NOTES DU GROUPE DE TRAVAIL « CONJECTURE DE KAZHDAN–LUSZTIG »

Wille Liu

1. Informations

le mercredi, 10h30 – 12h, Sophie Germain 1016

2. Objectifs

Ce groupe de travail a pour but de comprendre la preuve de la conjecture de Kazhdan–Lusztig ainsi que les techniques employées au cours de la preuve et des généralisations. Plus précisément, on veut comprendre les sujets suivants :

1. la conjecture de Kazhdan–Lusztig, qui exprime la matrice de passage entre les bases $\{[L(-\rho - w\rho)]\}_{w\in W}$ et $\{[M(-\rho - w\rho)]\}_{w\in W}$ dans $K\left(\mathcal{O}(\mathfrak{g})_{\chi_0}\right)$ en terme de polynômes de Kazhdan–Lusztig $P_{y,w}(q)$
$$[L(-\rho - w\rho)] = \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\,[M(-\rho - y\rho)]\,.$$
Les polynômes $P_{y,w}(q)$ sont définis avec les algèbres d'Iwahori–Hecke.
2. le formalisme (sans détail ni preuve) des $\mathcal{D}$-modules sur les variétés lisses, des faisceaux pervers ($\mathbf{Q}$ ou ℓ-adique) et la théorie du poids (ℓ-adique ou Hodge mixte),
3. le théorème de Kazhdan–Lusztig, qui exprime les polynômes de Kazhdan–Lusztig en termes du polynôme de Euler–Poincaré de certains complexes d'intersections sur les variétés de drapeaux :
$$P_{y,w}(q) = \sum_i \dim\left(\mathscr{H}^{i-\dim X_w}\left(\mathrm{IC}\left(\mathbf{C}_{X_w}\right)\right)_{yB}\right) q^{i/2}.$$
4. la correspondance de Riemann–Hilbert dans le cas régulier
$$\mathrm{Mod}_{\mathrm{rh}}\left(X\right) \cong \mathrm{Perv}\left(X, \mathbf{C}\right)$$
5. les opérateurs différentiels tordus, les $\mathcal{D}$-modules tordus et les modules de Harish-Chandra et la correspondance de Beĭlinson–Bernstein
$$\Gamma(G/B, -) : \mathrm{Mod}_{\mathrm{qc}}\left(\mathcal{D}_\lambda\right) \cong \mathrm{Mod}\left(\mathfrak{g}, \chi_\lambda\right)$$
pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{reg}}$ dominant au sens où $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, -3, \cdots\}$ pour tout $\alpha \in \Pi \subseteq \Delta^+(G)$.
6. la preuve de la conjecture de Kazhdan–Lusztig.
7. les filtrations de Jantzen et leur construction géométrique avec le foncteur cycles proches et la filtration de monodromie.
8. la preuve des conjectures de Jantzen à l'aide du théorème de pureté de Deligne–Gabber
9. la formule de caractère
$$[L(-\lambda - w\lambda)] = \sum_{y\in W_\lambda} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\,[M(-\lambda - y\lambda)]\,.$$
pour les poids réguliers $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathrm{reg}}$ dominant.

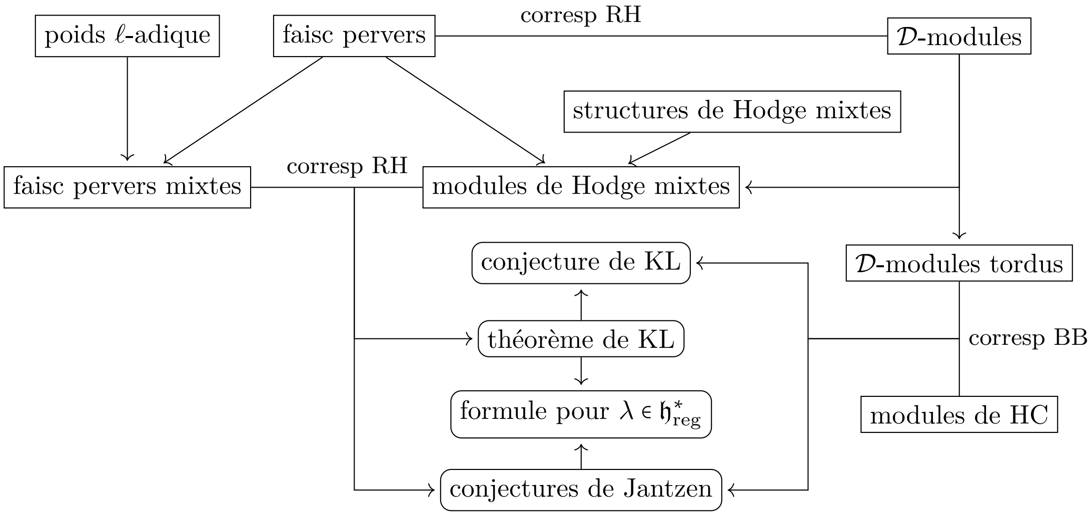

FIGURE 1. schéma de dépendance

3. Références

Les travaux originaux sont les suivants :

