Exercices sur le calcul différentiel de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$**.** 04/01/2021

Fixons un $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$. On sait que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; un tel isomorphisme et la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^{n^2}$ rendent $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ un espace métrique. Posons aussi :

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &:= \{x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, x \text{ est inversible}\} = \{x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(x) \neq 0\} \ ; \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &:= \{x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(x) = 1\}.\end{aligned}$$

On a alors $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les questions suivantes, on considérera $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ comme des sous-espaces métriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer aussi que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un esapce métrique complet, connexe par arcs mais non compact.

2. Montrer que $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et que sa différentielle $d(\det)_a : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ en chaque $a \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est donnée par la formule $d(\det)_a h = \mathrm{tr}(a^{-1}h)$ pour toute $h \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. (Ici $\mathrm{tr}(\cdot)$ désigne la trace.)

Indication : pour montrer que $\det$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, pourquoi suffira-il de vérifier que toutes les dérivées partielles de* $\det$ *existent et sont continues ?*

3. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une *hypersurface de classe* C^1 de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour toute $a \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ on peut trouver deux ouverts U et V de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a \in U$, un C^1-difféomorphisme $\psi : U \xrightarrow{\sim} V$ et un hyperplan E de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$) tels que $\psi(U \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = V \cap E$.

Indication : utiliser le théorème des fonctions implicites et prendre $V = U$ *ici.*

4. Soit $a \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par définition, l'*espace tangent de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *en* a est

$$T_a\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ \begin{array}{l} \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de classe } C^1 \\ \text{avec } \gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \gamma(0) = a \end{array} \right\}.$$

Montrer que $T_a\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \ker(d(\det)_a)$.

Indication : établir $d(\psi^{-1})_{\psi(a)}(E) \subset T_a\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \ker(d(\det)_a)$ *(cf. Question 3).*

5. Pour toute $a \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, soit $L_a : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ la multiplication à gauche par a, donnée par $L_a(x) = ax$ (produit matriciel) pour toute $x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Justifier les deux propriétés suivantes pour toute $a \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$:

- dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, une partie $U \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un voisinage de la matrice identité $\mathrm{id} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $L_a(U)$ est un voisinage de a ;
- $d(L_a)_{\mathrm{id}}(T_{\mathrm{id}}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \subset T_a\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, de plus $d(L_a)_{\mathrm{id}} : T_{\mathrm{id}}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_a\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

6. Posons $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := T_{\mathrm{id}}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{v \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}(v) = 0\}$.

7. On rappelle que l'exponentielle matricielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donnée par $\exp(v) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v^k}{k!}$ $(v \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. Justifier les deux propriétés suivantes :

- $\det(\exp(v)) = \exp(\mathrm{tr}(v))$ pour toute $v \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\exp(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

On en obtiendra le diagramme commutatif suivant, dont la ligne en haut est une suite exacte d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et dont la ligne en bas est une suite exacte de groupes : (dans le diagramme, ι signifie une inclusion)

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{tr}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\exp"'] & \{0\} \\
\{\mathrm{id}\} \arrow[r] & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\det"] & \mathbb{R}^\times \arrow[r] & \{1\}
\end{tikzcd}$$

Indication pour le 1^{er} *point : fixons un* $v \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *et posons* $\alpha(t) = \det(\exp(tv))$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *; vérifier que* $\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$ *et en déduire que* $\alpha'(t) = \alpha'(0)\alpha(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Références :

- Polycopié du calcul différentiel du cours 3MA360 d'année 2019-2020 (en particulier le chapitre V sur les sous-variétés) à Sorbonne Université. Disponible sur la page web du professeur F. Le Roux : `https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.le-roux/enseignement.html`
- A. Kirillov, Introduction to Lie groups and Lie algebras. Disponible sur la page web de l'auteur : `https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/liegroups/`