Exercices sur le prolongement analytique.

Définition (Fonctions analytiques)**.**

Soit I une union des intervalles ouverts $]a_i, b_i[$ (où $-\infty \le a_i < b_i \le +\infty$) dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *analytique* si pour tout $x_0 \in I$, il existe un $\delta > 0$ avec $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ et une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on ait $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.
(Remarquons toujours que δ dépend de x_0.)

Exercice 1 (Séries doubles)**.**

Soit $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ est une suite double dans $\mathbb{C}$ (i.e. $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$) telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}| < +\infty$. L'objectif de cet exercice est de montrer que les deux séries doubles $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$ et $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ sont convergentes dans $\mathbb{C}$ et ont la même somme.

i. Montrer que la série double $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$ converge dans $\mathbb{C}$ et que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ converge absolument pour tout $m \in \mathbb{N}$.

ii. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Expliquer pourquoi il existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de ϵ) tel que pour tout $N \ge N_0$ on ait $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}| < \epsilon$. Puis pour tout $\epsilon' > 0$ quelconque, expliquer pourquoi il existe un $M_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de ϵ' et de N_0) tel que pour tout $M \ge M_0$ et pour tout $0 \le n \le N_0$ on ait $\sum\limits_{m=M+1}^{\infty} |a_{m,n}| < \epsilon'$.

iii. Gardons toutes les hypothèses dans **ii**. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = - \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \sum_{m=M+1}^{\infty} a_{m,n} - \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{m=M+1}^{\infty} a_{m,n}.$$

En déduire que pour tout $M \ge M_0$, on a $\left| \sum\limits_{m=0}^{M} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,n} \right| < \epsilon + (N_0 + 1)\epsilon'$. Remarquons en particulier que N_0 dépend de ϵ.

iv. En déduire que $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ converge dans $\mathbb{C}$ et que $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$.

Exercice 2 (Changement du centre d'une série entière)**.**

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière réelle ayant pour rayon de convergence $\rho \in]0, +\infty]$. Soit x_0 un point dans $\mathbb{R}$ avec $|x_0| < \rho$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ pour $|x - x_0| < \rho - |x_0|$. On en déduira, en particulier, que $f :]{-\rho}, \rho[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction analytique.

Indication : développer $x^n = (x_0 + (x - x_0))^n$ par la formule du binôme et puis appliquer le résultat de l'Exercice 1 pour déterminer quand on peut échanger l'ordre de sommation.

Remarque : cependant, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ pourrait être plus grand que $\rho - |x_0|$. (Voir **iii.** de l'Exercice 4).

Exercice 3 (Unicité du prolongement analytique)**.**

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $I =]a, b[$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique. On suppose que l'ensemble $\{x \in I : f(x) = 0\}$ admet une valeur d'adhérence c dans I.

i. La fonction f étant analytique, elle se développe en une série entière centrée à c et convergeant sur $]c-R, c+R[$, pour un certain $R \in]0, +\infty]$ avec $]c-R, c+R[\subset I$. Montrer que $f = 0$ sur $]c-R, c+R[$.

Indication : si f n'y était pas identiquement nulle, il existerait un $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 = \cdots = a_{N-1} = 0$ mais $a_N \neq 0$. Alors $f(x) = a_N(x-c)^N g(x)$ où $g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-c)^n$. Montrer que $g(x) \neq 0$ pour tout x assez proche de c et en déduire une contradiction.

ii. En déduire que $f = 0$ sur I.

On pourra ainsi montrer l'« unicité du prolongement analytique » :

iii. On suppose que $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions analytiques. Montrer que si l'ensemble $\{x \in I : f_1(x) = f_2(x)\}$ a une valeur d'adhérence dans I, alors $f_1 = f_2$ sur I.

Exercice 4 (Un exemple du prolongement analytique)**.**

Soit $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$, le domaine de f est supposé inclu dans $\mathbb{R}$ mais à determiner.

i. Montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant f est 1. On en obtient alors une fonction $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

ii. Montrer en effet que $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ pour $-1 < x < 1$. On prolonge ainsi le domaine de définition de f dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Dorénavant posons $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

iii. Montrer que $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction analytique. Développer $f(x)$ en série entière au voisinage de $x = 1/2$ et montrer que cette dernière série entière a pour rayon de convergence $3/2$.

Remarque : comparer ce résultat et **i.** avec le remarque de l'Exercice 2.

iv. Soit $f_1 :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique coïncidant avec f sur $]-1, 1[$. Montrer que $f_1 = f$ sur $]-1, +\infty[$. *Indication : appliquer l'Exercice 3.*

v. Construire par contre une fonction analytique $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $]-1, 1[$ mais qui ne coincïde pas avec f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

vi. Construire également une fonction *indéfiniment dérivable* (C^∞) $g :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $]-1, 1[$ mais qui ne coincïde pas avec f sur $]-1, +\infty[$.