Exercices sur les séries entières II. – **Corrigé partiel**

Exercice 1 (Développement d'une fonction en série entière).

(énoncés et solutions omis)

Exercice 2 (Solutions d'équations différentielles par séries entières).

Considérons l'équation différentielle suivante d'une fonction complexe *analytique*[1] $y = y(x)$:

$$(\star) \ : \ \begin{cases} y''(x) = e^x \cdot y(x) \ ; \\ y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta. \end{cases}$$

Ci-dessus, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont deux constantes.

i. Supposons que l'équation différentielle $(\star)$ ait une solution autour de $x = 0$ en série entière $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ dont le rayon de convergence soit > 0. En substitutant cette solution hypothétique dans $(\star)$ et en comparant les coefficients, montrer que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_0}{n!} \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

(solution omise)

ii. Dans la situation de **i.**, montrer que les coefficients a_n sont uniquement déterminés par les deux constantes α et β. (deuxième partie de l'énoncé omise)

(solution omise)

iii. Soient $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ ainsi déterminées par **i.** et par **ii**. Montrer qu'il existe un $R > 0$ tel que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge lorsque $|x| < R$. (deuxième partie de l'énoncé omise)

Indication : pour l'existence de R, on pourra montrer, par exemple, qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que $|a_n| \leq Cn^n/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(0^0 := 1)$.

Rappelons auparavant ce qu'on a démontré dans le TD pour la question **i.** : on a supposé à priori que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ résolve l'équation différentielle $(\star)$ et on a établi la relation de récurrence suivante pour les coefficients $(a_n)_n$:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_0}{n!} \ \ (n \in \mathbb{N}). \qquad (1)$$

En suivant l'indication, on montre d'abord qu'il existe une constante réelle $C > 0$ tel que $|a_n| \leq C\frac{n^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $0^0 := 1, \ 0! = 1$) : fixons un nombre réel $C > |a_0|$; on voit dans un premier temps que l'inégalité $|a_n| \leq C\frac{n^n}{n!}$ est vrai pour $n = 0$. Supposons que :

$$\text{pour un cetrain } n \in \mathbb{N} \text{ on ait } |a_k| \leq C\frac{k^k}{k!} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n. \qquad (2)$$

[1] Rappelons qu'une fonction complexe $y = y(x)$ est dite *analytique* si pour tout $c \in \mathbb{C}$ appartenant au domaine de définition Ω de y, il existe un $r > 0$ et une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\{x \in \mathbb{C} : |x - c| < r\} \subset \Omega$ et tels que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ lorsque $|x - c| < r$.

Alors :

$$\begin{array}{rcll}
|a_{n+1}| & = & \frac{1}{(n+1)n}\cdot\left|\frac{a_{n-1}}{0!}+\frac{a_{n-2}}{1!}+\cdots+\frac{a_1}{(n-2)!}+\frac{a_0}{(n-1)!}\right| & \text{(d'après (1))}\\
& \le & \frac{1}{(n+1)n}\cdot\left(\frac{|a_{n-1}|}{0!}+\frac{|a_{n-2}|}{1!}+\cdots+\frac{|a_1|}{(n-2)!}+\frac{|a_0|}{(n-1)!}\right) & \\
& \le & \frac{C}{(n+1)n}\cdot\left(\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!0!}+\frac{(n-2)^{n-2}}{(n-2)!1!}+\cdots+\frac{1^1}{1!(n-2)!}+\frac{1}{0!(n-1)!}\right) & \text{(d'après (2))}\\
& \le & \frac{C}{(n+1)n}\cdot\left(\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!0!}+\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)!1!}+\cdots+\frac{(n-1)^1}{1!(n-2)!}+\frac{(n-1)^0}{0!(n-1)!}\right) & \\
& = & \frac{C}{(n+1)n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n-1)^{n-1-k} & \\
& = & \frac{C}{(n+1)!}((n-1)+1)^{n-1} & \text{(formule du binôme)}\\
& \le & C\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}. &
\end{array}$$

Ainsi, par le raisonnement par récurrence (l'induction mathématique), on a $|a_k| \le C\frac{k^k}{k!}$ (avec $|a_0| < C < +\infty$) pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en obtient ainsi une majoration $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \le C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}|x|^n$ ($|a_0| < C < +\infty$). Soit $u_n(x) = \frac{n^n}{n!}|x|^n$. Comme $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = (1+\frac{1}{n})^n|x| \xrightarrow{n\to\infty} e|x|$, d'après le critère d'Alembert, on voit que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}|x|^n = \sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ converge si $|x| < e^{-1}$. Ainsi, par la majoration au début de ce paragraphe, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ converge si $|x| < e^{-1}$, d'où la convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ dans $|x| < e^{-1}$ (et on peut donc prendre $R = e^{-1}$).

