Exercices sur le calcul différentiel de l'exponentielle matricielle 27/11/2020

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E et on suppose qu'elle vérifie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ est convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ (et donc se trouve un élément de E). De plus, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$. Généraliser ce dernier résultat aux séries infinies doubles (ou même multiples).

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension > 0 sur $\mathbb{R}$. Pour une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : E \longrightarrow E$, posons $\|T\| = \displaystyle\sup_{0\neq x\in E} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$. Soit ensuite $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaire $T : E \longrightarrow E$ vérifiant $\|T\| < +\infty$.

(a) Soit $T : E \longrightarrow E$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si T est continue sur E.

(b) Montrer que $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

(c) Montrer que la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(E)$ est *sous-multiplicative*, c'est-à-dire que pour toute $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_2\| \cdot \|T_1\|$.

(d) Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach, montrer que $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ l'est aussi.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de dimension > 0 sur $\mathbb{R}$. L'exercice précédent nous donne un espace de Banach $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$ dont la norme est sous-multiplicative. Montrer que pour toute $T \in \mathcal{L}(E)$, la série $\exp(T) := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!}$ (où $T^0 = \mathrm{id}_E$ et T^k est la composée de k copies de T pour $k \in \mathbb{N}^*$) converge dans $\mathcal{L}(E)$; cette limite s'appelle l'*exponentielle de* T et on écrit aussi $\exp(T) = e^T$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe désormais une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ (rappelons que toutes normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes). Alors on sait que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, de plus il induit un autre espace de Banach $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$ d'après Exercice 2.

(a) Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, soit $[L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ x \longmapsto Ax] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la *multiplication à gauche par* A. Vérifier que $[L : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ A \longmapsto L_A]$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

(b) L'isomorphisme L en (a) transporte la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ via $\|A\| := \|L_A\|$ pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$; on en obtient un autre espace de Banach $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ où la norme $\|\cdot\|$ est aussi sous-multiplicative ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour toute $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). Pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, vérifier les deux propriétés suivantes :

- **(i)** La série $\exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$ est convergente dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et donc y définit un élément. On écrit aussi $\exp(A) = e^A$.
- **(ii)** $L_{e^A} = e^{L_A}$. (On a ainsi $L \circ \exp = \exp \circ L$.)

(c) Si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ commutent (de sorte que $AB = BA$), montrer les égalités $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B) = \exp(B)\exp(A)$. En déduire que pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et a pour inverse $\exp(-A)$.

Exercice 5. L'exercice précédent nous donne une application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que cette application exp est continue (sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, on peut aussi écrire* $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*. On va étudier la différentiabilité de* $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, mais par convention on dira toutefois "la différentiabilité de* $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*".*[1]

Exercice 6. Montrer que $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est différentiable en $0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et que $D\exp(0) = [\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ B \longmapsto B]$.

Exercice 7. Fixons une $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

(a) En développant soigneusement $\exp(A+B)$ ($B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$), montrer que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est différentiable en A et a pour différentielle

$$D\exp(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad B \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k} A^{k-j} B A^j.$$

(b) Montrer le lemme suivant : la *fonction bêta* $\mathrm{B}(x, y) := \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} \mathrm{d}t$ vérifie $\mathrm{B}(x, y) = \dfrac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$ pour $x, y \in \mathbb{N}^*$.

[1] En effet, la différentielle de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en une $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (si elle existe) est une application linéaire continue $D\exp(A) : T_A\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_{\exp(A)}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ entre les *espaces tangents* $T_A\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_{\exp(A)}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, mais on a les isomorphismes canoniques d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$: $T_A\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq T_{\exp(A)}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; ainsi $D\exp(A)$ s'identifie à $D\exp(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et c'est la même chose si on part de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Plus généralement, soit $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x \in \mathbb{R}_{>0})$ la *fonction gamma.* Alors $\Gamma(x+1) = x!$ $(x \in \mathbb{N})$ et $\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(x, y \in \mathbb{R}_{>0})$.

(c) En déduire une autre expression de $D\exp(A)$:

$$D\exp(A)B = \int_0^1 e^{(1-t)A}Be^{tA}\mathrm{d}t \quad (B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})).$$

Indication : montrer à l'aide de (b) que $\frac{1}{(k+1)!} = \frac{\mathrm{B}(k-j+1,j+1)}{(k-j)!j!}$, *puis remplacer le* $\frac{1}{(k+1)!}$ *dans la formule de* $D\exp(A)B$ *en (a) par* $\frac{\mathrm{B}(k-j+1,j+1)}{(k-j)!j!}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}(e^{f(x)})}{\mathrm{d}x} = \int_0^1 e^{(1-t)f(x)}f'(x)e^{tf(x)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 9. La *représentation adjointe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'application

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})),\ A \longmapsto [\mathrm{Ad}_A : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ B \longmapsto ABA^{-1}],$$

où $\mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est l'ensemble des applications continues $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui sont aussi des morphismes de groupes. On peut prolonger Ad à

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})),\ A \longmapsto [\mathrm{Ad}_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ B \longmapsto ABA^{-1}]$$

et on remarque que $\mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ est un espace de Banach.

