Vrai ou Faux ? – **Corrigé succinct**

Pour chaque énoncé suivant, déterminer s'il est vrai ou faux en donnant une preuve ou un contre-exemple.

Dans les énoncés n°1-n°4 suivants, soit $(f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continues* sur $[0,1]$.

1. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$, alors la limite simple f dans $[0,1]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est continue sur $[0,1]$.

   Vrai. C'est une propriété standarde de la convergence uniforme.

2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,r]$ pour tout $0<r<1$, alors la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$ existe et est continue sur $[0,1[$.

   Vrai. Pour chaque $0<r<1$, la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,r]$ et la continuité de chaque f_n impliquent l'existence et la continuité de la limite $f=\lim f_n$ sur $[0,r]$. Ainsi sur $\bigcup\limits_{0<r<1}[0,r]=[0,1[$ la limite f existe et est continue.

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,r]$ pour tout $0<r<1$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1[$.

   Faux. Un contre-exemple : pour $f_n(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N}, x\in[0,1])$, la limite simple f de $(f_n)_n$ est $f(x)=0$ si $0\le x<1$ et $f(1)=1$. Pour tout $0<r<1$, $\sup\limits_{0\le x\le r}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0\le x\le r}x^n=r^n\xrightarrow{n\to\infty}0$ et donc $f_n\to f$ uniformément sur $[0,r]$. Or $\sup\limits_{0\le x<1}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0\le x<1}x^n=1$ pour tout n, donc la convergence $f_n\to f$ n'est pas uniforme sur $[0,1[$.

4. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1[$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

   Vrai. Considérons l'inégalité $|f_q(1)-f_p(1)|\le|f_q(1)-f_q(x)|+|f_q(x)-f_p(x)|+|f_p(x)-f_p(1)|$ $(q>p>0,\ 0<x<1)$; alors pour tous $q>p>1$ et pour tout $0<x<1$ on a $|f_q(1)-f_p(1)|\le|f_q(1)-f_q(x)|+\sup\limits_{0\le y<1}|f_q(y)-f_p(y)|+|f_p(x)-f_p(1)|$, donc en prenant $x\to 1-$ dans la dernière inégalité, d'après la continuité de f_q et de f_p, on a $|f_q(1)-f_p(1)|\le\sup\limits_{0\le y<1}|f_q(y)-f_p(y)|$ pour tous $q>p>0$, donc $\sup\limits_{0\le y\le 1}|f_q(y)-f_p(y)|\le\sup\limits_{0\le y<1}|f_q(y)-f_p(y)|\xrightarrow{p,q\to\infty}0$ (critère de Cauchy uniforme), d'où la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ par le critère de Cauchy uniforme.

Dans les énoncés n°5-n°7 suivants, soit $(f_n :]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continuellement dérivables* (i.e. C^1) sur $]-1,1[$; pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $F_n :]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $F_n(x)=\int\limits_0^x f_n(t)\,dt$ $(-1<x<1)$.

5. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f, alors $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction g avec $g = f'$ sur $]-1,1[$.

   Faux. Un contre-exemple : pour $f_n(x) = n^{-1}\sin(n^2 x)$, il est facile de montrer que $f_n \to 0$ uniformément sur $]-1,1[$, cependant comme $f'_n(x) = n\cos(n^2 x)$, on voit que $f'_n(0) = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ et donc $(f'_n)_n$ ne converge pas uniformément (même pas simplement).

6. Si $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction g, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f avec $f' = g$ sur $]-1,1[$.

   Faux. Un contre-exemple : pour $f_n(x) = n$, $f'_n = 0$, donc $f'_n \to 0$ uniformément sur $]-1,1[$ mais $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément (même pas simplement).

7. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction f, alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-1,1[$ vers une fonction F avec $F' = f$ sur $]-1,1[$.

   Vrai. C'est aussi un résultat standard, provenant de l'observation suivante : $\sup\limits_{|x|<1}\left|F_n(x) - \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sup\limits_{|x|<1}\left(|x|\cdot\sup\limits_{|t|<1}|f_n(t)-f(t)|\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Dans les énoncés n°8-n°10 suivants, soit $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *continuellement dérivables* (i.e. C^1) sur $\mathbb{R}$.

8. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f^2.

   Faux. Un contre-exemple : pour $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, on peut montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(x) = x$. Comme $f_n^2(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$, on voit que f_n^2 converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f^2 = x^2$, cependant cette convergence n'est pas uniforme car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n^2(x) - f^2(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| = +\infty$ pour tout n.

9. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\mathbb{R}$ et si $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur $\mathbb{R}$.

   Faux. Un contre-exemple : pour $f_n(x) = \arctan(\frac{x}{n})$, on a $f'_n(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{x}{n})^2}$, donc $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ et puis $f'_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part, il est clair que $f_n \to 0$ simplement dans $\mathbb{R}$, mais cette convergence n'est pas uniforme parce que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = |\arctan(\pm\infty)| = \pi/2 \neq 0$ pour tout n.

10. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et si de plus chaque f_n est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *uniformément bornée* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \in]0,+\infty[$ indépendante de n telle que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

    Vrai. D'après le critère de Cauchy uniforme, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q \geq N$ on ait $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_q(x) - f_p(x)| \leq 1$. Donc pour tout $n \geq N$ on a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_N(x)| + \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f_N(x)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_N(x)| + 1$. En conclusion

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \le M := 1 + \sup_{0\le k\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| < +\infty.$$

Dans les énoncés n°11-n°20 suivants, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dénote par ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et on suppose que $0 < \rho < +\infty$.

11. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(a_n x^n)}{\mathrm{d}x})$ a pour rayon de convergence ρ.

    Vrai. Le fait que $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence ρ signifie que $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < \rho$ et diverge si $|x| > \rho$. Pour $|x| < \rho$, en choisissant un $|x| < q < \rho$, d'abord la convergence de $\sum a_n q^n$ implique l'existence d'une constante $C < +\infty$ telle que $|a_n q^n| \le C$ pour tout n (en effet $a_n q^n \to 0$), puis pour notre $|x| < q$, on a $\sum |n a_n x^n| = \sum |a_n q^n n (\frac{x}{q})^n| \le C \sum n (\frac{x}{q})^n < +\infty$ car $|\frac{x}{q}| < 1$. Ainsi $\sum n a_n x^{n-1}$ converge si $|x| < \rho$. D'autre part, pour $|x| > \rho$ la série $\sum n a_n x^{n-1}$ diverge, car si $\sum n a_n x^{n-1}$ convergeait pour un $|x| > \rho$, en choisissant un $|x| > Q > \rho$, on aurait la convergence de $\sum n a_n Q^{n-1}$ et donc il existerait une constante $C' < +\infty$ telle que $|n a_n Q^{n-1}| < C'$ pour tout n, puis pour $\rho < y < Q$ on aurait $\sum |a_n y^n| = \sum |n a_n Q^n \frac{1}{n} (\frac{y}{Q})^n| \le C' \sum \frac{1}{n} (\frac{y}{Q})^n < +\infty$ car $|\frac{y}{Q}| < 1$, mais cela serait une contradiction. Par conséquent, la série $\sum n a_n x^{n-1}$ converge pour $|x| < \rho$ et diverge pour $|x| > \rho$, son rayon de convergence est donc ρ.

12. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} (= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t)$ a pour rayon de convergence ρ.

    Vrai. Si le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ est ρ', d'après la question précédente le rayon de convergence de $\sum a_n x^n = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\frac{a_n x^{n+1}}{n+1})$ est aussi ρ', donc $\rho' = \rho$.

13. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence ρ^2.

    Vrai. On peut montrer comme dans la question n°11 que $\sum a_n^2 x^n$ converge pour $|x| < \rho^2$ et diverge pour $|x| > \rho^2$. Ou on peut utiliser directement la formule $\rho = (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})^{-1}$ pour conclure, car $\limsup_{n\to\infty} |a_n^2|^{1/n} = (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})^2$ (mais penser à justifier cette dernière égalité).

14. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ a pour rayon de convergence $\sqrt{\rho}$.

    Vrai. Cette fois c'est plus facile de le justifier par définition, i.e. on pourra montrer directement que $\sum a_n x^{2n}$ converge pour $|x| < \sqrt{\rho}$ et diverge pour $|x| > \sqrt{\rho}$.

15. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ a pour rayon de convergence ρ.

    Faux. Un contre-exemple : si on choisit $a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum a_n x^n = \sum x^{2n}$ et donc son rayon de sonvergence est $\rho = 1$, tandis que $\sum a_{2n} x^{2n} = 0$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

16. Si de plus $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} x^n$ a pour rayon de convergence ρ^{-1}.

Faux. Un contre-exemple : si $a_{2n+1} = 1$ et $a_{2n} = (n+1)^{-2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\rho = (\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n})^{-1} = 1$, cependant le rayon de convergence de $\sum a_n^{-1} x^n$ est $(\limsup_{n\to\infty} |a_n^{-1}|^{1/n})^{-1} = 0 \neq 1^{-1}$.

17. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ une série entière réelle ayant pour rayon de convergence ρ. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ a pour rayon de convergence ρ.

Faux. Un contre-exemple : Si $a_n = -b_n = 1$ pour tout n, alors $\rho = 1$ mais le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) x^n = 0$ est $+\infty$.

18. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = -\rho$.

Faux. Un contre-exemple : pour $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, la série entière $\sum a_n x^n = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho = 1$; cette série converge en $x = 1$ par le critère des séries alternées (i.e. le critère de Leibniz) mais diverge en $x = -1$ ($\sum \frac{1}{n+1} = +\infty$).

19. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$, alors $\lim_{x\to\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$.

Vrai. D'après le théorème d'Abel (vu dans l'Exercice 2.ii de la feuille « Exercices sur les séries entières »), la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, \rho]$ et donc cette série est continue sur $[0, \rho]$, d'où $\lim_{x\to\rho-} \sum a_n x^n = \sum a_n \rho^n$.

20. Si $\lim_{x\to\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = \rho$ et on a aussi l'égalité $\lim_{x\to\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$.

Faux. Un contre-exemple : pour $a_n = (-1)^n$, on sait que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence $\rho = 1$ et cette somme vaut $\frac{1}{1+x}$ quand $0 < x < 1$. Donc $\lim_{x\to\rho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ converge, or cette série $\sum a_n x^n = \sum (-1)^n x^n$ ne converge pas en $x = 1$ car son terme général ne tend pas vers 0.