(Énoncé et solution de **iv.** omis ; remarque omise)

Exercice 3 (Équations différentielles, relations de récurrence, singularités régulières)**.**
Soit $c \in]0,+\infty[$. Considérons l'équation différentielle et la relation de récurrence suivantes :

$$(E_c)\ :\ (x-c)^2y''(x)+(x-c)y'(x)+2y(x)=0\ \ (x\in]-\infty,c[,\ y(x) \text{ à valeurs complexes}) ;$$
$$(R_c)\ :\ c^2(n+2)(n+1)a_{n+2}-c(n+1)(2n+1)a_{n+1}+(n^2+2)a_n=0\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

i. Supposons que pour un cetrain $\delta > 0$, l'équation (E_c) puisse être résolue dans $x \in]-\delta,\delta[$ par une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ pour une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (R_c).

En dérivant la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ terme-par-terme dans $|x| < \delta$, on voit que pour $|x| < \delta$ on a :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\ ;$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Comme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ est supposée d'être une solution de (E_c), on peut substituer dans l'équation (E_c) les expressions ci-dessus pour y, y' et y'' : (dans les calculs suivants on supposera toujours que $|x| < \delta$)

$$\begin{aligned}
(x-c)^2y''(x) &= x^2y'' - 2cxy'' + c^2y'' \\
&= x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}\right) - 2cx\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}\right) + c^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2c(n+1)na_{n+1}x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} c^2(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)a_n - 2c(n+1)na_{n+1} + c^2(n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x-c)y'(x) &= xy' - cy' \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}\right) - c\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} c(n+1)a_{n+1}x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[na_n - c(n+1)a_{n+1}]x^n \ ;
\end{aligned}$$

$2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^n$; d'où

$$\begin{aligned}
0 &= (x-c)^2y''(x) + (x-c)y'(x) + 2y(x) \quad (\text{équation } (E_c)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)a_n - 2c(n+1)na_{n+1} + c^2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - c(n+1)a_{n+1} + 2a_n]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[c^2(n+2)(n+1)a_{n+2} - c(n+1)(2n+1)a_{n+1} + (n^2+2)a_n]x^n \quad (|x| < \delta).
\end{aligned}$$

Tous les coeffieicients de la dernière série entière sont donc nuls, d'où la relation de récurrence (R_c) souhaitée.

Comme (R_c) n'est pas facile à résoudre dans un premier temps, au lieu de résoudre (E_c) à l'aide de (R_c), vu que l'équation (E_c) a une forme spéciale[2], on peut alors résoudre (E_c) directement, puis résoudre (R_c) en utilisant la solution de (E_c).

ii. Sous le changement de variable $]-\infty, c[\ni x \longleftrightarrow t \in \mathbb{R}$ défini par $t = \ln(c-x)$, montrer que l'équation (E_c) se transforme en l'équation

$$(S) \ : \ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2y = 0$$

Le changement de variable $t = \ln(c-x)$ donne $c - x = e^t$ et les calculs suivantes : (si on souhaite, on pourra même y omettre la fonction y et en obtiendra des égalités au

[2] L'équation (E_c) est de type *Cauchy-Euler*.

niveau d'opérateur différentiels)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{c-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\ ;\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(-e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(-e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(-e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = e^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= e^{-t}\left(-e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) = -e^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.
\end{aligned}$$

Ces observations nous permettent de transformer l'équation différentielle (E_c) de variable x en l'équation différentielle (S) de variable t :

$$\begin{aligned}
&(E_c)\ :\ (x-c)^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (x-c)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0\\
\iff\ & e^{2t}\cdot\left(-e^{-2t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) - e^{t}\cdot\left(-e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + 2y = 0\\
\iff\ & (S)\ :\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2y = 0.
\end{aligned}$$

iii. Montrer que l'espace des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation (S) est donné par

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}\cdot e^{i\sqrt{2}t} + \mathbb{C}\cdot e^{-i\sqrt{2}t} = \mathbb{C}\cdot\cos(\sqrt{2}t) + \mathbb{C}\cdot\sin(\sqrt{2}t).$$

Indication : l'équation (S) étant à coefficients constants, on peut la factorise comme on factorise un polynôme : $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2)y = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+i\sqrt{2})(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-i\sqrt{2})y$.

