Vrai ou Faux ? Pour chaque énoncé suivant, déterminer s'il est vrai ou faux en donnant une preuve ou un contre-exemple.

Dans les énoncés n°1-n°4 suivants, soit $(f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continues* sur $[0,1]$.

1. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$, alors la limite simple f dans $[0,1]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est continue sur $[0,1]$.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,r]$ pour tout $0 < r < 1$, alors la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$ existe et est continue sur $[0,1[$.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,r]$ pour tout $0 < r < 1$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1[$.
4. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1[$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Dans les énoncés n°5-n°7 suivants, soit $(f_n :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continuellement dérivables* (i.e. C^1) sur $]-1,1[$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F_n(x) = \int\limits_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad (-1 < x < 1)$.

5. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f, alors $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction g avec $g = f'$ sur $]-1,1[$.
6. Si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction g, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f avec $f' = g$ sur $]-1,1[$.
7. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f, alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction F avec $F' = f$ sur $]-1,1[$.

Dans les énoncés n°8-n°10 suivants, soit $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continuellement dérivables* (i.e. C^1) sur $\mathbb{R}$.

8. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f^2.
9. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\mathbb{R}$ et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur $\mathbb{R}$.
10. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et si de plus chaque f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *uniformément bornée* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \in]0,+\infty[$ indépendante de n telle que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans les énoncés n°11-n°20 suivants, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dénote par ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et on suppose que $0 < \rho < +\infty$.

11. La série entière $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}(a_n x^n)}{\mathrm{d}x})$ a pour rayon de convergence ρ.

12. La série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1} (= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t)$ a pour rayon de convergence ρ.

13. La série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence ρ^2.

14. La série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{\rho}$.

15. La série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ a pour rayon de convergence ρ.

16. Si de plus $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} x^n$ a pour rayon de convergence ρ^{-1}.

17. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ une série entière réelle ayant pour rayon de convergence ρ. Alors la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ a pour rayon de convergence ρ.

18. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = -\rho$.

19. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$, alors $\lim\limits_{x\to\rho-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$.

20. Si $\lim\limits_{x\to\rho-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$ et on a aussi l'égalité $\lim\limits_{x\to\rho-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$.