Exercices sur l'inversion locale de polynômes symétriques 10/12/2020

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les deux applications suivantes :

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (p_1(x), \cdots, p_n(x)) \ ;$$
$$s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (s_1(x), \cdots, s_n(x)) \ ;$$

où $p_r(x) := \sum_{j=1}^{n} x_j^r$ et $s_r(x) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_r}$ pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour $1 \leq r \leq n$. Soit $\Omega = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \neq x_j \text{ pour tout } 1 \leq i < j \leq n\}$.

(a) Calculer la matrice jacobienne $Jp(x) = \left(\dfrac{\partial p_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ de p en un point $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. En déduire que p est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que Ω est une partie ouverte dense de $\mathbb{R}^n$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que p est un C^1-difféomorphisme au voisinage de x si et seulement si $x \in \Omega$. (On dit que p est un C^1-difféomorphisme au voisinage de x s'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant $p(x)$ tels que $p(U) = V$ et tels que $p|_U : U \longrightarrow V$ soit une application bijective de classe C^1 sur U dont l'inverse est de classe C^1 sur V.)

Indication : étudier l'inversibilité de la différentielle $Dp(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ à l'aide du déterminant de Vandermonde.

(d) Montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $p = \varphi \circ s$ sur $\mathbb{R}^n$.

Indication : utiliser les identités de Newton (formules de Newton-Girard).

(e) En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^n$, s est un C^1-difféomorphisme au voisinage de x si et seulement si $x \in \Omega$.

(f) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\{f_c(t) = t^n + a_1(c)t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(c)t + a_n(c) \in \mathbb{R}[t] : c \in]-\varepsilon, \varepsilon[\,\}$ une famille de polynômes réels en variable t. On suppose que les n fonctions $a_1, \cdots, a_n :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et que le polynôme $f_0(t) \in \mathbb{R}[t]$ admet n racines réelles distinctes. Montrer qu'il existe un $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ et n fonctions $\lambda_1, \cdots, \lambda_n :]-\varepsilon', \varepsilon'[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que pour tout $c \in]-\varepsilon', \varepsilon'[$, les n nombres réels $\lambda_1(c), \cdots, \lambda_n(c)$ soient tous distincts et soient les n racines du polynôme $f_c(t) \in \mathbb{R}[t]$.

(g) Pour tout $y \in s(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant y tel que l'image réciproque $(s|_\Omega)^{-1}(V) \subset \Omega$ soit la réunion de $n!$ ouverts tous disjoints $U_1, \cdots, U_{n!}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $s|_{U_j} : U_j \longrightarrow V$ un C^1-difféomorphisme pour tout $1 \leq j \leq n!$. En déduire un résultat analogue pour l'application p.