Exercices sur les séries entières II.

Exercice 1 (Développement d'une fonction en série entière)**.**
Pour chaque fonction réelle ou complexe $f(x)$ suivante, trouver d'abord son développement en série entière centrée sur $x = 0$, déterminer ensuite le rayon de convergence de cette série entière, puis calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: (dans **ii.**, $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$)

i. $f(x) = (1 + x^2)\sin(x)$ (complexe).

ii. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x+i)}$ (complexe).

iii. $f(x) = \ln(3 + 2x^3)$ (réelle).

iv. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3+t^3}}$ (réelle).

Exercice 2 (Solutions d'équations différentielles par séries entières)**.**
Considérons l'équation différentielle suivante d'une fonction complexe *analytique*[1] $y = y(x)$:

$$(\star) \ : \ \begin{cases} y''(x) = e^x \cdot y(x) \ ; \\ y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta. \end{cases}$$

Ci-dessus, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont deux constantes.

i. Supposons que l'équation différentielle $(\star)$ ait une solution autour de $x = 0$ en série entière $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$) dont le rayon de convergence soit > 0. En substitutant cette solution hypothétique dans $(\star)$ et en comparant les coefficients, montrer que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_0}{n!} \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

ii. Dans la situation de **i.**, montrer que les coefficients a_n sont uniquement déterminés par les deux constantes α et β. Déterminer explicitement a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 en tant que des combinaisons des deux constantes α et β.

iii. Soient $a_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) ainsi déterminées par **i.** et par **ii**. Montrer qu'il existe un $R > 0$ tel que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge lorsque $|x| < R$. En déduire que $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est l'*unique* solution *analytique* de $(\star)$ dans $|x| < R$.
Indication : pour l'existence de R, on pourra montrer, par exemple, qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que $|a_n| \leq Cn^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($0^0 := 1$).

iv. De même façon, montrer que pour tout $c \in \mathbb{C}$, il existe un $R' > 0$ (dépendant de c) tel que l'équation différentielle $(\star)$, avec la condition initialle « $y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta$ » remplacée par « $y(c) = \gamma, \ y'(c) = \delta$ », ait une unique solution analytique dans $|x - c| < R'$ par une série entière de la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ convergeant dans $|x - c| < R'$.

Remarque : le résultat de **iv.** et la théorie de Cauchy dans l'analyse complexe nous permettront de montrer que la série entière $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dans **iii.** a pour rayon de convergence $+\infty$ et se trouve l'unique solution analytique de $(\star)$ dans $\mathbb{C}$.

[1] Rappelons qu'une fonction complexe $y = y(x)$ est dite *analytique* si pour tout $c \in \mathbb{C}$ appartenant au domaine de définition Ω de y, il existe un $r > 0$ et une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\{x \in \mathbb{C} : |x - c| < r\} \subset \Omega$ et tels que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ lorsque $|x - c| < r$.

Exercice 3 (Équations différentielles, relations de récurrence, singularités régulières)**.**
Soit $c \in]0, +\infty[$. Considérons l'équation différentielle et la relation de récurrence suivantes :

$(E_c)\ :\ (x-c)^2 y''(x) + (x-c)y'(x) + 2y(x) = 0\ \ (x \in]-\infty, c[,\ y(x)$ à valeurs complexes) ;
$(R_c)\ :\ c^2(n+2)(n+1)a_{n+2} - c(n+1)(2n+1)a_{n+1} + (n^2+2)a_n = 0\ \ (n \in \mathbb{N})$.

i. Supposons que pour un cetrain $\delta > 0$, l'équation (E_c) puisse être résolue dans $x \in]-\delta, \delta[$ par une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (R_c).

Comme (R_c) n'est pas facile à résoudre dans un premier temps, au lieu de résoudre (E_c) à l'aide de (R_c), vu que l'équation (E_c) a une forme spéciale[2], on peut alors résoudre (E_c) directement, puis résoudre (R_c) en utilisant la solution de (E_c).

ii. Sous le changement de variable $]-\infty, c[\ni x \longleftrightarrow t \in \mathbb{R}$ défini par $t = \ln(c-x)$, montrer que l'équation (E_c) se transforme en l'équation

$$(S)\ :\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2y = 0$$

iii. Montrer que l'espace des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (S) est donné par

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}\cdot e^{i\sqrt{2}t} + \mathbb{C}\cdot e^{-i\sqrt{2}t} = \mathbb{C}\cdot\cos(\sqrt{2}t) + \mathbb{C}\cdot\sin(\sqrt{2}t).$$

Indication : l'équation (S) étant à coefficients constants, on peut la factorise comme on factorise un polynôme : $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2)y = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+i\sqrt{2})(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-i\sqrt{2})y$.

iv. En déduire que l'espace des solutions $\mathcal{E}_c$ de (E_c) (sur $x \in]-\infty, c[$) se trouve

$$\mathcal{E}_c = \mathbb{C}\cdot(c-x)^{i\sqrt{2}} + \mathbb{C}\cdot(c-x)^{-i\sqrt{2}} = \mathbb{C}\cdot\cos(\sqrt{2}\ln(c-x)) + \mathbb{C}\cdot\sin(\sqrt{2}\ln(c-x)).$$

v. En résoudre la relation de récurrence (R_c), i.e. exprimer a_n en tant que a_0 et a_1.
Indication : développer $(c-x)^{\pm i\sqrt{2}} = c^{\pm i\sqrt{2}}(1-\frac{x}{c})^{\pm i\sqrt{2}}$ par la formule de binôme.
Solution : $a_n = \frac{1}{2}(-\frac{1}{c})^n(\binom{i\sqrt{2}}{n} + \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}i}(-\frac{1}{c})^{n-1}(\binom{i\sqrt{2}}{n} - \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_1\ (n \in \mathbb{N})$.

Dans le reste de cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle

$(E_0)\ :\ x^2 y''(x) + xy'(x) + 2y(x) = 0\ \ (x \in]-\infty, 0[,\ y(x)$ à valeurs complexes).

On dit que (E_0) a une *singularité régulière*[3] en $x = 0$. (On dirait « $(E_0) = \lim_{c\to 0+}(E_c)$ ».)

vi. (E_0) ayant une singularité régulière en $x = 0$, on espère, d'après la théorie générale, une solution de (E_0) autour de $x = 0$ (dans $x < 0$) sous la forme $y = (-x)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ($\lambda, b_n \in \mathbb{C}$) avec $b_0 = 1$. Montrer que dans ce cas on a $\lambda = \pm i\sqrt{2}$ et en résoudre (E_0).

vii. En s'inspirant des questions **ii.-iv.**, montrer que l'espace des solutions de (E_0) est donné par $\mathcal{E}_0 := \mathbb{C}\cdot(-x)^{i\sqrt{2}} + \mathbb{C}\cdot(-x)^{-i\sqrt{2}}$. Comparer ce résultat avec **vi**.

---

[2] L'équation (E_c) est de type *Cauchy-Euler*.

[3] Par définition, une équation différentielle $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x) = 0$ a un point *ordinaire* en $x = 0$ si $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques sur un voisinage de $x = 0$, et a (au plus) une *singularité régulière* en $x = 0$ si $xp(x)$ et $x^2q(x)$ sont analytiques sur un voisinage de $x = 0$.