相安無事, 各盡其所。

8.4 重覆賽局 (Repeated Games)

讀者在唸到囚人難局及其均衡解時, 可能會對它的悲觀預測感到不解。這世界不是充滿了合作性的結果嗎? 我的好朋友向我借錢, 即使沒有簽借據, 不是一樣會還我嗎? 信譽好的公司, 即使有欺騙消費者的空間, 不是仍然不願這樣做嗎? 表面上看, 這些行爲和囚人難局的均衡預測都不相合。但上面這些例子, 雖然都是正確的, 但它們和囚人難局卻有一個基本的不同: 不論是我的好朋友或信譽好的公司, 和我都有長久的關係, 而囚人難局只有一次的接觸。如果參賽者之間在同一種關係下會不斷的重覆, 那麼他們的均衡行爲, 和單期的均衡行爲會有極大的差別。用最粗淺的解釋, 是在長期的關係下, 參賽者之間可以用未來的"報復"和"報答"爲手段, 來維持現今的合作。這在單期關係下, 是做不到的。處理長期關係的賽局就是重覆賽局 。在這方面的研究, 文獻上有非常豐富的理論。但限於篇幅這裡我們只用較不嚴格的方式來討論, 而且只能稍爲提到一些較簡單的結果。讀者若有興趣要進一步研究, 可參考 Fudenberg 和 Tirole (1991) 的第五章。

假設 $\Gamma(N, A, U)$ 是一個一般式賽局, 則 $\Gamma^T(\delta)$ 代表將 Γ 重覆玩 T 期所形成的賽局, 且每兩期之間的報酬折現爲 $\delta\,(0<\delta<1)$。換言之, 如果一個參賽者在第 t 期所得到的報酬爲 U_t, 那麼整個 T 期賽局下, 他得到的總報酬是 $\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}U_t$。如果 $T<\infty$, 我們稱 $\Gamma^T(\delta)$ 是一個有限重覆賽局。如果 $T=\infty$, 那麼 $\Gamma^\infty(\delta)$ 是一個無限重覆賽局。假設在任何一期裡, 每一參賽者可以觀察到對手和自己在過去所有做過的事。也因爲這樣, 重覆和單期賽局最重要的差別在於, 前者的策略可以是過去各期所有發生的事件的函數。假設 $a_i(t)$ 是參賽者 i 在第 t 期的行爲, 而 $a(t)=(a_1(t),\ldots,a_n(t))$ 是所有參賽者在第 t 期的行爲, 那麼任一參賽者 i 在第 $t+1$ 期的策略, $\sigma_i(t+1)$, 是一個從 $(a(1), a(2),\ldots,a(t))$ 映到 A_i 的函數。因此參賽者 i 在一個 T 期重覆賽局 $\Gamma^T(\delta)$ 的策略, 是 $\sigma_i\equiv(\sigma_i(1),\sigma_i(2),\ldots,\sigma_i(T))$。

假設現在賽局到了第 t 期的結尾。那麼所餘的 $T-t$ 期未完的部份, 事實上是 $\Gamma^T(\delta)$ 的一個子賽局。因此仿伸展示賽局的定義, 如果在每一期所餘的子賽局裡, 原先的策略 $\sigma\equiv(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ 都是該子賽局的 Nash 均衡, 則 σ 就是 $\Gamma^T(\delta)$ 這個重覆賽局的SPE。從重複賽局的定義中我們可以看出一個重覆賽局的策略是

非常複雜的, 它可以是過去所有發生過事件的函數。另外一件要注意的事, 是 Γ 和 $\Gamma^T(\delta)$ 是兩個完全不同的賽局。後者有自己的策略空間, 報酬的計算方法和均衡的定義。它們之間相同的地方, 只是在 $\Gamma^T(\delta)$ 裡, 每個參賽者在任何一期的可用策略 (available actions), 和 Γ 的可用策略 A 相同而已。

由於有限與無限賽局有完全不同的理論結果, 因此我們將它們分開討論。首先討論有限重覆賽局。

8.4.1 有限重覆賽局

有限賽局其實是一個伸展賽局的特例, 其中每一個參賽者在每一期都有完全一樣的可用策略 (available actions)。因此我們可以用回溯法來求解。

例 8.8 假設例 7.2 的囚人難局重覆玩 5 次。那麼由於在最後一期時, 參賽者面對的同等於一個單期的囚人難局, 因此兩人必須採單期賽局的 Nash 均衡 (D, D)。但由於兩人不論在第 4 期下什麼, 第 5 期都非採 (D, D) 不可, 因此他們在第 4 期所面對的, 其實也等於一個單期的囚人難局。這表示兩人在第 4 期還是要採 (D, D)。由此回溯到第 3, 2, 1期, 可知他們每期都要採 (D, D)。換言之, 一個重覆 5 次的囚人難局的唯一 SPE, 是每期都要採該囚人難局唯一的 Nash 均衡 (D, D)。

其實我們可以很容易的看出, 例 8.8 的推理, 不只適用於囚人難局, 而且適用於任何只有單一 Nash 均衡的單期賽局。因此我們得到下列定理:

定理 8.2 假設 Γ 只有一個 Nash 均衡, 且 $T < \infty$。則 $\Gamma^T(\delta)$ 這個重覆賽局只有一個 SPE, 那就是每一期都要玩 Γ 的 Nash 均衡。

定理 8.2 的結果, 只在 Γ 有單一 Nash 均衡時才正確。當 Γ 有兩個 (或以上) Nash 均衡時, $\Gamma^T(\delta)$ 的 SPE數目會變多。

例 8.9 考慮圖 8.7 的賽局。這個賽局有三個 Nash 均衡: $\rho_1 = (A, B), \rho_2 = (B, A)$ 和 $\rho_3 = ((1/2\ A, 1/2\ B), (1/2\ A, 1/2\ B))$。其中 ρ_1 給參賽者 1(2) 的報酬最低(高), 而 ρ_2 正好相反。ρ_3 帶給他們的報酬各是 1/2。假設這個賽局玩兩次, 且兩期之間無折現。用與例 8.8 相同的推理, 我們其實也可以證明兩期都採 ρ_1 或