- [Ja] JANTZEN, Jens Carsten. *Moduln mit einem höchsten Gewicht*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [KL1] KAZHDAN, David et LUSZTIG, George. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Inventiones mathematicae*, 1979, vol. 53, no 2, p. 165-184.
- [KL2] KAZHDAN, David et LUSZTIG, George. Schubert varieties and Poincaré duality. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1980, vol 36, p. 185-203.
- [BK] BRYLINSKI, Jean-Luc et KASHIWARA, Masaki. Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems. *Inventiones mathematicae*, 1981, vol. 64, no 3, p. 387-410.
- [Lu] LUSZTIG, George. *Characters of reductive groups over a finite field.* Princeton University Press, 1984.
- [BB] BEILINSON, Alexander et BERNSTEIN, Joseph. A proof of Jantzen conjectures. *Advances in Soviet mathematics*, 1993, vol. 16, no Part 1, p. 1-50.

On suivra néanmoins des références plus récentes et plus accessibles :

- [Ga] GAITSGORY, Dennis. notes `http://www.math.harvard.edu/~gaitsgde/267y/cat0.pdf`.
- [Ri1] RICHE, Simon. D-Modules, faisceaux pervers et conjecture de Kazhdan-Lusztig (d'après Beilinson-Bernstein), `http://math.univ-bpclermont.fr/~riche/exposeKL-v2.pdf`.
- [Ri2] RICHE, Simon. Perverse sheaves on flag manifolds and Kazhdan-Lusztig polynomials (after Kazhdan-Lusztig, Macpherson, Springer, . . .), `http://math.univ-bpclermont.fr/~riche/exposeKL2.pdf`.
- [HTT] HOTTA, Ryoshi et TAKEUCHI, Kiyoshi et TANISAKI, Toshiyuki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory.* Springer Science & Business Media, 2007.

Pour la théorie des faisceaux pervers ℓ-adiques, les originaux SGA4½ et BBD sont toujours les recommendés. Il y a également sur cela un article sympathique

- [CM] DE CATALDO, Mark et MIGLIORINI, Luca. The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2009, vol. 46, no 4, p. 535-633. `https://arxiv.org/abs/0712.0349`.

Quant à la théorie des modules de Hodge, on peut consulter

– [Sa] SAITO, Morihiko. A young person's guide to mixed Hodge modules. arXiv :1605.00435, 2016.

4. Programme

voici un exemple de programme

– introduction, 1 séance.
– rappel des faisceaux pervers : recollement, cycles proches et cycles évanescents et faisceaux pervers mixtes, [BBD], [ch 8, HTT], 2 séances.
– théorème de Kazhdan–Lusztig, [ch 13, HTT], [Ri2], 1 séance.
– rappel rapide de la théorie des $\mathcal{D}$-modules : connexions intégrables, fonctorialités, bonnes filtrations, variétés caractéristiques et $\mathcal{D}$-modules holonômes, théorème de Kashiwara sur la fidélité pleine du foncteur i_*, [ch 1-4,HTT], 2 séances.
– singularités régulières et correspondance de Riemann–Hilbert, [7.2.5, HTT], 1 séance.
– $\mathcal{D}$-modules tordus, modules de Harish-Chandra et cadre abstrait, [1.1, 1.2, 1.6, 1.8, 2.1, BB], 2 séance.
– $\mathcal{D}$-modules monodromiques et théorème de localisation de Beĭlinson–Bernstein, [2.5, 2.6, 3.1, 3.2, 3.3, BB], 2 séances.
– preuve de la conjecture de Kazhdan–Lusztig, [ch 12, HTT], [Ri1], [BK], 1 séance.
– filtrations de Jantzen et la preuve des conjectures de Jantzen, [3.4, 3.5, 4, 5, BB], 3 séances.

---

7 mars 2018

WILLE LIU