(a) Montrer que $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ est différentiable en $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (ici I_n est la matrice identité) et que la différentielle $D\mathrm{Ad}(I_n) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ est explicitement donnée par la formule suivante : pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$D\mathrm{Ad}(I_n)(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ B \longmapsto AB - BA.$$

(b) La *représentation adjointe de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{ad} := D\mathrm{Ad}(I_n)$; en introduisant le *commutateur* $[A,B] := AB - BA$ pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient ainsi

$$\mathrm{ad} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})),\ A \longmapsto [\mathrm{ad}_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ B \longmapsto [A,B]].$$

On introduit la *multiplication à gauche* $L_A \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et la *multiplication à droite* $R_A \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ données par $L_A(B) = AB$ et $R_A(B) = BA$ pour toute $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Établir les propriétés suivantes :

(i) $\mathrm{ad}_A = L_A - R_A$ pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $L_{e^A} = e^{L_A}$ et $R_{e^A} = e^{R_A}$ pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(iii) $L_A R_A = R_A L_A$ pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(iv) $\mathrm{Ad}_{e^A} = e^{\mathrm{ad}_A}$ pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. (Ainsi $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$.)

Exercice 10. Montrer que la différentielle de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit aussi comme :

$$D\exp(A) = e^A \int_0^1 \mathrm{Ad}_{e^{-tA}}(\cdot)\mathrm{d}t = e^A \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A},$$

où $\dfrac{1 - e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A} := \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\mathrm{ad}_A)^k$ (cette dernière définition s'inspire du développement $\dfrac{1 - e^{-z}}{z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$).

Exercice 11. Montrer que $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de classe C^1 (sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$), c'est-à-dire montrer que $D\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ est continue (sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 12. L'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ étant de classe C^1 et la différentielle $D\exp(0) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ étant une application inversible (Exercices 6 et 11), le *théorème d'inversion locale* montre que $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un C^1-difféomorphisme local en $0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir qu'il existe un ouvert U de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et un ouvert V de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (donc de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) contenant l'identité $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $\exp|_U : U \longrightarrow V$ soit un C^1-difféomorphisme. Ici on propose de construire l'inverse local explicit de exp autour de $0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

(a) Montrer que pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A - I_n\| < 1$, la série matricielle $\ln(A) := \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(A - I_n)^k$ converge dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|\exp(A) - I_n\| \leq \exp(\|A\|) - 1$. En déduire que si $\|A\| < \ln 2$ alors $\ln(\exp(A)) = A$.

(c) Montrer le lemme suivant : pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, si $\|A\| < 1$, alors la matrice $I_n + A$ est inversible et que $(I_n + A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k A^k$.

(d) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left\| \dfrac{1 - e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A} - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \right\| \leq e^{\|\mathrm{ad}_A\|} - 1$ (cf. Exercice 10 pour la notation) et que $\|\mathrm{ad}_A\| \leq 2\|A\|$. En déduire que si $\|A\| < \dfrac{\ln 2}{2}$ alors l'application $D\exp(A) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

(e) En déduire que pour l'ouvert $U := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \|A\| < (\ln 2)/2\}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la restriction de $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à U est un C^1-difféomorphisme sur son image et que l'inverse de $\exp|_U : U \longrightarrow \exp(U)$ est $\ln|_{\exp(U)} : \exp(U) \longrightarrow U$.

Exercice 13. Si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ commutent (c'est-à-dire si $AB = BA$), alors on a $e^A e^B = e^{A+B}$ (Exercice 4(c)) ; mais en général $e^A e^B \neq e^{A+B}$. Peut-on quand même trouver une matrice C telle que $e^A e^B = e^C$? Le but de cet exercice est d'établir une *formule de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin* qui donnera, lorsque $\|A\| + \|B\|$ est assez petite, une formule explicite de C en fonction des A et B. Dans les questions suivantes, soient alors $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

(a) Montrer que $\|e^{tA}e^{tB} - I_n\| \leq e^{|t|(\|A\|+\|B\|)} - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\|A\| + \|B\| < \ln 2$, alors pour tout $t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, il existe une unique $C(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $e^{C(t)} = e^{tA}e^{tB}$, de plus l'application $t \longmapsto C(t)$ ainsi obtenue est de classe C^1 sur $t \in [-1, 1]$.