	A	B
A	$2,2$	$-1,3$
B	$3,-1$	$-2,-2$

圖 8.7

ρ_2 或 ρ_3 也是兩期賽局的 SPE。但我們要證明除此之外, 還有其他的 SPE。很明顯的, 參賽者在最後一期必須採 ρ_1, ρ_2 或 ρ_3 其中的一個。由於這三個均衡帶給他們的報酬不同, 所以他們可以把高報酬的單期均衡當作獎勵, 而低報酬的單期均衡作 "處罰", 來支持他們在第一期採一個非單期賽局均衡的策略。舉例來說, 考慮下面這個兩期賽局的策略: 第一期兩人都採 A。如果沒有人在第一期悖離, 那麼第二期他們採 ρ_3。如果在第一期參賽者 1 悖離 A, 那麼他們第二期就不採 ρ_3, 而玩給參賽者 1 有低報酬的 ρ_1。反之, 如果在第一期參賽者 2 悖離 A, 那麼他們第二期就採給參賽者 2 低報酬的 ρ_2。我們要證明這個策略是上述兩期賽局的一個 SPE。

在第二期, 由於他們採的是 ρ_1, ρ_2 或 ρ_3 的其中一個, 而這三個都是單期賽局的 Nash 均衡, 所以很明顯的第二期沒有人會悖離。在第一期, 如果參賽者由 A 悖離, 那麼他最多也只是能得到 3。而且一旦他這麼做, 第二期他們必須採 ρ_1 而使參賽者 1 得到 -1 的報酬。因此他在兩期的總報酬是 $3-1=2$。反之, 他在第一期如果不悖離, 那麼拿到的均衡報酬 $2+1/2>2$。因此參賽者 1 也不願意在第一期悖離。對參賽者 2 而言, 我們也可以證明他們在第一, 二期都不願悖離 A (計算方法和參賽者 1 完全一樣, 因爲這個賽局是對稱的)。換言之, 上述策略是這兩期賽局的 SPE。

在上面這個例子裡, 值得注意的是參賽者在第一期所採的 (A,A), 並不是單期賽局的 Nash 均衡。換言之, 如果一個單期賽局有兩個 (或以上) 的 Nash 均

衡, 那麼有限的重覆玩時, 並不需要每期都玩單期賽局的 Nash均衡。它的原因, 是由於單期賽局的不同 Nash均衡, 會給參賽者不同的報酬, 因此可以用低報酬的 Nash均衡, 當作參賽者前期悖離的“處罰”。換言之, 即使在第一期玩的不是單期賽局的 Nash均衡, 而使某些參賽者有悖離的空間, 只要用讓那個參賽者報酬較低的 Nash均衡當作第二期的處罰, 那麼他還是不會悖離的。

8.4.2 無限重覆賽局

在無限重覆賽局裡, 由於不論在任何一個時點上, 所餘的子賽局仍是無限長, 因此前節所言的“處罰”力量, 可以非常大。這表示幾乎任何單期賽局的策略 (actions)都可以被均衡維持。因爲只要任何參賽者悖離了某一期裡均衡所指定的策略, 那麼他們可以在日後無限長的子賽局裡, 用一個夠強的處罰, 讓悖離者在日後失去因那一期悖離所得到的好處。當然, 這不表示一個重覆賽局裡, 要讓一個參賽者的報酬多低就可以多低。一個賽局裡, 即使傾所有參賽者之力, 也不可能把某一參賽者的報酬壓到某一極小值之下; 換言之, 任一參賽者在重覆賽局裡, 都可以保證得到一個報酬最低值。這就是所謂的最小可能的最大報酬 (minimax)。給定一個一般賽局 $\Gamma(N, A, u)$, 且 $i \in N$, 定義

$$\underline{u_i} = \min_{a_{-i} \in \triangle(A_{-i})} \max_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i})。$$

我們稱 $\underline{u_i}$ 是參賽者 i 在 Γ 的最小可能的最大報酬。$\underline{u_i}$ 代表的是, 假設對任何非 i 的參賽者的一個單期策略組合 a_{-i}, 參賽者 i 都用一個 a_i 去回應讓他自己的報酬最大。那麼讓 i 報酬最小的方法, 就是選一個 $a_i \in A_i$, 讓 $\max\limits_{a_i \in A_i} u_i(a_i, a_{-i})$ 最小。很明顯的, $\underline{u_i}$ 是參賽者 i 在賽局 Γ 裡所能得到的最低報酬。這是因爲即使其他非 i 的參賽者能聯合起來「對付」i 最不利的單期策略組合。只要 i 對那個策略組合做最適回應, 那麼他最少也能得到 $\underline{u_i}$。

例 8.10 在例 7.2 的囚人難局裡 $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = 0$。這是由於 D 是每個人的優勢策略, 所以 $\max\limits_{a_i} u_i(a_i, a_{-i}) = u_i(D, a_{-i})$。這表示 $\min\limits_{a-i} u_i(D, a_{-i}) = u_i(D, D) = 0$。

例 8.11 在例 7.3 的賽局裡, $\max\limits_{a_i} u_i(a_i, A) = 2$, 而 $\max\limits_{a_i} u_i(a_i, B) = 1$。在此我們把參賽者 i 的策略放在前面。換言之, 在 $i = 2$ 時, 上式的 a_i 代表第

二個參賽者, 而非第一個參賽者的策略。若 i 的對手只能用純策略, 那麼他應選 B 使 $\max_{a_i} u_i(a_i, B) = 1$。但事實上他可以選一個混合策略 $a_{-i} \in \triangle(A_{-i})$, 使 $\max_{a_i} u_i(a_i, a_{-i})$ 極小, 所以他應選 $(1/3C, 2/3D)$。這時 $\underline{u}_i = 2/3$。換言之, $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = 2/3$。更清楚的一點說, 一個參賽者如果要使對手得到 $\underline{u}_i$ 這個最小可能的最大報酬, 那麼他應使用的策略組合是 $(1/3C, 2/3D)$, 這時對手不論下 C 或 D, 得到的報持酬均是 2/3。