Soit $y = y(t)$ une solution de l'équation différentielle (S). En suivant l'indication, on sait que $0 = (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2)y = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+i\sqrt{2})(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-i\sqrt{2})y$, i.e. $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+i\sqrt{2})u = 0$ où $u(t) := (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-i\sqrt{2})y(t)$. On va retrouver u d'abord, puis utiliser la solution u pour déterminer y.

- Résoudre u : en multipliant u par le facteur auxiliaire $\exp(\int i\sqrt{2}\mathrm{d}t) = e^{i\sqrt{2}t}$, on peut observer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{i\sqrt{2}t}u\right) = e^{i\sqrt{2}t}\left(i\sqrt{2}u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 0,$$

  par conséquent $e^{i\sqrt{2}t}u = C$ où $C \in \mathbb{C}$ est une constante, puis $u = Ce^{-i\sqrt{2}t}$.
- Résoudre y : par définition de u, on a $(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - i\sqrt{2}y) = u = Ce^{-i\sqrt{2}t}$. On emploie la même technique lors de la résolution de u : en considérant le facteur auxiliaire $\exp(\int -i\sqrt{2}\mathrm{d}t) = \exp(-i\sqrt{2}t)$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-i\sqrt{2}t}y\right) = e^{-i\sqrt{2}t}\left(-i\sqrt{2}y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = e^{-i\sqrt{2}t}u = Ce^{-i2\sqrt{2}t}.$$

  Donc $e^{-i\sqrt{2}t}y = \frac{C}{-i2\sqrt{2}}e^{-i2\sqrt{2}t} + C'$ où $C' \in \mathbb{C}$ est aussi une constante. Puis $y = \frac{C}{-i2\sqrt{2}}e^{-i\sqrt{2}t} + C'e^{i\sqrt{2}t}$, i.e. $y = Ae^{-i\sqrt{2}t} + Be^{i\sqrt{2}t}$ pour deux constantes $A, B \in \mathbb{C}$, ainsi s'achève la preuve.

iv. En déduire que l'espace des solutions $\mathcal{E}_c$ de (E_c) (sur $x \in]-\infty, c[$) se trouve

$$\mathcal{E}_c = \mathbb{C} \cdot (c-x)^{i\sqrt{2}} + \mathbb{C} \cdot (c-x)^{-i\sqrt{2}} = \mathbb{C} \cdot \cos(\sqrt{2}\ln(c-x)) + \mathbb{C} \cdot \sin(\sqrt{2}\ln(c-x)).$$

D'après la question **iii.** et le changement de variable $t = \ln(c-x)$, on voit déjà que $\mathcal{E}_c = \mathbb{C}e^{i\sqrt{2}t} + \mathbb{C}e^{-i\sqrt{2}t} = \mathbb{C}e^{i\sqrt{2}\ln(c-x)} + \mathbb{C}e^{-i\sqrt{2}\ln(c-x)} = \mathbb{C}(c-x)^{i\sqrt{2}} + \mathbb{C}(c-x)^{-i\sqrt{2}}$. Ensuite, on a $e^{\pm i\sqrt{2}\ln(c-x)} = \cos(\sqrt{2}\ln(c-x)) \pm i\sin(\sqrt{2}\ln(c-x))$ et $\cos(\sqrt{2}\ln(c-x)) = \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{2}\ln(c-x)} + e^{-i\sqrt{2}\ln(c-x)})$ et $\sin(\sqrt{2}\ln(c-x)) = \frac{1}{2i}(e^{i\sqrt{2}\ln(c-x)} - e^{-i\sqrt{2}\ln(c-x)})$, on voit alors $\mathcal{E}_c = \mathbb{C}e^{i\sqrt{2}\ln(c-x)} + \mathbb{C}e^{-i\sqrt{2}\ln(c-x)} = \mathbb{C}\cos(\sqrt{2}\ln(c-x)) + \mathbb{C}\sin(\sqrt{2}\ln(c-x))$ également et la preuve est complétée.

