculer des profils de vitesse sismique proches des profils observés par les modèles sismiques. On montre qu'une couche limite thermique à la base du manteau supérieur peut très bien exister, sans être détectée par la sismologie. Par ailleurs, les anomalies de vitesse synthétiques sont plus étendues et plus intenses à l'aplomb des panaches froids qu'au niveau des panaches chauds. L'application à l'enveloppe de glace superficielle des satellites des planètes géantes souligne l'importance de la composition de l'océan initial. La présence éventuelle d'ammoniaque en quantité suffisante réduit la vigueur et l'efficacité de la convection. Une explication possible à la différence entre les surfaces de Ganymède et de Callisto pourrait être liée à ce paramètre.

Mots clé: Convection thermique, Viscosité variable, Couche limite thermique, Flux de chaleur. Manteau supérieur, Satellites de glace.

Abstract

Previous studies have shown that viscosity variations weaken the convection and reduce the efficiency of heat transport. This work studies the effects of variable viscosity on Rayleigh-Bénard convection. A two-dimensional and infinite Prandtl number numerical convection model is first developed. Viscosity follows an exponential law of the temperature. One can distinguish three different convective regimes, depending on the Rayleigh number, and on the amplitude of the viscosity variations. In the case of the conductive lid regime, for which convection is confined in a sub-layer, we have determined a parameterisation of the heat flux. A parameterisation of the temperature jump in the thermal boundary layer is also proposed. Our results suggest that 1. The convection in the sub-layer is controlled by the bottom thermal boundary layer; 2. The sub-layer may not be considered as an isoviscous fluid. Applied to the upper mantle of the Earth, our results allow to compute synthetic seismic velocity profiles which are in good agreement with the seismically-observed profiles. It is shown that a thermal boundary layer can develop at the base of the upper mantle, without being detected by seismological techniques. We also report that the velocity anomalies are stronger and more widespread in the cold plumes than they are in the hot plumes. Our parameterised laws are also applied to the convection in the ice I layer of the icy satellites. The composition of the initial ocean is a key parameter. Ammonia, if it exists in the initial ocean, reduces significantly the strength and the efficiency of convection. This could explain the difference between the surfaces of Ganymede and Callisto.

Key words: Thermal convection, Variable viscosity, Heat flux, Thermal boundary layer, Upper mantle, Icy satellites.