從例 8.11 我們可以很清楚的看出, 利用混合策略可以把對手的最小可能的最大值, 壓到比使用純策略更低的水準。

接下來我們要研究無限重覆賽局的子賽局完全均衡。爲了方便起見, 我們將重覆賽局的報酬等價化 (normalize)。換言之, 我們將參賽者的報酬乘上 $(1-\delta)$ 而定義爲

$$(1-\delta)\sum_{t-1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t。 \tag{8.1}$$

這樣做的好處, 是如果一參賽者每期得到的報酬都是 u 的話, 那麼整個重覆賽局他得到的報酬也正好是 u。這樣我們可以很容易將 Γ 和 $\Gamma^\infty(\delta)$ 作比較。在這個定義下, 我們可以找出重覆賽局的所有可能報酬 (feasible payoffs) 集合。

對任一集合 B, 令 $CO(B)$ 代表包含 B 的最小凸集合, 亦即是 $CO(B)$ 的元素, 是所有 B 裡元素的線性組合的集合。比如說, 如果 B 是三個不共線的點, 那麼 $CO(B)$ 就是整個由這三點圍成的三角形 (包括內部) 的集合。令 $F \equiv CO(\{x \in R^{|N|} \mid \exists a \in A, \ni u(a) = x\})$。$F$ 很顯然是參賽者在 $\Gamma^\infty(\delta)$ 裡的所有可能報酬的集合。不論他們使用什麼策略, 參賽者的報酬一定要落在 F 裡。反之, 任何在 F 裡的一點 x, 一定有一個重覆賽局策略 (但不一定是均衡策略), 使得這個策略下, 參賽者的報酬組合正好是 x。再定義 $F^* \equiv \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x \in F, x_i > \underline{u}_i \, \forall_i\}$。$F^*$ 稱作 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的可能且符合個人理性 (feasible and individually rational)的報酬集合。一個 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的均衡策略下的報酬組合, 一定要落在 F^* 裡。這是因爲 $\underline{u_i}$ 是參賽者 i 保證可以在賽局得到的最低報酬, 如果某一報酬組 x 給 i 的報酬還小於 $\underline{u_i}$, 那麼 x 不可能是均衡報酬。

我們接下來要證明一個重覆賽局裡相當令人意外但合理的結果。它說只要參賽者耐性夠, 那麼任何一個F^*裡的元素都是某一 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的均衡下的報酬。換言之, 只要 δ 夠大, 那麼 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的均衡報酬集合, 不多不少, 正好就是 F^*。首先我們用

囚人難局做例子。

定理 8.3 在囚人難局裡，存在一個 $\underline{\delta}\,(0<\underline{\delta}<1)$，使得若 $\delta>\underline{\delta}$，那麼任何 F^* 裡的元素都可以是 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的某一均衡的報酬。

證明*:* 由於在囚人難局裡，極大中之極小報酬，正好就是每個人都玩不合作 (D) 的報酬，而且 (D,D) 正好就是囚人難局的 Nash 均衡，因此我們可以用它當作參賽者悖離的處罰。假設 $x\in F^*$，且令 $G=\{(C,C),(C,D),(D,C),(D,D)\}$。那麼由 F^* 的定義我們可以知道 x 可以寫成集合 $\{u(a)\mid a\in G\}$ 裡四個元素的線性組合*:*

$$x=\sum_{a\in G}t_a u(a);\quad 0\le t_a\le 1。\tag{8.2}$$

也因爲如此，x 這個報酬可用適當順序去玩 G 裡的四個單期策略而得到。換言之，我們可以找到一條路徑 $\{a(t)\}_{t=1}^{\infty}$，使得 $a(t)\in G\;\forall t$，且 $(1-\delta)\sum\limits_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u(t)=x$。我們現在可以製造一個 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的 SPE, σ，讓它的報酬正好就是 x: σ 要求參賽者按 $\{a(t)\}_{t=1}^{\infty}$ 這條路徑去玩。如果參賽者每一期都遵照這一指定的路徑去玩，那麼他們的報酬當然就是 x。爲了防止參賽者悖離，在任一期 t，若有任何一個參賽者悖離當期所指定的 $a(t)$，那麼在接下來的每一期他們都玩 (D,D)。由於每一期都玩 (D,D) 是重覆賽局的一個 SPE (見習題 8.6)，因此這時不會有任可參賽者想再去悖離。由於 $x_i>\underline{u}_i$，且一旦任一參賽者悖離之後，雖然也許可以在當期得到較大的報酬，但隨之必然永遠得到 $\underline{u}_i$ 的報酬，因此在 δ 夠大時，遵守 $a(t)$ 並得到 x_i 是每一參賽者 i 的最大利益。♠

例 8.12 考慮例 7.2的囚人難局。我們要證明若 δ 夠大，那麼我們可以找到一個 $\Gamma^\infty(\delta)$ 的 SPE 使參賽者在每一期都合作。這個策略如下: 一開始每一參賽者都玩 C，而且只要每一期參賽者都這樣做，他們就不斷的下 C。但只要任何一期任一參賽者悖離 C，那麼從下一期開始，他們永遠玩 D。這種策略在文獻上叫觸發策略 (trigger strategy)。原因是參賽者都以合作爲開始，而一旦任一參賽者在任何一期引發了不合作的導火線 (不玩合作策略 C)，那麼他們就像扣發板機一樣，永遠不再回頭合作。證明很容易*:* 如果在任一期 t，任一參賽者採合作，那麼他接下來的預期報酬是得到永遠合作下的報酬。所以總報酬爲 $(1-\delta)(2+2\delta+2\delta^2+\cdots)=2$。如果他在第 t 期悖離，那麼當期他得到的報酬最大也只可能是 4，但接下來他將永遠得

到不合作的報酬 0。因此他的預期報酬是 $(1-\delta)(4+\delta 0+\delta^2 0+\cdots)=4(1-\delta)$。只要 $\delta > 1/2$, 那麼悖離的報酬較低。這表示沒有任一參賽者願意在合作階段悖離。爲了 SPE 的要求, 我們必須再檢查一旦賽局進入要永遠玩 D 的階段時, 參賽者是否仍願遵守策略的規定。很明顯他們沒有更好的選擇(見習題 8.6)。