v. En résoudre la relation de récurrence (R_c), i.e. exprimer a_n en tant que a_0 et a_1.
Indication : développer $(c-x)^{\pm i\sqrt{2}} = c^{\pm i\sqrt{2}}(1-\frac{x}{c})^{\pm i\sqrt{2}}$ *par la formule de binôme.*
Solution : $a_n = \frac{1}{2}(-\frac{1}{c})^n(\binom{i\sqrt{2}}{n} + \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}i}(-\frac{1}{c})^{n-1}(\binom{i\sqrt{2}}{n} - \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_1$ $(n \in \mathbb{N})$.

Compte tenu de la question **iv.**, une solution de (E_c) s'écrit dans la forme $y = k_1(c-x)^{i\sqrt{2}} + k_2(c-x)^{-i\sqrt{2}} = k_1c^{i\sqrt{2}}(1-\frac{x}{c})^{i\sqrt{2}} + k_2c^{-i\sqrt{2}}(1-\frac{x}{c})^{-i\sqrt{2}}$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ deux constantes) et donc s'écrit dans la forme $y = A(1-\frac{x}{c})^{i\sqrt{2}} + B(1-\frac{x}{c})^{-i\sqrt{2}}$ ($A, B \in \mathbb{C}$ deux constantes). D'après la formule du binôme, dans $|x| < c$, une solution de (E_c) est donc de la forme

$$\begin{aligned} y &= A(1-\tfrac{x}{c})^{i\sqrt{2}} + B(1-\tfrac{x}{c})^{-i\sqrt{2}} \\ &= A\sum_{n=0}^{\infty}\binom{i\sqrt{2}}{n}(-\tfrac{x}{c})^n + B\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-i\sqrt{2}}{n}(-\tfrac{x}{c})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{c})^n\left(A\binom{i\sqrt{2}}{n} + B\binom{-\sqrt{2}}{n}\right)x^n \end{aligned}$$

pour des constantes $A, B \in \mathbb{C}$.

Si on écrit $a_n = (-\frac{1}{c})^n\left(A\binom{i\sqrt{2}}{n} + B\binom{-\sqrt{2}}{n}\right)$, on sait alors que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ est une série entière ayant pour rayon de convergence > 0 (en effet $\geq c$) et se trouve une solution de l'équation différentielle (E_c), donc la conclusion de la question **i.** signifie que la suite $(a_n)_n$ ici vérifie la relation de récurrence (R_c).

Par conséquent, pour toutes constantes $A, B \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n)_n$ dont le terme général est $a_n = (-\frac{1}{c})^n\left(A\binom{i\sqrt{2}}{n} + B\binom{-\sqrt{2}}{n}\right)$ résout (R_c). Si on veut exprimer a_n en tant que a_0 et a_1, il s'agit d'exprimer A et B en tant que a_0 et a_1, mais cela est facile : en considérant les deux premiers termes $n = 0$ et $n = 1$ dans la définition de a_n ici, on obtient $a_0 = A+B$ et $a_1 = (-\frac{1}{c})(i\sqrt{2}A - i\sqrt{2}B)$, d'où $(A, B) = (\frac{1}{2}(a_0 + \frac{ica_1}{\sqrt{2}}), \frac{1}{2}(a_0 - \frac{ica_1}{\sqrt{2}}))$. La solution de (R_c) est ainsi donnée par :

$$\begin{aligned} a_n &= (-\tfrac{1}{c})^n\left(A\binom{i\sqrt{2}}{n} + B\binom{-\sqrt{2}}{n}\right) \\ &= (-\tfrac{1}{c})^n\left(\tfrac{1}{2}(a_0 + \tfrac{ica_1}{\sqrt{2}})\binom{i\sqrt{2}}{n} + \tfrac{1}{2}(a_0 - \tfrac{ica_1}{\sqrt{2}})\binom{-\sqrt{2}}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{c})^n(\binom{i\sqrt{2}}{n} + \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_0 + \tfrac{1}{2\sqrt{2}i}(-\tfrac{1}{c})^{n-1}(\binom{i\sqrt{2}}{n} - \binom{-i\sqrt{2}}{n})a_1 \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(Énoncés et solutions de **vi.-vii.** omis)