**Exercices sur les séries entières.**

**Exercice 1** (Séries entières et leurs sommes par des fonctions élémentaires)**.**
Pour chaque série entière réelle de variable $x$ suivantes, surtout centrée à l'origine, déterminer d'abord son rayon de convergence $\rho$, puis exprimer sa somme sur $-\rho < x < \rho$ en tant qu'une fonction élémentaire :

**i.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

**ii.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. *Indication : intégrer* **i.**

**iii.** $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. *Indication : dériver* **i.**

**iv.** $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$.

**Exercice 2** (Séries entières et la convergence uniforme)**.**

**i.** Montrer le *critère de Cauchy uniforme* : une suite de fonctions $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_n$ converge uniformément sur $I$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $q > p \geq N_0$ et pour tout $x \in I$ on ait $|f_q(x) - f_p(x)| < \epsilon$.
*Indication : on pourra considérer $q \to \infty$ dans la dernière inégalité.*

**ii.** Montrer le *théorème d'Abel* : si une série entière réelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de variable $x$ converge en $x = R \in ]0, +\infty[$, alors cette série entière converge uniformément sur l'intervalle $0 \leq x \leq R$.
*Indication : d'après* **i.**, *on pourra estimer* $\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \right|$, *en y remplaçant* $a_nR^n = B_n - B_{n+1}$ *où* $B_N := \sum_{n=N}^{\infty} a_n R^n$ *; pourquoi* $B_N \to 0$ *?*

**iii.** Montrer que sur l'intervalle $0 \leq x < 1$, la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ n'est pas uniforme.

**iv.** Soit $R \in ]0, +\infty[$, soit $(f_n : [0, R] \longrightarrow \mathbb{R})_n$ une suite de fonctions continues. Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, R[$, montrer que la suite $(f_n(R))_n$ converge dans $\mathbb{R}$.
*Indication :* $|f_q(R) - f_p(R)| \leq |f_q(R) - f_q(x)| + |f_q(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(R)|$.

**v.** En déduire que si $R \in ]0, +\infty[$ et si une série entière réelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de variable $x$ converge simplement dans $0 \leq x < R$ mais ne converge pas en $x = R$, alors sur l'intervalle $0 \leq x < R$ la convergence de cette série entière n'est pas uniforme.