定理 8.3 和例 8.12 告訴我們一個非常重要的事實: 當一個賽局可以無限重覆玩的時候, 非單期賽局的均衡策略可以變成均衡。以囚人難局來說, 雖然 (C, C) 不是單期賽局的 Nash 均衡 (它甚至不是有限重覆賽局的均衡), 但當賽局無限重覆時, 我們竟可以設計一個均衡讓參賽者在每期都合作。這表示重覆 (尤其是無限重覆者) 賽局的和單期賽局有完全不同的均衡。在有限重複賽局裡, 如果 Γ 只有一個 Nash 均衡, 那麼不論 Γ 重複幾次, 唯一的 SPE 就是重複的去採取那一個 Nash 均衡策略。但如果 Γ 重複無限次, 情況就完全不同。例 8.12 就非常清楚的說明這一點。在囚人難局裡, 雖然單期賽局的 Nash 均衡只有一個, 但它無限重覆時, 均衡的數目可以是暴漲到幾乎是任何可能的報酬都是均衡報酬。最後的這個結論, 不但在囚人難局是正確的, 事實上在幾乎所有的賽局都是對的。這就是有名的“無名定理” (Folk theorem)。

定理 8.4 (Folk theorem) *假設 $\Gamma(N, A, u)$ 是一個一般式賽局, 且沒有任何兩參賽者的報酬是完全線性相依的。那麼給定任何一個 F^* 裡的元素 x, 我們一定可以找到一個 $\underline{\delta}$, 使得 (只要$\delta \geq \underline{\delta}$) x 是 $\Gamma^\infty(\delta)$ 裡的 SPE 均衡報酬。*

因爲定理的證明稍繁雜, 所以我們省略證明。有興趣的讀者請見 Fudenberg 和 Tirole (1991) 及 Abreu, Dutta 和 Smith (1994)。證明這個定理的基本精神, 其實很簡單。對任何一個 $x \in F^*$, 我們都可以找出一條路徑 $\{a(t)\}_{t=1}^{\infty}$, 使參賽者玩這條路徑的報酬, $(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t u(a(t))$, 正好等於 x。爲了防止這條路徑上有人悖離, 規定若在任何一期有參賽者悖離, 那麼用對應於他的大中之極小報酬的策略處罰他 m 期。m 值的選擇是以讓悖離者因悖離而得到的好處完全被抹除。但爲了防止負責處罰的參賽者在處罰期間悖離, 如果任一處罰者在處罰別人的期間悖離, 那麼他自己會變成受處罰者。如此用每個參賽者的大中極小策略來層層相制以維持原先的均衡路徑 $\{a(t)\}_{t=1}^{\infty}$。在一般的賽局裡, 其證明之所以比重覆囚人難局複雜, 是因爲後者是用永遠玩囚人難局的 Nash 均衡來做處罰, 因此它不必擔心在處罰期間 “執法者” 自己又悖離的問題。但一般的情形下, 對應於某一參賽者的

minimax 的策略, 本身並不一定是一個單期賽局的 Nash 均衡, 因此必須考慮到 “執法者” 自己反而後來悖離的情況。也造成 SPE 必須設計一層層的處罰, 以下一層的處罰來維繫上一層的處罰。另外, 定理要求沒有任何兩個參賽者的報酬是完全線性相依的, 主要原因在於如果 i, j 兩人報酬完全相依, 那麼處罰 i 等於處罰 j。所以當 i 悖離需受處罰時, j 根本沒有意願參加, 造成均衡無法維持。

事實上, 即使是有限重覆賽局, 也有它的無名定理。它的敘述和證明都稍複雜。大致上, 它是說假設 F^* 的維數是 n, 且對每一參賽者而言, 都存在兩個單期賽局的 Nash 均衡, 使這個參賽者在這兩個 Nash 均衡的報酬不同。那麼對任意 $x \in F^*$, 一定可以找到一個 SPE 報酬 y, 只要賽局重複的次數夠多(但仍有限), 使 y 和 x 的差距要多近就有多近。(一般而言, 只要 Γ 有兩個 Nash 均衡, 而且這兩個均衡報酬裡, 有一個比另一個更具 Pareto 效率性, 那麼這個定理的假設就符合。) 定理證明請見 Benoit and Krishna (1985)。

上述論證和策略, 雖然複雜, 但它背面其實是一個非常簡單的原則。在參賽者有長期關係的時候, 由於參賽者可以用未來的接觸所產生的利害關係來報復或獎勵本期發生的事, 因此在單期賽局不是均衡的策略, 可以在多期賽局裡維持。

讀者或者會好奇: 這樣的無限賽局論証, 有解決我們剛開始所說的現實上的合作情形嗎? 舉例來說, 在現實裡, 人的生命都有限。因此大家所面對的, 必然都是有限重複賽局。但即便如此, 大家不是不斷在囚人難局中合作嗎? 這樣的質疑, 不無道理。但如果仔細思考, 就會發現有限重複賽局的一個很大特性, 是參賽者確定在某一期賽局一定結束 (例如, 在100期的有限重複賽局裡, 所有參賽者都完全確定賽局會在第100期後結束)。但在現實裡, 人並不確定結束的期限。不論是朋友或同事關係, 我們都知道最終一定結束 (死亡來臨), 但並不知道是何時結束。我們其實可以證明: 假設參賽者的報酬無折現, 但每玩完一輪之後, 有 $(1-\lambda)$ 的機率賽局將永遠結束, 有 λ 的機率他們會再玩一輪。玩完這一輪之後, 又有 $(1-\lambda)$ 的機率賽局將永遠結束, 且又有 λ 的機率再玩一輪, 如此不斷下去。這樣的賽局會等於一個折現爲 λ 的無限重複賽局 (見習題 8.9)。這個結果表示即使參賽者之間的關係終會結束, 但只要他們不確定何時會結束, 那麼他們的關係其實就可以用一個無限重複賽局來描述。