(b) On suppose que $\|A\| + \|B\| < \ln 2$ et soit $t \longmapsto C(t)$ $(t \in [-1, 1])$ l'application construite en (a). Montrer les propriétés suivantes :

(i) $(D\exp)(C(t))C'(t) = Ae^{C(t)} + e^{C(t)}B$ sur $t \in [-1, 1]$.

(ii) $\|C(t)\| \leq \|A\| + \|B\|$ sur $t \in [-1, 1]$.

(iii) Si $\|A\| + \|B\| < \dfrac{\ln 2}{2}$ alors $(D\exp)(C(t))$ est inversible pour tout $t \in [-1, 1]$.

(c) On suppose que $\|A\| + \|B\| < \dfrac{\ln 2}{2}$ et soit $t \longmapsto C(t)$ $(t \in [-1, 1])$ l'application construite en (a). Justifier les calculs suivants sur $t \in [-1, 1]$:

(i) $e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} = e^{t\,\mathrm{ad}_A} e^{t\,\mathrm{ad}_B}$.

(ii) $C'(t) = \dfrac{\mathrm{ad}_{C(t)}}{e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} - 1}(A + e^{\mathrm{ad}_{C(t)}}B)$, où on dénote par $\dfrac{\mathrm{ad}_{C(t)}}{e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} - 1}$ l'inverse de l'application $\dfrac{e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} - 1}{\mathrm{ad}_{C(t)}} = e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} \dfrac{1 - e^{-\mathrm{ad}_{C(t)}}}{\mathrm{ad}_{C(t)}}$ (cf. Exercice 10).

(iii) Pour $P(t) := e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} - \mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$, on a $\|P(t)\| < 1$ et $\mathrm{ad}_{C(t)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} P(t)^k$, de plus $\dfrac{\mathrm{ad}_{C(t)}}{e^{\mathrm{ad}_{C(t)}} - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} P(t)^k$.

(iv) $C'(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^{t\,\mathrm{ad}_A} e^{t\,\mathrm{ad}_B} - 1)^k (A + e^{t\,\mathrm{ad}_A} B)$.

(d) En déduire la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin pour* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: si $\|A\| + \|B\| < \dfrac{\ln 2}{2}$, alors il existe une unique $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $e^C = e^A e^B$, de plus C s'écrit comme une série infinie d'adjointe ad (ou de commutateurs) :

$$C = A + B + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (\Phi_k(A,B) + \Psi_k(A,B)) = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \cdots$$

où :

$$\Phi_k(A,B) = \sum_{\substack{r_i, s_i \geq 0 \\ r_i + s_i \geq 1}} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} (r_i + s_i)\right) + 1} \frac{(\mathrm{ad}_A)^{r_1}}{r_1!} \frac{(\mathrm{ad}_B)^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(\mathrm{ad}_A)^{r_k}}{r_k!} \frac{(\mathrm{ad}_B)^{s_k}}{s_k!} A \,;$$

$$\Psi_k(A,B) = \sum_{\substack{r_i, s_i \geq 0 \\ r_i + s_i \geq 1 \\ q \geq 0}} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} (r_i + s_i)\right) + q + 1} \frac{(\mathrm{ad}_A)^{r_1}}{r_1!} \frac{(\mathrm{ad}_B)^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(\mathrm{ad}_A)^{r_k}}{r_k!} \frac{(\mathrm{ad}_B)^{s_k}}{s_k!} \frac{(\mathrm{ad}_A)^{q}}{q!} B.$$

Exercice 14. Dans cet exercice on considère $\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (le cas de $n = 2$). Le but de cet exercice est de déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $D\exp(A) : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ne soit pas inversible ; ce sont les points de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en lesquelles $\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un difféomorphisme local.

(a) Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et écrivons $\varphi(z) := 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)!} z^k$. Montrer que $D\exp(A)$ est inversible si et seulement si $\varphi(\mathrm{ad}_A) := \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)!} (\mathrm{ad}_A)^k$ est inversible (cf. Exercice 10).

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que le polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}_A : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ en variable λ est $\det(\mathrm{ad}_A - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}) = \lambda^2(\lambda^2 - (a-d)^2 - 4bc) \in \mathbb{R}[\lambda]$.

(ii) En déduire que $D\exp(A) : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas inversible si et seulement si $(a-d)^2 + 4bc = -4m^2\pi^2$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$.

Référence : Michael Müger, *Notes on the theorem of Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin.* Lien d'article : `https://www.math.ru.nl/~mueger/PDF/BCHD.pdf`.