8.5 重複賽局的應用: 價格勾結

重複賽局理論的一個重要應用, 是研究競爭廠商的聯合行爲。以下我們用一個簡單, 但又有相當代表性的例子來說明。假設某一產業內有兩家廠商(1與2), 它們所面對的需求曲線是 $P = a - bQ$; 其中 a 和 b 均爲常數, 而 Q 是兩家廠商的總產量。再假設它們以數量來競爭 (換言之, 進行 Cournot 競爭)。爲簡化計算, 假設成本爲0。由 Cournot 競爭的基本計算, 我們可以很容易知道每一廠商的反應函數爲 $q_i = (a - bq_j)/2b$, $(i, j = 1, 2, i \neq j)$。Cournot 均衡下的每一廠商的產量爲 $a/3b$, 市場價格爲 $a/3$, 而每一廠商的利潤爲 $\underline{\pi} = a^2/9b$。但 Cournot 均衡下的利潤其實並不是廠商所能得到的最大利潤。如果它們可以互相勾結成爲一個壟斷產業, 那麼每一家廠商的產量應爲 $a/4b$, 使市場價格爲 $a/2$。這時各廠商平分壟斷利潤可以各得到 $\pi^* = a^2/8b$。換言之, 廠商如果要獲得最大利潤, 應限制產量以提高價格。這是勾結的基本邏輯。但在一般的單期競爭下, 這個目標卻無法達到。主要的原因, 是當一個廠商的產量是 $a/4b$ 時, 根據上述的反應函數, 它的對手的最適產量是

$$\frac{a - b(\frac{a}{4b})}{2b} = \frac{3a}{8b} > \frac{a}{4b}。 \tag{8.3}$$

換言之, 它的對手永遠有動機欺騙將產量提高爲 $3a/8b$, 而得到 $(3a/8b) \times [a - (3a/8b) - (a/4b)] = 9a^2/64b$ 的利潤。這時生產 $a/4b$ 的利潤是 $3a^2/32b$; 反而比 Cournot 競爭下的利潤 $\underline{\pi}$ 還低。這表示在單期競爭下, 勾結行爲一定無法達成, 因爲對手永遠有誘因增產而使自己蒙受損失。這就是勾結廠商所面對的囚人難局。也因如此, 在單期競爭下, 唯一的均衡結果是 Cournot 均衡。

但在多期競爭時, 面貌則完全改變。假設這兩家廠商在市場上進行無窮期的競爭, 而每兩期之間的折現爲 δ。這時它們可以設計如下的勾結策略: 在第一期時, 每家廠商生產 $a/4b$。在任何的一期 t $(t > 1)$, 只要在前 $(t-1)$ 期每一家廠商的產量都是 $a/4b$, 則在第 t 期也繼續生產 $a/4b$; 否則永遠生產 $a/3b$。這是一個典型的觸發策略, 它的基本運作其實非常容易。在一開始時要求廠商生產勾結產量 $a/4b$。若在任何一期任何一家廠商違反勾結約定, 則它們不再合作, 而永遠生產 Cournot 競爭下的產量 $a/3b$。在這個策略下, 廠商若每一期都照勾結的約定生產 $a/4b$, 則它的利潤爲

$$(1-\delta)\left[\frac{a^2}{8b} + \delta\frac{a^2}{8b} + \delta^2\frac{a^2}{8b} + ...\right] = \frac{a}{8b}。 \tag{8.4}$$

反之, 如果它在任何一期生產對應於 $a/4b$ 的最適產量 $3a/8b$, 那麼雖然違反約定的那一期可以得到較高的利潤 $(9a^2/64b)$, 但接下來兩廠商將進入永遠不合作的階段。利潤因此爲

$$(1-\delta)\left[\frac{9a^2}{64b}+\delta\frac{a^2}{9b}+\delta^2\frac{a^2}{9b}+...\right]。 \tag{8.5}$$

如果 $\delta \geq 9/15$, 則 (8.4) > (8.5)。這表示如果廠商對兩期之間利益的折現不是很大, 那麼雖然每一期都有機會可以欺騙對手, 將產量由約定的 $a/4b$ 增加到 $3a/8b$ 以增加單期利潤, 但以長期來看並不划算。因爲這將使之後每期的利潤由 $a^2/8b$ 減少到 $a^2/9b$。

上述的推論, 其實相當貼近現實上的直覺。爲了彼此的最大利益, 廠商必須合作。但這代表每個廠商的產量, 並非是相對於對方的最適產量 (因不在反應函數上)。換句話說, 這時廠商的短期利益應是增加產量。但如果它這樣做, 合作即行破局, 它們只好回到 Cournot 競爭下的產量 (這時就進入我們通稱的價格戰)。這種結果下的利潤將低於合作的利潤。因此, 它們寧願克制自己短期增產的誘因, 以追求長期最大利益。當然, 這只有在廠商顧及它的長期利益時才會如此, 也是爲什麼上述推論必需要在 δ 夠大時才成立。

8.5.1 Green-Porter 模型

上一節的勾結策略雖然直覺上合理, 但在現實運作上, 其實並不容易。因爲上述論證, 依賴於兩個非常重要的隱含假設, 第一是廠商必須觀察到其他廠商的產量; 第二是價格和數量之間的關係, 必須是完全固定的。第一個假設, 其實沒有那麼重要, 因爲只要價格和數量之間的關係是完全確定的, 那麼由觀察價格就可以知道對方的產量。[1] 真正重要的假設, 是價格和數量之間有完全確定的關係。也因爲這個假設, 只要一個廠商觀察到市場價格, 便可以完全確定對手是否按勾結約定的產量生產。但在現實裡,P 和 Q 之間的關係, 常常並非一對一完全相關。換句話說, 即使知道自己的產量和市場價格, 也很難完全推論出對手的產量。一個現實上合理的假

[1]例如, 假設廠商1的產量是10, 而且價格爲5, 那麼它就可以推論出廠商2的產量必然爲$-10+(a-5)/b$。

設, 是假定

$$P = a - bQ + \epsilon; \tag{8.6}$$

其中 ϵ 是一個隨機變數, 而且其平均值 $E(\epsilon) = 0$。爲了方便說明, 我們假設 ϵ 的密度函數, 是一個常態分佈 $N(0, \sigma^2)$, 且 $F(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 各自是它的機率分配及密度函數。同樣的, 假設廠商只能觀察到自己的產量和市場價格。這時廠商所面對的狀況, 就和上一小節完全不同。即使它觀察到市場價格, 也無法確定對方的產量是否遵守勾結約定。這是因爲如果市場上的價格較低, 可能代表某些廠商生產較高的產量, 也可能是景氣不佳 (ϵ 較小)。如果用8.5節裡的策略, 只因市場價格不是合作產量下所對應的預期價格 ($a/2$) 而行價格戰, 那麼兩個廠商沒有合作的可能, 因爲在 $P = a - bQ + \epsilon$ 的設定下, 幾乎可以確定即使兩廠商都生產勾結產量, 價格也不會是 $a/2$。

Green-Porter 模型的主要貢獻, 是說明即使在這種情形下, 廠商仍有聯合定價的可能。它的洞見是, 假如兩家廠商都生產 $a/4b$, 那麼價格應該離 $a/2$ 不會太遠。不但如此, 一個廠商如果要在單期裡欺騙對手, 那麼它應該要增加產量才會使利潤提高, 而非減產。這表示如果有廠商違反聯合定價的約定, 價格應會較 $a/2$ 低, 而非較高。因此, 它們可以設定一個價格門檻 $\bar{P} < a/2$, 並由此設計一個聯合定價的約定如下: 每家廠商一開始都生產 $a/4b$。如果本期市場價格高於 $\bar{P}$, 則下一期繼續生產 $a/4b$。如果本期價格低於 $\bar{P}$, 則從下一期開始, 進入 n 期的 Cournot 競爭之後, 再回到生產$a/4b$。這個策略的基本精神, 和上一節的觸發策略其實相同, 只是實行的手段有些差異。首先, 由於對手的產量無法確定, 而只能由價格來粗略判斷, 因此價格成爲相互監督對手有無違約的工具。第二, 由於價格和產量之間並非 1-1對應, 因此無法由它來完全判定對手是否違約, 而必須設定一個合理的忍受範圍。$\bar{P}$ 即代表它們所可以忍受的最小價格。如果市場價格高於 $\bar{P}$, 則它們認定合作成功, 因此下一期繼續合作。如果市場價格低於 $\bar{P}$, 則有人違約的可能性較大, 因此它們用 n 期的價格戰來互作處分。(這時其實不見得真的有廠商違約, 而可能只是它們運氣不好,ϵ 的實現值很低而已。) 換言之, 它們還是利用價格戰的可能性, 來維繫廠商之間的勾結, 只是這時生產 $a/4b$ 並不保證它們下一期不會進入價格戰, 而只是利用增產違約, 進入價格戰的可能就越大這個事實, 來維繫勾結。

我們首先從計算較簡單的情形開始, 假設 $n = \infty$; 換句話說, 假設一旦價格低於 $\bar{P}$, 就從下一期開始永遠進行 Cournot 競爭。令 $V^*(\delta)$ 這個策略之下的總報

酬。另外, 當總產為 Q 時, 市場價格低於 $\bar{P}$ 的機率為 $P_r(a+bQ+\epsilon \leq \bar{P}) = F(\bar{P}-a-bQ)$ 。我們已經知道 Cournot 競爭之下的單期預期報酬為 $\underline{\pi} = a^2/9b$, 而勾結的預期報酬為 $\pi^* = a^2/8b$。因此

$$V^*(\delta) = (1-\delta)\pi^* + \delta F(\bar{P}-\frac{a}{2})\underline{\pi} + \delta(1-F(\bar{P}-\frac{a}{2}))V(\delta)。 \tag{8.7}$$

上式的第一項是當期勾結的利潤; 第二項是如果當期的市場價格比 $\bar{P}$ 低, 兩廠商自下一期起, 永遠進入 Cournot 競爭之後的總預期利潤。第三項是如果當期市場價格高於 $\bar{P}$, 兩廠商自下期起, 仍然維持勾結的總預期利潤。由此可解出

$$V^*(\delta) = \frac{(1-\delta)\pi^* + \delta F(\bar{P}-\frac{a}{2})\underline{\pi}}{1-\delta(1-F(\bar{P}-\frac{a}{2}))}。 \tag{8.8}$$

在勾結契約下, 如果某一廠商單獨悖離而將產量由 $a/4b$ 改變到 q, 然後從下一期又跟隨勾結約定生產的話, 它的利潤為

$$V(q,\delta) = (1-\delta)[a-b(\frac{a}{4b}+q)]q + \delta F(\bar{P}-\frac{3}{4}a+bq)\underline{\pi} + \delta(1-F(\bar{P}-\frac{3}{4}a+bq))V^*(\delta)。 \tag{8.9}$$

上式的第一項是廠商單獨悖離到 q 那一期的利潤。第二項是本期市場價格如果低於 $\bar{P}$, 它自下一期開始的預期總利潤。第三項則是本期市場價格如果高於 $\bar{P}$, 它自下一期開始的總預期利潤。我們可算出

$$\frac{\partial V(q,\delta)}{\partial q} = (1-\delta)(\frac{3}{4}a-2bq) - \delta b f(\bar{P}-\frac{3}{4}a+bq)(V^*(\delta)-\underline{\pi})。 \tag{8.10}$$

如果勾結產量 $a/4b$ 要是均衡, 必須讓

$$\frac{\partial V(q,\delta)}{\partial q}|_{q=\frac{a}{4b}} = 0; \tag{8.11}$$

換句話說, 要讓

$$\frac{1}{4}(1-\delta)a - \delta b f(\bar{P}-\frac{1}{2}a)(V^*-\underline{\pi}) = 0。 \tag{8.12}$$

當 $\bar{P}$ 趨近無窮小時, (8.12) 的左邊為正數, 且當 $\bar{P}$ 逐漸增加往 $a/2$ 靠近時, (8.12) 式的左邊也逐漸減低。如果

$$f(0) > \frac{(1-\delta)a}{4\delta b(V^*-\underline{\pi})}, \tag{8.13}$$

那麼 (8.12) 式的左邊在 $\bar{P}=a/2$ 時爲負數。換句話說, 這種情形下, 存在一個唯一的價格 $\bar{P}$, 且 $\bar{P}<a/2$, 讓 (8.12) 式成立。二階條件爲負的要求, 也正好是 $\bar{P}<a/2$。式 (8.13) 的要求, 在 δ 夠接近 1, $V^*-\underline{\pi}$ 較大, 或 $f(0)$ 較大時都較容易成立。這三個條件的道理, 都很容易了解。折現因子 δ 較靠近 1, 表示未來的利潤相對重要, 也因此較容易維持勾結。$V^*-\underline{\pi}$ 較大, 表示勾結利潤相對於 Cournot 競爭的利潤較高, 也因此較容易維持勾結。$f(0)$ 較大, 表示常態分佈的標準差較小, 由 ϵ 值所產生的不確定性影響也較低, 因此也較容易維持勾結。

利用永遠的 Cournot 競爭威脅來維持均衡, 是一個成本相當大的方法。因爲在無窮期的競爭裡, 終會有一期 ϵ 的實現值會讓市場價格小於 $\bar{P}$ 。一個比較有效率的勾結方式, 是讓 $n<\infty$ 。只要讓 n 的值夠大, 那麼有限期 Cournot 競爭的威脅就足夠維繫勾結的進行。而長期來看, 勾結市場的價格就會在高勾結價和低 Cournot 競爭價這兩個不同價格區之間來回。這情形的計算較麻煩, 但可見 (Porter 1983 及 Green and Porter, 1984)。

8.6 結語

由這一章裡的幾個例子, 和本書之後的幾個章節, 讀者將會逐漸發現到, 伸展式賽局在法律和社會科學裡有非常廣泛的應用。在法律裡, 像是訴訟的程序或公司破產的協商; 在政治學裡, 像政黨的協商、議事規則的影響; 在經濟學裡, 像契約的談判或市場競爭等等, 無一不能化做伸展式賽局來研究求解。而且根據所得到的均衡, 我們更可以研究私有或市場上的訊息、談判籌碼, 甚至制度本身等等因素, 對賽局結果的影響。由於如此, 賽局理論乃成爲研究社會現象不可缺少的一個利器。在這一章裡, 我們較偏重求解的基本原則, 而不去討論訊息上的問題。事實上, 賽局理論和訊息理論結合之後, 才是它最具威力之處。我們在下面幾章裡, 會慢慢讀到這些理論。

習題

8.1 找出圖 8.8 賽局的所有 Nash 均衡及子賽局完全均衡。你認爲每一個你找到的子賽局均衡都是合理的均衡嗎? 爲什麼?

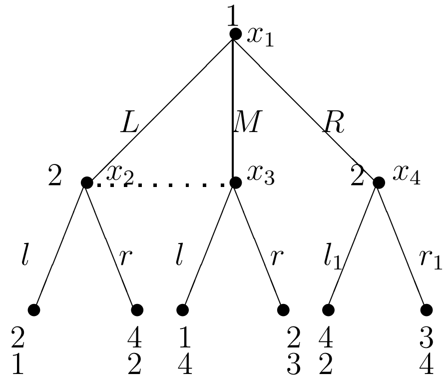

圖 8.8

8.2 在習題 8.1 中, 如果 x_2 和 x_3 不在同一個訊息集合內 (換言之, 如果圖 8.8 的賽局變成是在訊息完全 (perfect information) 的情況下), 它的子賽局完全均衡會有不同嗎?爲什麼?

8.3 假設某 A 要賣一台冰箱給某 B, 而這台冰箱對後者的價值是 500 元 (這是兩人共知的事)。A 與 B 現要談判冰箱的價格。先由 A 提出一價格, 若 B 同意則成交。若 B 不同意, 則由 B 出價, 由 A 決定是否接受。若同意則成交, 若不同意則又換回由 A 出價。如此不斷交互談判下去。但出價者也可以選擇離開談判桌, 這時談判即行停止。每次出價被拒之後, 冰箱都會因折舊而對 B的價值減少 100 元。請畫出這個賽局的樹狀圖, 並求解 SPE。(假設接受或拒絕一個條件對一個人的報酬相同的話, 他選擇接受。) 如果我們再假設每一次開價時, 開價者都要付出 10 元的成本, 那 SPE均衡又是什麼? 若一開始是由 B 出價, 會有什麼不同? 若每次出價者, 都要付出 20 元的成本, 那麼又有什麼不同?

8.4 $\Gamma(N, A, u)$ 是一個一般式賽局。現假設 N 這群人要把 Γ 重覆玩 m 次, 且每一個人在每一期都可以看到其他所有人的策略。因此在任何一期 $t\,(t \leq m)$ 時, 每一個人的策略, 是前 $t-1$ 期所有人所下過策略的函數。每一個人的總報酬, 是每一期報酬的折現總合。換言之, 如果 i 在第 t 期的報酬是 u_i^t, 那

麼他的總報酬即是 $\sum_{t=1}^{m} \delta^{t-1} u_i^t$。由此形成的一個賽局我們記為 Γ^m。

(1) 假設 Γ 只有一個 Nash 均衡, $a^* \in A$, 證明 Γ^m 也只有一個 SPE, 而且是每一期都玩 a^*。

(2) 現令 $m = 2$, 且 Γ 如下圖。

	A	B
A	2, 0	1, 1
B	3, 3	0, 0

請證明: 若 $\delta \geq \frac{1}{2}$, 則存在一個 Γ^2 的 SPE, 使得第一期兩人採 (A, A)。並由此說明當 Γ 的 Nash 均衡數目多於 1 時, Γ^m 的 SPE 並不一定是在每一期都採 Γ 的 Nash 均衡。

(3) 是否存在一 Γ^2 的 SPE, 使得第一期兩人採 (B,B)?

8.5 假設在一個內閣制國家有三個政黨, $1, 2, 3$。政黨先在大選裡決定議會席次, 再根據席次組閣。假設政黨 $1, 2, 3$ 的所得席次率各為 x, y, z, 且 $1/2 > x > y > z > 0$。換言之, 沒有一個政黨的席次過半。組閣的過程, 是由獲最高席次的政黨 1 來先組席次過半數的聯合政府。它可以選擇和政黨 2 或 3 或 2 及 3 合作。若合作政黨的總得票率超過 $1/2$, 則成功組閣。組閣成功的總報酬假設為 1, 而合作政黨的報酬和其席次成正比。例如, 若政黨 1 和 2 合組聯合內閣, 則其各自的報酬為 $x/(x+y)$ 和 $y/(x+y)$。若三黨共同組閣, 則政黨 $1, 2, 3$ 的報酬各自為 $x/(x+y+z)$, $y/(x+y+z)$ 及 $z/(x+y+z)$。如果沒有政黨願意加入而成為過半數聯合政府, 則政黨 1 組閣失敗, 換由獲第二高席次的政黨 2 來組閣。同樣的, 它可以向政黨 1 或 3 要求合作。若它

們都拒絕, 則由政黨 3 用同樣的程序來組閣。若三黨都組閣失敗, 我們假設這時政府將被臨時接管, 這時各政黨的報酬皆為 0。請注意一個政黨組閣時, 它不一定要先向較高席次的政黨要求合作。例如, 政黨 1 在組閣時, 不一定要先和第二高席次的政黨 2 合作。它可以先向政黨 3 要求合作, 若受拒絕, 再向政黨 2 要求。首先, 請證明當一個政黨組閣時, 不會要求同時和其他兩政黨合作。因此我們可以排除三黨聯合政府的可能性。其次, 請畫出這個賽局的樹狀圖。最後, 請解出這個賽局的 SPE, 並說明最後將由哪些政黨組閣。為什麼會這樣 ? (我們假設當一個政黨拒絕或接受一個組閣要求對它來說報酬都一樣時, 它會選擇接受。)

8.6 假設 B 是所有 Γ 的 Nash 均衡的集合, 那麼不論 δ 是多少, 在任一期都採 B 裡的任何一個元素的策略, 是 $\Gamma^{\infty}(\delta)$ 的一個 SPE。

8.7 假設市場有兩家廠商生產一同質產品, 並以 Cournot 方式競爭。這樣產品的市場需求函數是 $P = 100 - Q$。假設生產成本為 0。證明這兩家廠商的競爭為一囚人難局。換言之, 在 Cournot 競爭下, 兩家廠商無法生產對應於壟斷利潤的產量。為什麼? (提示: 用反應函數。) 當這兩家廠商可無限期在市場上時, 請證明他們可以設計一個重覆賽局策略, 使得他們(在折現因子夠大時) 每一期的利潤總和, 都是壟斷利潤。

8.8 假設國會裡只有三位議員 (把他們叫1,2,3), 要談判決定一筆資源 (假設是1元) 如何分配在各自的選區裡。談判程序如下: 先隨機決定一個提案人, 由他決定提出一個分配 $x^1 = (x^1_1, x^1_2, x^1_3)$; 其中 $x^1_i \geq 0$ 是讓議員 i 所得到的資源數, 且 $x^1_1 + x^1_2 + x^1_3 = 1$。其它兩人決定是否接受這個提案。提案是否通過由多數決定。換言之, 只要這兩人其中有一個人接受, 則提案通過, 每個人的報酬由 x^1 決定。若提案不通過, 則再隨機由其他兩個議員選出一人來提案 $x^2 = (x^2_1, x^2_2, x^2_3)$ 付表決, 同樣的, 只要另外兩個議員其中有一個同意, 則提案通過並按 x^2 分配資源。若不通過, 則由最後一個議員提案 $x^3 = (x^3_1, x^3_2, x^3_3)$表決, 若通過則按 x^3 分配資源。若不通過, 則不再討論這個議題, 每個議員所得到的報酬都是 0。請畫出賽局的數狀圖並求解 SPE。(假設一個議員接受一個提案或拒絕它給他的報酬相同, 則他選擇接受。)

8.9 考慮一個特殊的重複賽局如下: 參賽者玩某一個一般式賽局 $\Gamma(N, A, u)$。玩完之後, 有 $(1-\lambda)$ 的機率賽局即行結束, 有 λ 的機率參賽者再玩一次 $\Gamma(N, A, u)$。同樣地, 玩完之後, 有 $(1-\lambda)$ 的機率賽局結束, 但有 λ 的機率他們又會再玩一次。如此不斷下去, 假設參賽者的報酬無折現。試證明這個賽局同等於一個折現爲 λ 的無限重複賽局 $\Gamma^{\infty}(\lambda)$。

參考書目

Abreu, D., P. Dutta and L. Smith 1994. "The Folk Theorem for Repeated Games: A New Condition." *Econometrica*, 62, 939-48.

Benoit, J.-P. and V. Krishna 1985. "Finitely Repeated Games." *Econometrica*, 53, 905-22.

Fehr, E., 1998. "Gift Exchange and Reciprocity in Competitive Experimental Market." *European Economic Review*, 42, 1-34.

——— and A. Falk 1999. "Wage Rigidity in a Competitive Incomplete Contract Market." *Journal of Political Economy*, 107, 106-34.

———, G. Kirchsteiger and A. Reidl 1993. "Does Fairness Prevent Mrket Clearing? An Experimental Investigation." *Quarterly Journal of Economics*, 108, 437-60.

——— and K. Schmidt 2003. "Theories of Fairness and Reciprocity: Evidence and Economic Applications." in M. Dewatripont, L. P. Hansen and S. J. Turnovsky ed., *Advances in Economics and Econometrics*, Vol. 1, Cambridge University Press.

Fudenberg, D. and E. Maskin 1986. "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information." *Econometrica*, 54: 532-54.

——— and J. Tirole 1991. *Game Theory*, MIT Press.

Güth, W., R. Schmittberger and B. Schwarze 1982. “An Experimental Analysis of Ultimatum Bargainings.” *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 367-88.

Kreps, D. and R. Wilson 1986. “Sequential Equilibria.” *Econometrica*, 50, 863-94.

Kuhn, H. 1953. “Extensive Games and the Problems of Information.” in *Contributions to the Theory of Games*, Vol.2, H. Kuhn and A. Tucker eds., Princeton University Press.

Palfrey, T. and R. D. McKelvey 1992. “An Experimental Study of the Centipede Game.” *Econometrica*, 60, 803-36.

Selten, R. 1975. “Reexamination of the Perfectness Concept of Equilibrium Points in Extensive Games.” *International Journal of Game Theory*, 4, 25-55.